CHAPITRE 2

Algèbre linéaire et géométrie affine

2.1 Espaces vectoriels, applications linéaires

On prend ici pour $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$ mais la plupart de ce qu'on va voir est valable dans le cas d'un corps commutatif quelconque, notamment au corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ où p est un nombre premier. On note aussi E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

2.1.1 Bases, sommes directes

Dans ce paragraphe, on étend au cas des familles quelconques les notions suivantes vues en première année : combinaison linéaire, base, somme directe.

DÉFINITION 2.1.1. ***Combinaison linéaire***
Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs, $(\lambda_i)_{i\in I}$ une famille de scalaires presque tous nuls (i.e. il n'y a qu'un nombre fini de λ_i non nuls, $(\lambda_{i_j})_{j\in[\![1,p]\!]}$) alors on définit

$$\sum_{i\in I}\lambda_i x_i = \sum_{j=1}^{p}\lambda_{i_j}x_{i_j}$$

***Remarque* 2.1.1.** *On a alors la propriété suivante sur les combinaisons linéaires :*

$$\lambda\sum_{i\in I}\lambda_i x_i + \mu\sum_{i\in I}\mu_i x_i = \sum_{i\in I}(\lambda\lambda_i + \mu\mu_i)x_i$$

i.e. une combinaison linéaire de combinaisons linéaires est une combinaison linéaire.

Dém : On prend $J \subset I$ une famille finie telle que les λ_i soient nuls sur le complémentaire de J,
$K \subset I$ une famille finie telle que les μ_i soient nuls sur le complémentaire de K.
On a alors

$$\begin{aligned}\lambda\sum_{i\in I}\lambda_i x_i + \mu\sum_{i\in I}\mu_i x_i &= \lambda\sum_{i\in J\cup K}\lambda_i x_i + \mu\sum_{i\in J\cup K}\mu_i x_i\\ &= \sum_{i\in J\cup K}(\lambda\lambda_i + \mu\mu_i)x_i \text{ propriété des C.L. finies}\\ &= \sum_{i\in I}(\lambda\lambda_i + \mu\mu_i)x_i \blacksquare\end{aligned}$$

On retrouve alors les mêmes définitions qu'en première année pour une famille libre, liée, génératrice, une base ainsi que pour les coordonnées d'un vecteur :

- La famille $(x_i)_{i\in I}$ est libre ssi $\sum\limits_{i\in I}\lambda_i x_i = 0 \Rightarrow \forall i \in I,\ \lambda_i = 0$ (les λ_i étaient presque tous nuls, ils sont alors tous nuls).
- La famille $(x_i)_{i\in I}$ est liée ssi il existe des $(\lambda_i)_{i\in I}$ non tous nuls tels que l'on ait $\sum\limits_{i\in I}\lambda_i x_i = 0$.
- La famille $(x_i)_{i\in I}$ est génératrice ssi pour tout $x \in E$, il existe $(\lambda_i)_{i\in I}$ tels que $x = \sum\limits_{i\in I}\lambda_i x_i$ (attention ici au fait que la somme est nécessairement finie).
- La famille $(x_i)_{i\in I}$ est une base ssi elle est libre et génératrice, ce qui est encore équivalent à : pour tout $x \in E$, il existe $(\lambda_i)_{i\in I}$ uniques tels que $x = \sum\limits_{i\in I}\lambda_i x_i$.
- Dans le cas où les $(x_i)_{i\in I}$ forment une base, les λ_i sont les coordonnées de x.

Exemple : La famille $(1, X, \ldots, X^n, \ldots)$ est une base de $\mathbb{K}[X]$ que l'on appelle base canonique de $\mathbb{K}[X]$.

Définition 2.1.2. ***Algèbre***
Soit E un ensemble muni des lois $+$, $\times$ (lois internes) et . loi externe, on dit que E est une algèbre sur $\mathbb{K}$ ssi$_{\text{déf}}$

- $(E, +, \times)$ *est un anneau,*
- $(E, +, .)$ *est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel,*
- $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall x \in E,\ \lambda.(x\times y) = (\lambda.x)\times y = x\times(\lambda.y)$.

Définition 2.1.3. ***Fonctions polynomiales***
Dans $\mathcal{F}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$ (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), on définit les fonctions polynomiales comme étant des combinaisons linéaires des fonctions de la forme $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$ où les α_i sont des entiers. On note cet ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$.

***Remarque* 2.1.2.** *$f \in \mathcal{P}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$ s'écrit $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum\limits_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\mathbb{N}^n} \lambda_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$.*
On peut préférer la notation plus simple suivante : si $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, on écrit $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$, $\lambda_\alpha = \lambda_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$ alors f s'écrit :

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \lambda_\alpha x^\alpha.$$

Proposition 2.1.1. ***Base de $\mathcal{P}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$***
La famille de fonctions $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$ est une base de $\mathcal{P}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$.

Dém : On prouve par récurrence sur n que ces fonctions forment une base de $\mathcal{P}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$.

- Cette famille est génératrice par définition.
- Montrons que les fonctions $f_\alpha \ : x \in \mathbb{K}^n \mapsto x^\alpha$ forment une famille libre (on a pris la notation de la remarque précédente).
  - Pour $n = 1$, si $f(x) = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i x^i = 0$ alors le polynôme f admet une infinité de racines donc c'est le polynôme nul ce qui donne $\lambda_i = 0$ pour tout i.
  - On suppose la propriété vraie à l'ordre $n-1$.
    Soit

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} \lambda_\alpha x^\alpha \\ &= \sum_{\alpha_n=0}^{p} \underbrace{\left(\sum_{(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1}) \in \mathbb{N}^{n-1}} \lambda_{\alpha_1,\dots,\alpha_n} x_1^{\alpha_1} \dots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \right)}_{=\mu_{\alpha_n}(x_1,\dots,x_{n-1})} x_n^{\alpha_n} \\ &= \sum_{\alpha_n=0}^{p} \mu_{\alpha_n}(x_1, \dots, x_{n-1}) x_n^{\alpha_n} = 0 \end{aligned}$$

    p désigne le degré par rapport à x_n et on remarque que les μ_{α_n} sont des fonctions polynomiales de $x_1, \dots, x_{n-1}$.
    En appliquant la démonstration du cas $n = 1$, on déduit que les μ_{α_n} sont nulles pour tous les $n-1$-uplets $(x_1, \dots, x_{n-1})$. On applique alors l'hypothèse de récurrence à chaque μ_{α_n} ■

On retrouve aussi le fait qu'une application linéaire est caractérisée par l'image des vecteurs d'une base :

Théorème 2.1. Si $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E, si $(f_i)_{i\in I}$ est une famille de vecteurs de F alors il existe une unique $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $f(e_i) = f_i$.

Dém : On définit f par $f\left(\sum_{i\in I} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i\in I} \lambda_i f_i$.

- f est bien linéaire grâce aux propriétés des applications linéaires :

$$\begin{aligned} f\left(\lambda \sum_{i\in I} \lambda_i e_i + \mu \sum_{i\in I} \mu_i e_i\right) &= f\left(\sum_{i\in I} (\lambda\lambda_i + \mu\mu_i) e_i\right) \\ &= \sum_{i\in I} (\lambda\lambda_i + \mu\mu_i) f_i \\ &= \lambda \sum_{i\in I} \lambda_i f_i + \mu \sum_{i\in I} \mu_i f_i \\ &= \lambda f\left(\sum_{i\in I} \lambda_i e_i\right) + \mu f\left(\sum_{i\in I} \mu_i e_i\right). \end{aligned}$$

- f est bien unique : si g est une autre application linéaire vérifiant $g(e_i) = f_i$ alors, par une récurrence immédiate sur p, on prouve que

$$g\left(\sum_{j=1}^{p} \lambda_{i_j} e_{i_j}\right) = f\left(\sum_{j=1}^{p} \lambda_{i_j} e_{i_j}\right) ■$$

À partir de maintenant, la famille I est supposée être finie

DÉFINITION 2.1.4. ***Somme de sous-espaces vectoriels***
Si $(E_i)_{i\in I}$ est une famille finie des sous-espaces vectoriels de E, on définit $\sum_{i\in I} E_i$ l'ensemble des sommes $\sum_{i\in I} x_i$ où les vecteurs x_i sont dans E_i.
La somme est directe (notée : $\bigoplus_{i\in I} E_i$) ssi$_{déf}$ $x = \sum_{i\in I} x_i$ décomposition de x vecteur de la somme est unique.

PROPOSITION 2.1.2. *$\sum_{i\in I} E_i$ est directe ssi* $\left(0 = \sum_{i\in I} x_i \Rightarrow \forall i \in I,\ x_i = 0\right)$.

Dém : les deux implications sont simples :

($\Rightarrow$) On note 0_i le vecteur nul de E_i (en fait c'est le vecteur nul de E mais cette notation est provisoire). On a $0 = \sum_{i\in I} 0_i$ donc, si $0 = \sum_{i\in I} x_i$, alors, en vertu de l'unicité de la décomposition, on en déduit que $x_i = 0_i = 0$ pour tout i.

($\Leftarrow$) Si $x = \sum_{i\in I} x_i = \sum_{i\in I} y_i$ alors, en faisant la différence, $\sum_{i\in I}(x_i - y_i) = 0$ donc $x_i - y_i = 0$ d'où l'unicité de la décomposition ■

Exemple : Soit P un polynôme de degré $n+1$, $P\mathbb{K}[X]$ le sous-espace vectoriel des multiples de P alors $P\mathbb{K}[X]$ admet pour supplémentaire le sous-espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
Attention ! Il n'y a pas unicité du supplémentaire.
Dém : On utilise la division euclidienne par P : si $Q \in \mathbb{K}[X]$ alors $Q = PK + R$ avec $\deg R < \deg P = n+1$ donc $\mathbb{K}[X] = P\mathbb{K}[X] + \mathbb{K}_n[X]$.
Si $Q \in P\mathbb{K}[X] \cap \mathbb{K}_n[X]$ alors $Q = PK$ et $\deg Q \leqslant n$ entraîne que $Q = 0$.
On a donc prouvé que $\mathbb{K}[X] = P\mathbb{K}[X] \oplus \mathbb{K}_n[X]$ ■

DÉFINITION 2.1.5. ***Base adaptée***
On suppose ici que E est de dimension finie.

- *Soit F un sous-espace vectoriel de E, on appelle base adaptée à F toute base $(e_1, \dots, e_n)$ telle que, après une éventuelle renumérotation, $(e_1, \dots, e_p)$ soit une base de F.*
- *Si $E = \bigoplus_{i=1}^{m} E_i$, on appelle base adaptée à la décomposition en somme directe toute base qui, après une éventuelle renumérotation, s'écrit $(e_{i,j})_{i\in[\![1,m]\!],j\in[\![1,n_i]\!]}$ où chaque sous-famille $(e_{i,j})_{j\in[\![1,n_i]\!]}$ est une base de E_i.*

Cette dernière définition est très intéressante pour la réduction des endomorphismes et on peut l'écrire en prenant une partition de I.

THÉORÈME 2.2. Si E est de dimension finie alors

$$\dim \bigoplus_{i\in I} E_i = \sum_{i\in I} \dim E_i.$$

Dém : On prend une base $(e_{i,j})_{j\in[\![1,m_j]\!]}$ dans chaque espace E_i, montrons que l'on obtient une base adaptée à la décomposition en somme directe :

- La famille est génératrice : si $x \in \sum\limits_{i \in I} E_i$ alors

$$x = \sum_{i \in I} x_i = \sum_{i \in I} \sum_{j=1}^{m_i} x_{i,j} e_{i,j}$$

  ce qui signifie bien que la famille engendre la somme.

- La famille est libre : on a

$$\sum_{i \in I} \sum_{j=1}^{m_i} x_{i,j} e_{i,j} = \sum_{i \in I} x_i = 0$$

  donc, comme la somme est directe, $x_i = 0$ pour tout i donc $\sum\limits_{j=1}^{m_i} x_{i,j} e_{i,j} = 0$ et vu que $(e_{i,j})_{j \in [\![1,m_i]\!]}$ est une base de E_i alors $x_{i,j} = 0$ pour tous i et j

Conclusion : la famille $(e_{i,j})_{j \in [\![1,m_j]\!]}$ est une base adaptée à la décomposition en somme directe donc $\dim \bigoplus\limits_{i \in I} E_i = \sum\limits_{i \in I} m_i = \sum\limits_{i \in I} \dim E_i$ ■

Vient ensuite un corollaire très utile :

Corollaire 2.3. La somme $\sum\limits_{i \in I} E_i$ est directe ssi

$$\dim \sum_{i \in I} E_i = \sum_{i \in I} \dim E_i.$$

Dém : On prend les notations du théorème précédent.

- Le sens direct vient d'être démontré.

- Pour la réciproque, la première partie du théorème démontre que la famille $(e_{i,j})$ est génératrice et comme $\mathrm{Card}(e_{i,j}) = \dim \sum\limits_{i \in I} E_i$ alors cette famille a un cardinal égal à la dimension de la somme donc c'est une base de $\sum\limits_{i \in I} E_i$. On en déduit alors que

$$\dim \sum_{i \in I} E_i = \sum_{i \in I} m_i = \sum_{i \in I} \dim E_i \blacksquare$$

Théorème 2.4. *E de dimension quelconque, on suppose que $E = \bigoplus\limits_{i \in I} E_i$. On se donne pour tout i de I une application linéaire u_i de E_i dans F alors il existe une unique application linéaire de E dans F admettant comme restriction à E_i l'application u_i pour tout i.*

Dém : Si $x = \sum\limits_{i \in I} x_i$, on pose $f(x) = \sum\limits_{i \in I} u_i(x_i)$. Comme la décomposition de x est unique, f est bien définie.

- Si $y = \sum_{i \in I} y_i$ alors

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f\left(\sum_{i\in I} x_i + y_i\right) = \sum_{i\in I} u_i(x_i+y_i) \\ &= \sum_{i\in I} u_i(x_i) + u_i(y_i) = f(x) + f(y) \\ f(\lambda x) &= f\left(\sum_{i\in I} \lambda x_i\right) = \sum_{i\in I} u_i(\lambda x_i) \\ &= \sum_{i\in I} \lambda u_i(x_i) = \lambda f(x) \end{aligned}$$

  donc f est linéaire.

- On vérifie aussi que si $x = x_i$ alors $f(x_i) = u_i(x_i)$ donc la restriction de f à E_i est bien égale à u_i.

- Si g est une autre application qui vérifie la même propriété alors $g(x_i) = f(x_i)$ donc $g(x) = \sum_{i\in I} u_i(x_i) = f(x)$. $g = f$ ce qui assure l'unicité ■

DÉFINITION 2.1.6. ***Projecteurs associés à une somme directe***
Si $E = \bigoplus_{i\in I} E_i$, on peut définir les applications p_j qui à $x = \sum_{i\in I} x_i$ associent x_j.
La famille $(p_i)_{i\in I}$ est appelée famille de projecteurs associée à la décomposition $E = \bigoplus_{i\in I} E_i$.

PROPOSITION 2.1.3. *Les p_j définis ci-dessus sont des projecteurs, ils vérifient*

$$p_j^2 = p_j,\ p_i \circ p_j = 0 \text{ si } i \neq j \text{ et } \mathrm{Id}_E = \sum_{i\in I} p_i.$$

Réciproquement, si une famille d'endomorphismes de E vérifie les 3 propriétés ci-dessus alors les espaces vectoriels $E_i = p_i(E)$ sont en somme directe, de somme E.

Dém : L'implication directe est immédiate : en effet on a $p_j(x_j) = x_j$ par unicité de la décomposition dans une somme directe donc

- $p_j^2(x) = p_j(x_j) = x_j = p_j(x)$ soit $p_j^2 = p_j$.
- $p_i(p_j(x)) = p_i(x_j) = 0$ pour $i \neq j$ donc $p_i \circ p_j = 0$.
- $x = \mathrm{Id}_E(x) = \sum_{i\in I} x_i = \sum_{i\in I} p_i(x)$ d'où $\mathrm{Id}_E = \sum_{i\in I} p_i$.

Réciproquement, grâce à $I_E = \sum_{i\in I} p_i$ on obtient $x = \sum_{i\in I} p_i(x)$ soit $E \subset \sum_{i\in I} E_i$ puis l'égalité car l'inclusion dans l'autre sens est vraie par hypothèse.
Si $x_i \in E_i = p_i(E)$ alors il existe $x \in E$ tel que $x_i = p_i(x)$ donc, à l'aide des propriétés $p_i^2 = p_i$ et $p_j \circ p_i = 0$ pour $i \neq j$, on a

$$p_i(x_i) = p_i^2(x) = p_i(x) = x_i \text{ et } p_j(x_i) = p_j \circ p_i(x_i) = 0 \text{ pour } i \neq j.$$

Enfin, si $0 = \sum_{i\in I} x_i$ alors en appliquant p_j aux deux membres de cette égalité, on arrive à $p_j(0) = 0 = p_j(x_j) = x_j$ donc la somme est directe ■

2.1.2 Image et noyau d'une application linéaire

THÉORÈME 2.5. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alors f définit un isomorphisme de tout supplémentaire E' de $\operatorname{Ker} f$ sur $\operatorname{Im}(f)$.

Dém : Par hypothèse on a $E = \operatorname{Ker} f \oplus E'$.

- Si $x = n + x'$ où $n \in \operatorname{Ker} f$ et $x' \in E'$ alors $f(x) = f(x')$ d'où $f(E') = f(E)$. Si on pose $f' = f_{|E'}^{|\operatorname{Im} f}$, f' est surjective.
- Enfin, si $f'(x) = 0$ alors $f(x) = 0$ et $x \in E'$ (vu la définition de f) donc $x \in \operatorname{Ker} f \cap E' = \{0\}$ par conséquent f' est injective.

Conclusion : f' est bijective i.e. f réalise bien un isomorphisme de E' sur $\operatorname{Im} f$ ■

La différence entre ce théorème et celui proposé dans les révisions de première année (formule du rang) c'est qu'on n'a pas supposé que les espaces vectoriels soient de dimension finie.

Application : Soit u l'application de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}^{n+1}$ définie par

$$u(P) = (P(a_0), \ldots, P(a_n)) \text{ où } a_i \neq a_j \text{ pour } i \neq j.$$

On a $\operatorname{Ker} u = N\mathbb{K}[X]$ où $N = \prod_{i=0}^{n}(X - a_j)$: $u(P) = 0$ se traduit par les égalités $P(a_0) = P(a_1) = \ldots = P(a_n) = 0$ donc P est divisible par N i.e. $P \in N\mathbb{K}[X]$.
On sait alors que $\mathbb{K}_n[X]$ est un supplémentaire du noyau (cf. Exemple à la page 188). u définit donc un isomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ sur $\mathbb{K}^{n+1}$.
Si (e_i) est la base canonique de $\mathbb{K}^{n+1}$ alors les polynômes $L_i = u^{-1}(e_{i+1})$ sont égaux à $L_i = \prod_{j \neq i} \dfrac{X - a_j}{a_i - a_j}$: en effet, L_i vérifie les propriétés suivantes

- $L_i(a_j) = 0$ pour $j \neq i$ donc $\prod_{j \neq i}(X - a_j)$ divise L_i,
- $\deg L_i \leqslant n$ donc $L_i = \lambda \prod_{j \neq i}(X - a_j)$ où $\lambda \in \mathbb{K}$,
- $L_i(a_i) = 1$ d'où $\lambda = \prod_{j \neq i} \dfrac{1}{a_i - a_j}$ ■

DÉFINITION 2.1.7. ***Polynôme d'interpolation de Lagrange***
Les polynômes L_i s'appellent polynômes d'interpolation de Lagrange aux points d'abscisse $(a_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$. Ils forment une base de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$.

***Remarque* 2.1.3.** *La recherche d'un polynôme de degré $\leqslant n$ vérifiant les conditions $P(a_i) = b_i$ est équivalente à la résolution d'un système de Vandermonde*

$$\alpha_0 + \alpha_1 a_i + \cdots + \alpha_n a_i^n = b_i \text{ pour } i \in [\![0, n]\!]$$

On trouve la solution sous la forme $P = \sum_{i=0}^{n} b_i L_i$.

Dém : On sait, d'après l'application ci-dessus, que le système $P(a_i) = b_i$, $i \in [\![0, n]\!]$ admet une unique solution dans $\mathbb{K}_n[X]$. Or $P = \sum_{i=0}^{n} b_i L_i \in \mathbb{K}_n[X]$ et vérifie $P(a_i) = b_i$ ce qui donne la solution cherchée.
Les coefficients α_k s'obtiennent (difficilement) en décomposant les polynômes L_i dans la base canonique. En particulier $\alpha_n = \sum_{i=0}^{n} b_i \prod_{j \neq i} \frac{1}{a_i - a_j}$.

On peut donc résoudre le système $\begin{pmatrix} 1 & a_0 & \dots & a_0^n \\ 1 & a_1 & \dots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ ■

Corollaire 2.6. Soit F un sous-espace vectoriel de E, E_1' et E_2' deux supplémentaires de F dans E (i.e. $F \oplus E_1' = E = F \oplus E_2'$). Soit p la projection de E sur E_1' parallèlement à F alors $p_{|E_2'}^{|E_1'}$ définit un isomorphisme de E_2' sur E_1'.

Dém : On applique le théorème 2.5 page 191 à $p \in \mathcal{L}(E)$: p définit un isomorphisme de E_2' supplémentaire de $F = \operatorname{Ker} p$ sur $E_1' = \operatorname{Im} p$ ■

Corollaire 2.7. Les sous-espaces supplémentaires d'un même sous-espace vectoriel sont isomorphes et ont même dimension si elle est finie.

Dém : Si E_1' et E_2' sont deux supplémentaires d'un même sous-espace vectoriel F alors on a vu à la question précédente que $p_{|E_2'}^{|E_1'}$ est un isomorphisme de E_2' sur E_1' donc ces supplémentaires sont isomorphes. Une isomorphie conservant la dimension, on en déduit que si $\dim E_1' = p$ alors E_2' est de dimension finie et que cette dimension vaut p ■
On peut alors poser la définition suivante :

Définition 2.1.8. ***Codimension finie, hyperplan***
Si F est un sous-espace vectoriel de E admettant un supplémentaire E' de dimension finie, on dit que F est de codimension finie. $\dim E'$ sera appelé codimension de F, noté $\operatorname{codim} F$ (en effet, cela ne dépend pas du supplémentaire vu le dernier corollaire).
Si $\operatorname{codim} F = 1$, on dit que F est un hyperplan.

Proposition 2.1.4. *Si E est de dimension finie alors* $\dim F + \operatorname{codim} F = \dim E$.

Dém : Là c'est immédiat, en effet si F est un sous-espace vectoriel de E, soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de F que l'on complète en une base de E : $(e_1, \dots, e_n)$. Alors $G = \operatorname{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$ est un supplémentaire de F et $\underbrace{\dim F}_{=p} + \underbrace{\dim G}_{=n-p} = \underbrace{\dim E}_{=n}$ ■

Définition 2.1.9. ***Rang d'une application linéaire***
Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et si F est de dimension finie alors on définit comme en première année le rang de f par $\operatorname{Rg}(f) = \dim f(E)$.

On peut alors généraliser la formule du rang :

Théorème 2.8. Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et si F est de dimension finie alors $\operatorname{Ker} f$ est de codimension finie dans E et $\operatorname{Rg}(f) = \operatorname{codim} \operatorname{Ker} f$.

Dém : $\operatorname{Im} f$ est de dimension finie car c'est un sous-espace vectoriel de F qui est de dimension finie. Soit $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)$ une base de $\operatorname{Im} f$ $(p = \operatorname{Rg}(f))$. On sait qu'il existe $e_i \in E$ tels que $f(e_i) = \varepsilon_i$ car $\varepsilon_i \in \operatorname{Im} f$.
Montrons que la famille $(e_1, \ldots, e_p)$ est libre :
si $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i = 0$ alors

$$f\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \underbrace{f(e_i)}_{=\varepsilon_i} = 0$$

donc, vu que $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)$ est libre, $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $\lambda_i = 0$, ce qui prouve que $(e_1, \ldots, e_p)$ est libre.
Montrons maintenant que $E' = \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$ est un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$:
en effet si $x \in E$ alors $f(x) = \sum_{i=1}^{p} y_i \varepsilon_i$, on écrit maintenant

$$x = \underbrace{\sum_{i=1}^{p} y_i e_i}_{=y} + (x - y).$$

Or $f(x - y) = f(x) - f(y) = 0$ donc $E = \operatorname{Vect}(e_i) + \operatorname{Ker} f$.
Puis si $y \in \operatorname{Vect}(e_i) \cap \operatorname{Ker} f$ alors $f(y) = f\left(\sum_{i=1}^{p} y_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{p} y_i \varepsilon_i = 0$. Comme la famille (ε_i) est une base alors $y_i = 0$ pour tout $i \in [\![1, p]\!]$ donc $y = 0$.
On a ainsi prouvé que $E = \operatorname{Vect}(e_i) \oplus \operatorname{Ker} f$ donc $\operatorname{Ker} f$ est de codimension finie et $\operatorname{codim} \operatorname{Ker} f = \dim \operatorname{Vect}(e_i) = \operatorname{Rg}(f)$.
(la démonstration est immédiate avec le théorème 2.5 page 191 si l'on admet que tout s.e.v. d'un e.v. admet un supplémentaire) ■

***Remarque* 2.1.4.**

(*i*) *Si E est de dimension finie, le théorème précédent redonne la formule du rang.*

(*ii*) *Si $\operatorname{Rg}(f) = \dim E$ alors f est injective.*

Dém : En effet, d'après le théorème précédent, $\dim \operatorname{Ker} f = 0$ *par conséquent* $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ ■

(*iii*) *Si $\operatorname{Rg}(f) = \dim E$ alors $\operatorname{Rg}(f \circ g) = \operatorname{Rg}(g)$ $(f \in \mathcal{L}(E, F),\ g \in \mathcal{L}(G, E))$.*

DÉFINITION 2.1.10. ***Dual***
On note E^* l'ensemble des formes linéaires sur E. E^* est appelé espace dual de E.

THÉORÈME 2.9.
Si $\varphi \in E^*$ et si φ est non nulle alors $H = \operatorname{Ker} \varphi$ est un hyperplan de E.
Si $\psi \in E^*$ et si ψ s'annule sur H alors ψ est colinéaire à φ.

Dém :

- On sait déjà que $\operatorname{Ker} \varphi$ est un hyperplan (cf. th 2.8).

- Si $\psi(H) = \{0\}$, on écrit tout vecteur $x = h + \lambda e_1$ (où (e_1) est une base d'un supplémentaire de H). Alors $\psi(x) = \psi(h) + \lambda\psi(e_1) = \lambda\psi(e_1)$ car $\psi(h) = 0$ vu l'hypothèse.

  On obtient alors $\varphi(x) = \lambda\varphi(e_1)$ d'où $\psi(x) = \dfrac{\psi(e_1)}{\varphi(e_1)}\varphi(x)$ ■

***Remarque* 2.1.5.** *Si E est de dimension finie n alors tout hyperplan H admet une équation de la forme $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$ où x est un vecteur de H et x_i sont les composantes de x dans une base de E.*

Dém : On utilise le résultat demandé à la question (i) qui suit : $H = \operatorname{Ker}\varphi$ où φ est une forme linéaire. Dans une base quelconque, φ s'écrit $\varphi(x) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$ d'où le résultat ■

Questions :

(i) Montrer que tout hyperplan H est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

(ii) Démontrer l'affirmation de la remarque 2.1.4 (iii).

2.1.3 Dualité en dimension finie

PROPOSITION 2.1.5. *Soit $e \in E$, $e \neq 0$ alors il existe $\varphi \in E^*$ telle que $\varphi(e) = 1$.*

Dém : Comme $e \neq 0$, on sait que l'on peut compléter (e) en une base : $(e, e_2, \dots, e_n)$, on définit alors φ par $\varphi(e) = 1$ et $\varphi(e_i) = 0$. Si $x = \sum_{i=1}^{n} x_ie_i$ (en posant $e_1 = e$) alors $\varphi(x) = x_1$, l'application $x \mapsto x_1$ est une forme linéaire ■

***Remarque* 2.1.6.** *Si $\varphi(x) = 0$ pour toute forme linéaire φ de E^* alors $x = 0$.*

Dém : C'est la contraposée de la proposition précédente : on a prouvé que

$$e \neq 0 \Rightarrow \exists\varphi \in E^* \mid \varphi(e) \neq 0$$

et, en prenant la contraposée, on obtient

$$\forall\varphi \in E^*,\ \varphi(e) = 0 \Rightarrow e = 0 ■$$

PROPOSITION 2.1.6. ***Base duale***
Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E, on note φ_j les formes linéaires coordonnées définies par $\varphi_j(e_i) = \delta_{ij}$.
La famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une base de E^* appelée base duale de la base $\mathcal{B}$ et notée $\mathcal{B}^*$.

Dém : Ceci a déjà été prouvé en première année, cf. théorème 8.15 page 135 ■

THÉORÈME 2.10. **Base anté-duale**
Soit $\mathcal{B}^* = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ une base de E^*, alors il existe une base de E, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ telle que $\varphi_j(e_i) = \delta_{ij}$.
$\mathcal{B}^*$ est la base duale de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}$ est appelée **base anté-duale** de $\mathcal{B}^*$.

Dém : Soit $f\ : e \in E \mapsto (\varphi_1(e), \varphi_2(e), \dots, \varphi_n(e)) \in \mathbb{K}^n$. f est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}^n$ deux e.v. de même dimension.
Si $\varphi_i(e) = 0$ pour tout i alors pour toute $\varphi \in E^*$, $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i$, [1] on obtient alors $\varphi(e) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i(0) = 0$ donc f est injective.
f est une application linéaire injective entre deux espaces vectoriels de même dimension donc f est un isomorphisme.
On note e_i l'image réciproque par f de la base canonique de $\mathbb{K}^n$:
on a ainsi $e_1 = f^{-1}(1, 0, \dots, 0)$ donc $\varphi_1(e_1) = 1$ et $\varphi_i(e_1) = 0$ pour $i \geqslant 2$. de même $\varphi_i(e_j) = \delta_{ij}$ (symbole de Kronecker) ■

***Remarque* 2.1.7.**

(*i*) *Pour prouver qu'une famille L de formes linéaires est une base de E^*, il suffit de trouver une base de E dont c'est la base duale.*
Dém : C'est immédiat, en effet, soit $L = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, si on trouve (e_i) une base de E telle que $\varphi_i(e_j) = \delta_{ij}$ alors L est génératrice (toute forme linéaire $\varphi \in E^*$ s'écrit $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ soit $\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i$). Comme L contient n éléments alors c'est une base de E^* ■

(*ii*) *On note parfois $\varphi(x) =< x, \varphi >$ et, avec les notations du théorème précédent, on a $< x, \varphi >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ où x_i et y_i désignent les coordonnées respectives de x dans $\mathcal{B}$ et de φ dans $\mathcal{B}^*$.*
Ceci ressemble alors à l'expression du produit scalaire dans une base orthonormée et justifie l'écriture du théorème suivant F^o pour "l'orthogonal" de F.

Exemple : Soient $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ des éléments distincts, on définit les formes linéaires φ_j sur $\mathbb{K}_n[X]$ par $\varphi_j(P) = P(a_j)$.
La famille $(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une base car c'est la base duale de la famille des polynômes d'interpolation de Lagrange $(L_0, L_1, \dots, L_n)$.

Théorème 2.11.
Soit F un s.e.v. de E de dimension p. On note $F^o = \{\varphi \in E^* \mid \forall x \in F,\ \varphi(x) = 0\}$, on a $\dim F^o = n - p$.

Dém : Soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base adaptée à F ($(e_1, \dots, e_p)$ est une base de F), $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ sa base duale.
Si $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i \in F^o$ alors $\varphi(e_i) = 0$ pour $i \leqslant p$ donc $\varphi \in \mathrm{Vect}(\varphi_{p+1}, \dots, \varphi_n) = G$ et par conséquent $F^o \subset G$.
Comme $\varphi_i \in F^o$ pour $i \geqslant p + 1$ ($\varphi_i(e_j) = 0$ pour $j \leqslant p$) on a $G \subset F^o$ d'où $F^o = G$ soit $\dim F^o = n - p$ ■

Corollaire 2.12. Soit $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_q)$ une famille libre de formes linéaires sur E, $H_i = \mathrm{Ker}\,\varphi_i$ alors $F = \bigcap_{i=1}^{q} H_i$ est un s.e.v. de dimension $n - q$.
Si $\varphi \in F^o$ (notation du théorème précédent) alors $\varphi = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \varphi_i$.

[1] C'est l'expression de φ dans cette base

Dém : On complète Φ en une base $\mathcal{B}^*$: $(\varphi_1, \ldots, \varphi_q, \ldots, \varphi_n)$ et on prend $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base anté-duale associée.
On a $H_i = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, \widehat{e_i}, \ldots, e_n)$ ($\widehat{e_i}$ signifie que l'on enlève ce vecteur—et que l'on garde les autres—) :
en effet $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \in H_i \Leftrightarrow \varphi_i(x) = x_i = 0$ soit $x \in H_i$, l'inclusion dans l'autre sens étant immédiate.
Ensuite, $x \in F \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, q]\!],\ x_i = 0$ (avec la notation ci-dessus) donc $F = \mathrm{Vect}(e_{q+1}, \ldots, e_n)$
Enfin, si $\varphi \in F^o$ alors, en utilisant la démonstration du théorème précédent, alors $\varphi \in \mathrm{Vect}(\varphi_1, \ldots, \varphi_q)$ ■

On peut alors rajouter la remarque suivante :

***Remarque* 2.1.8.** *En reprenant les notations de la démonstration du théorème 2.10, on peut interpréter le corollaire précédent de la manière suivante :*
si $f\ : e \in E \mapsto (\varphi_1(e), \ldots, \varphi_q(e)) \in \mathbb{K}^p$ *alors* f *est surjective et* $\mathrm{Ker}\, f = \bigcap_{i=1}^{q} H_i = F$ *et on a* $\mathrm{codim}\,\mathrm{Ker}\, f = q$.

Dém : On montre que f est surjective par l'absurde. Si f n'est pas surjective alors il existe H hyperplan de $\mathbb{K}^q$ tel que $\mathrm{Im}\, f \subset H$. Soit $a_1x_1 + \cdots + a_qx_q = 0$ l'équation de H dans la base canonique de $\mathbb{K}^q$ alors on a

$$\forall x \in E,\ a_1\varphi_1(x) + \cdots + a_q\varphi_q(x) = 0$$

soit $a_1\varphi_1 + \cdots + a_q\varphi_q = 0$ ce qui est impossible car la famille (φ_i) est libre.
$\mathrm{Ker}\, f = \bigcap_{i=1}^{q} H_i = F$ est immédiat car $e \in \mathrm{Ker}\, f \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, q]\!],\ \varphi_i(e) = 0$ ce qui est encore équivalent à $\forall i \in [\![1, q]\!],\ e \in H_i$ ■

Questions :

(*i*) Soit $a \in \mathbb{K}$, on définit les formes linéaires sur $\mathbb{K}_n[X]$ par $y_k^*(P) = P^{(k)}(a)$. Montrer que la famille $(y_0^*, \ldots, y_n^*)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]^*$. En chercher la base anté-duale.

(*ii*) Soit P la matrice de passage de (e_i) à (ε_i), on note (e_i^*) la base duale de (e_i), (ε_i^*) la base duale de (ε_i) et on appelle Q la matrice de passage de (e_i^*) à (ε_i^*). Chercher une relation entre P et Q.

(*iii*) On pose $V_n = \mathrm{Vect}(\mathrm{e}^{-int}, \ldots, 1, \ldots, \mathrm{e}^{int})$ sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$. Pour $k \in [-n, n]$, on pose
$$\varphi_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{e}^{-ikt}\,\mathrm{d}t \text{ pour } f \in V_n.$$
Soit $\theta \in \mathbb{R}$, trouver $g \in V_n$ telle que $\forall f \in V_n,\ f(\theta) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.

(*iv*) Soient $a_1, \ldots, a_{n+1}$ $n+1$ éléments distincts de $\mathbb{R}$. On définit $P_i = (X + a_i)^n$. Montrer que la famille $(P_1, \ldots, P_{n+1})$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ (on montrera que si φ est une forme linéaire qui s'annule sur chaque P_i alors $\varphi = 0$).

2.1.4 Trace d'un endomorphisme

Définition 2.1.11. ***Trace d'une matrice carrée***
Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *on appelle* $\operatorname{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ *la somme des termes situés sur la diagonale.*

Proposition 2.1.7.
La trace est une application linéaire, on a la propriété fondamentale suivante

$$\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA)$$

ce qui permet d'avoir $\operatorname{Tr}(PMP^{-1}) = \operatorname{Tr} M$ *mais on n'a pas* $\operatorname{Tr}(ABC) = \operatorname{Tr}(BAC)$.

Dém : $AB = (c_{ij})$ où $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$ et $BA = (c'_{ij})$ où $c'_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj}$. On a alors

$$\operatorname{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki} \right)$$
$$\operatorname{Tr}(BA) = \sum_{i=1}^{n} c'_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{ki} \right).$$

Dans l'expression de $\operatorname{Tr}(BA)$, on utilise la commutativité dans $\mathbb{K}$, on échange les indices $k \leftrightarrow i$, et on permute les sommes ce qui donne l'égalité.
On a alors

$$\operatorname{Tr}(PMP^{-1}) = \operatorname{Tr}((PM)P^{-1}) = \operatorname{Tr}(P^{-1}(PM)) = \operatorname{Tr}((P^{-1}P)M) = \operatorname{Tr}(M) \blacksquare$$

On a vu à la proposition précédente que deux matrices semblables avaient la même trace, donc si on prend la matrice d'une application linéaire dans une base quelconque, alors la trace de cette matrice ne dépend pas de la base choisie (les matrices d'un même endomorphisme sont toutes semblables). On peut alors définir :

Définition 2.1.12. ***Trace d'un endomorphisme en dimension finie***
La trace d'un endomorphisme est la trace de sa matrice dans une base quelconque.

Enfin, une propriété simple mais très utile :

Proposition 2.1.8. *Si* p *est un projecteur en dimension finie alors* $\operatorname{Rg}(p) = \operatorname{Tr}(p)$.

Dém : On a $E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p$ et on prend une base adaptée $(e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$ où $(e_1, \dots, e_r)$ est une base de $\operatorname{Im} p$[2] et $(e_{r+1}, \dots, e_n)$ une base de $\operatorname{Ker} p$. $p(e_i) = e_i$ pour $i \leqslant r$ et $p(e_i) = 0$ pour $i > r$. La matrice de p dans cette base s'écrit par conséquent sous la forme $M(p) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\operatorname{Tr}(M(p)) = \operatorname{Tr}(p) = r$ $\blacksquare$

Questions :

(*i*) Montrer que $\operatorname{Tr}[(AB)^n] = \operatorname{Tr}[(BA)^n]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(*ii*) Soit $f \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$, montrer qu'il existe $F \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $f(M) = \operatorname{Tr}(MF)$.

[2] r est bien sûr le rang de p

2.1.5 Calcul matriciel et systèmes d'équations linéaires

DÉFINITION 2.1.13. ***Matrices équivalentes***
Si $(A,B) \in \mathcal{M}_{p,n}^2(\mathbb{K})$ *on dit que* A *et* B *sont équivalentes ssi*$_{déf}$

$$\exists (R,S) \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \textit{ tel que } B = RAS$$

On a vu dans les révisions de première année au 8.4.4. que deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont équivalentes ssi elles sont équivalentes à la matrice $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (théorème 8.42 page 151).

THÉORÈME 2.13. **C.N.S. pour que 2 matrices soient équivalentes**
A et B sont équivalentes dans $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ ssi $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(B)$.

Dém : Si A et B sont équivalentes alors il existe $(R,S) \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $B = RAS$. Si f et g sont les applications linéaires de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ de matrices A et B, ρ et σ celles de R et S alors $g = \rho \circ f \circ \sigma$. Comme ρ et σ sont bijectives, elles conservent le rang donc

$$\mathrm{Rg}(B) = \mathrm{Rg}(g) = \mathrm{Rg}(\rho \circ f) = \mathrm{Rg}(f) = \mathrm{Rg}(A).$$

Réciproquement : soit $r = \mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(B)$. A est donc équivalente à J_r, B est équivalente à J_r. Ceci s'écrit encore $A = RJ_rS$ et $B = R'J_rS'$ où $(R,S) \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $(R',S') \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. $J_r = R^{-1}AS^{-1}$ d'où $B = RR^{-1}AS^{-1}S' = R''AS''$ où $(R'',S'') \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ donc A et B sont équivalentes ■

- Au 8.4.3. on a vu les opérations élémentaires sur les matrices et l'application que l'on pouvait en faire pour calculer l'inverse d'une matrice (algorithme du pivot de Gauss).

- Au 8.4.5. on a vu comment résoudre un système d'équations linéaires grâce au pivot de Gauss.

- On peut appliquer le pivot partiel pour rechercher le rang d'une matrice rectangulaire.

- Enfin, dans l'algorithme du pivot partiel, lorsqu'on obtient la matrice triangulaire, le produit des termes qui sont sur la diagonale nous fournit, au signe près, le déterminant. Le signe de ce dernier sera obtenu en comptant les transpositions faites.

- On a vu, toujours au 8.4.5. que l'on pouvait donner une interprétation à l'aide de la dualité d'un système linéaire. On peut maintenant en donner une interprétation géométrique : on recherche l'intersection d'une famille d'hyperplans affines.

Théorème 2.14. Interprétation duale d'un système

Soit $\begin{cases} \varphi_1(x) & = b_1 \\ \varphi_2(x) & = b_2 \\ \varphi_p(x) & = b_p \end{cases}$ où $x \in E$ de dimension n. On suppose que la famille $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p)$ est libre (donc $p \leqslant n$) alors le système admet comme ensemble de solutions un sous-espace affine de dimension $n - p$.
En particulier, si $n = p$ (système de Cramer), il admet une unique solution.

Dém : On complète $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p)$ en une base $\mathcal{B}^*$: $(\varphi_1, \ldots, \varphi_p, \varphi_{p+1}, \ldots, \varphi_n)$ et on prend $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base anté-duale associée.
Si $x_0 = \sum\limits_{i=1}^{p} b_i e_i$ alors $\varphi_1(x_0) = b_1, \ldots, \varphi_p(x_0) = b_p$ donc x_0 est une solution du système.
Si x est une autre solution alors $\varphi_i(x - x_0) = \varphi_i(x) - \varphi_i(x_0) = 0$ pour $i \in [\![1, p]\!]$ donc $x - x_0 \in \bigcap\limits_{i=1}^{p} \operatorname{Ker} \varphi_i$. On utilise alors le corollaire 2.12 pour conclure que l'ensemble des solutions S s'exprime sous la forme $S = x_0 + \operatorname{Vect}(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ ■

***Remarque* 2.1.9.** *si $f \in \mathcal{L}(E)$ il peut être intéressant de considérer f comme une application linéaire de $\mathcal{L}(E, E)$ en choisissant des bases différentes dans E espace de départ et E espace d'arrivée (et dans ce cas, on peut avoir $M(f) = J_r$).*

Question :
Déterminer tous les éléments $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$ pour tout élément $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$.