CHAPITRE 7

Séries entières, séries de Fourier

7.1 Séries entières

7.1.1 Rayon de convergence d'une série entière

a) Définitions

On note $D(z_0, r)$ le disque ouvert de centre z_0, de rayon r et $\overline{D}(z_0, r)$ le disque fermé.

Définition 7.1.1. ***Série entière***

On appelle série entière toute série $f(z) = \sum a_n z^n$ où les a_n et z sont des complexes.

On s'interesse maintenant au domaine de convergence d'une telle série :

Lemme 7.1. **Lemme d'Abel**

Si $\exists M > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n z_0^n| \leqslant M$ alors, pour tout $z \in D(0, |z_0|)$ la série $f(z)$ converge absolument.

Si $f(z_1)$ diverge alors on a divergence pour tout z extérieur au disque $\overline{D}(0, |z_1|)$.

Dém :

- Si $|z| < |z_0|$ alors

$$\begin{aligned} |a_n z^n| &= |a_n z_0^n| . \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \\ &\leqslant M . \left|\frac{z}{z_0}\right|^n . \end{aligned}$$

  La série $\sum \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$ est une série géométrique de raison $\left|\frac{z}{z_0}\right| < 1$ donc elle converge d'où, par domination, $\sum a_n z^n$ converge absolument donc converge.

- L'autre propriété se prouve par l'absurde :
  supposons qu'il existe z extérieur au disque $\overline{D}(0, |z_1|)$ tel que $f(z)$ converge (attention ici, la notation $f(z)$ désigne la série $\sum a_n z^n$). $a_n z^n \to 0$ comme tout terme d'une série convergente donc la suite $(a_n z^n)$ est bornée (il en est ainsi de toute suite convergente). On utilise alors le premier point de la démonstration.
  $|z_1| < |z|$ donc $f(z_1)$ converge ce qui est contradictoire.
  Conclusion : $f(z)$ diverge pour tout z extérieur au disque $\overline{D}(0, |z_1|)$ ■

***Remarque* 7.1.1.** *Dans la première hypothèse il y a convergence normale sur* $\overline{D}(0,r)$ *avec* $r < |z_0|$.

Dém : En effet, pour $z \in \overline{D(0,r)}$ on a

$$|a_n z^n| \leqslant |a_n| r^n \leqslant |a_n z_0^n| . \left|\frac{r}{z_0}\right|^n \leqslant M . \left|\frac{r}{z_0}\right|^n$$

ce qui entraîne effectivement la convergence normale ■

Théorème 7.2. **Rayon de convergence**
L'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que la série $f(z)$ converge est non vide, on appelle R, rayon de convergence de la série $f(z)$, la borne supérieure des $|z|$ tels que $f(z)$ converge.
Si $R > 0$, dans le disque de convergence $D(0,R)$, $f(z)$ converge absolument et on a convergence normale dans tout disque $\overline{D}(0,r)$ où $r < R$ (et par conséquent sur tout compact de $D(0,R)$).
De plus, si $z \notin \overline{D}(0,R)$, $f(z)$ diverge.

Dém :

- Pour tout $0 < r < R$ on sait, par définition de la borne supérieure, qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $r < |z_0| < R$ et $f(z_0)$ converge. On utilise alors la remarque 7.1.1 qui nous permet de conclure à la convergence normale sur $\overline{D}(0,r)$.
  On en déduit aussi que, si $|z| < R$ alors en prenant $r = |z|$ ci-dessus, on a convergence absolue de $f(z)$.

- Enfin, si $|z| > R$ (dans le cas où $R < +\infty$) alors, d'après le lemme d'Abel, $f(z)$ diverge ■

***Remarque* 7.1.2.**

(*i*) *Le rayon de convergence peut être nul et dans ce cas* $f(z)$ *ne converge que pour* $z = 0$ *(a priori peu intéressant).*

(*ii*) *Il peut aussi être infini et dans ce cas il y a convergence de* $f(z)$ *pour tout* z.

(*iii*) *Si* $\sum |a_n| R^n$ *converge alors on aura convergence uniforme sur* $\overline{D(0,R)}$.
Dém : En fait, on a convergence normale puisque si $|z| \leqslant R$ *alors on a* $|a_n z^n| \leqslant |a_n| R^n$ *terme général d'une série convergente* ■

Théorème 7.3. $f(z)$ est continue (en tant que fonction de la variable complexe z) sur $D(0,R)$.
Et si, comme au *iii* de la remarque précédente, $\sum |a_n| R^n$ converge, $f(z)$ est continue sur le disque fermé.

Dém : On utilise la convergence normale sur tout compact (cf. théorème 5.52 page 331
Soit $0 < r < R$, on pose $A = \overline{D(0,r)}$ disque fermé de rayon r de $\mathbb{C}$. On définit $f_n : z \in \mathbb{C} \mapsto a_n z^n$, f_n est continue sur A.
On sait qu'il y a convergence normale de la série $\sum a_n z^n$ sur A, on en déduit la continuité de $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ sur A pour tout $r \in]0,R[$ (en application du théorème

de double limite).
Soit $z_0 \in D(0,R)$ alors on peut trouver $r \in]0,R[$ et $a > 0$ tel que $D(z_0,a) \subset A$ (si $R < +\infty$, prendre $r = \dfrac{R+|z_0|}{2}$ et $a = \dfrac{R-|z_0|}{2}$) : alors pour tout $z \in D(z_0,a)$, $|z| \leqslant \underbrace{|z-z_0|}_{<a} + |z_0| < r$ i.e. $z \in A$ soit $D(z_0,a) \subset A$. Comme f est continue sur A alors f est continue en z_0 et ceci pour tout $z_0 \in D(0,R)$.
Conclusion : f est continue sur $D(0,R)$.
Si $\sum |a_n|R^n$ converge alors on a vu au (iii) de la remarque précédente qu'il y avait convergence normale sur $\overline{D}(0,R)$ on peut alors conclure directement ■

b) Détermination pratique de R

On a les résultats suivants :

Théorème 7.4. Détermination du rayon de convergence
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lambda$ alors $R = \dfrac{1}{\lambda}$ ($\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$ et $R \in \overline{\mathbb{R}}$).

Dém : C'est une conséquence immédiate de la règle de d'Alembert :

- Si $\lambda \in]0,+\infty[$ alors on a
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = \lambda|z|.$$
  - Si $|z| < \dfrac{1}{\lambda}$ la série $\sum a_n z^n$ converge et $R \geqslant \dfrac{1}{\lambda}$.
  - Si $|z| > \dfrac{1}{\lambda}$ elle diverge donc $R \leqslant \dfrac{1}{\lambda}$.

  Conclusion : on a bien $R = \dfrac{1}{\lambda}$.
- Si $\lambda = 0$ alors pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|a_{n+1}z^{n+1}}{|a_n z^n|} = 0$ donc $R = +\infty$.
- Si $\lambda = +\infty$ alors pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|a_{n+1}z^{n+1}}{|a_n z^n|} = +\infty$ donc $R = 0$ ■

***Remarque* 7.1.3.** *On note R le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$.*

(i) Si $|a_n| \leqslant |b_n|$ et si $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ a un rayon de convergence R' alors $R \geqslant R'$.

(ii) Si $a_n \sim b_n$ les 2 séries ci-dessus ont même rayon de convergence (il n'est pas nécessaire ici que a_n et b_n soient positifs).

(iii) On a la formule magique d'Hadamard (hors programme) qui marche toujours :
$$\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$$
où la limite supérieure est la borne supérieure des valeurs d'adhérences de la suite considérée ($= \inf\limits_n \left(\sup\limits_{p\geqslant n} \sqrt[p]{|a_p|}\right)$).

(*iv*) *Si* $f(z)$ *est semi-convergente alors* $R = |z|$ *(i.e.* $\sum a_n z^n$ *C et* $\sum |a_n z^n|$ *D).*

(*v*) *Si* $f(z)$ *diverge et si* $\lim_{n\to+\infty} a_n z^n = 0$ *alors* $R = |z|$.

(*vi*) $R = \sup\{r \geqslant 0 \mid \lim_{n\to+\infty} a_n r^n = 0\}$.

(*vii*) *Si* $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{|a_{n+2}|}{|a_n|} = \lambda$ *alors le rayon de convergence de* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} z^{2n}$ *vaut* $\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}$.

c) Propriétés algébriques

Définition 7.1.2. ***Produit de Cauchy de séries entières***
Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ *et* $g(z) = \sum b_n z^n$ *deux séries entières, on appelle produit de Cauchy de ces deux séries la série*

$$h(z) = \sum c_n z^n \text{ où } c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

***Remarque* 7.1.4.**

(*i*) *Grâce au théorème 5.46 page 323, on sait que si les séries entières* f *et* g *ont des rayons de convergence* $\geqslant a > 0$ *alors* $f(z)g(z) = h(z)$ *sur* $D(0, a)$.
Dém : En effet, si $|z| < a$ *alors chaque série* $\sum a_n z^n$ *et* $\sum b_n z^n$ *est absolument convergente donc leur produit de Cauchy est lui aussi absolument convergent. Le rayon de convergence de* h *est donc* $\geqslant a$ *et on a* $f(z)g(z) = h(z)$ ■

(*ii*) *On a vu à l'exemple page 325 que* $\exp(z + z') = \exp z \exp z'$.

Théorème 7.5. Soient $f(z)$ et $g(z)$ deux séries entières alors

$$R(f+g) \geqslant \min(R(f), R(g)) \text{ (égalité si } R(f) \neq R(g))$$

$$R(f.g) \geqslant \min(R(f), R(g)).$$

Dém :

- On utilise le fait que la somme et le produit de Cauchy de 2 séries A.C. est A.C. donc, on procède comme pour la démonstration du (*i*) de la remarque ci-dessus avec $a = \min(R(f), R(g))$.
- Montrons l'égalité dans le cas où $R(f) < R(g)$ (par exemple) :
Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $R(f) < |z| < R(g)$ alors la série $f(z)$ diverge et $g(z)$ converge donc $(f+g)(z)$ diverge donc $R(f+g) \leqslant R(f)$ et comme on avait l'inégalité dans l'autre sens alors $R(f+g) = R(f) = \min(R(f), R(g)$ ■

***Remarque* 7.1.5.**

(*i*) *Si on prend* $f = -g$ *alors* $R(f+g) = +\infty$.

(ii) *Si on prend* $f(z) = 1 - z$, $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ *alors* $R(f) = +\infty$, $R(g) = 1$ *et* $R(f.g) = +\infty$.
Dém : On sait que $g(z) = \dfrac{1}{1-z}$ *donc* $(f.g)(z) = 1$ *"série entière" de rayon infini* ■

(iii) *Si* $f_0(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} z^{2n}$ *et* $f_1(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} z^{2n+1}$ *ont même rayon* R, *alors* $f_0 + f_1$ *a pour rayon* R.
Dém : On sait déjà que $R(f_0 + f_1) \geqslant R$ *et si* $|z| > R$ *alors la suite* $(a_{2n} z^{2n})$ *n'est pas bornée (sinon, grâce au lemme d'Abel,* $R(f_0) > R$*) donc* $R(f_0 + f_1) \leqslant R$ *d'où l'égalité* ■

Question : Prouver les assertions de la remarque 7.1.3.

7.1.2 Séries entières d'une variable réelle

a) Dérivation et intégration d'une série entière

Théorème 7.6. Les séries $\sum a_n z^n$, $\sum n a_n z^{n-1}$ et $\sum \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ ont même rayon de convergence.

Dém : Montrons que les séries $f(z) = \sum a_n z^n$ et $f'(z) = \sum n a_n z^{n-1}$ ont même rayon de convergence (ici $f(z) = \sum a_n z^n$ et $f'(z) = \sum n a_n z^{n-1}$ ne sont que des notations). On raisonne ici dans $\overline{\mathbb{R}}$.

- Si $n \geqslant 1$, $|a_n| \leqslant n|a_n|$ donc $R(f') \leqslant R(f) = R$.
- Pour avoir l'inégalité dans l'autre sens, on utilise la propriété suivante :

$$\sum n k^{n-1} \text{ converge si } k < 1.$$

En effet par le critère de d'Alembert, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n+1)k^n}{nk^{n-1}} = k < 1$ ce qui prouve bien cette assertion (si $k = 0$ la convergence était immédiate).
Si $|z_0| < R$ alors pour tout z tel que $|z| < |z_0|$, $|n a_n z^{n-1}| = n \left|\dfrac{z}{z_0}\right|^{n-1} . \left|a_n z_0^{n-1}\right|$.
Or la série $\sum a_n z_0^{n-1}$ converge par hypothèse donc $a_n z_0^{n-1} \to 0$ et la suite $(a_n z_0^{n-1})$ est bornée par $M > 0$. On obtient l'inégalité $|n a_n z^{n-1}| \leqslant Mn \left|\dfrac{z}{z_0}\right|^{n-1}$ ce qui assure la convergence de $\sum n a_n z^n$ (car $k = \left|\dfrac{z}{z_0}\right| < 1$).
On en déduit, par le tour de passe-passe usuel sur les rayons de convergence [1] que $R(f') \geqslant R(f)$.
Conclusion : par double inégalité on a prouvé que $R(f) = R(f')$.

Si on pose maintenant $F(z) = \sum \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ alors $F'(z) = f(z)$ donc, grâce au raisonnement que l'on vient de faire, $R(F) = R(F') = R(f)$ (toujours avec les mêmes notations pour les séries) ■

[1] Dans le cas où $R(f)$ est fini, on a $\forall \varepsilon > 0$, $f'(z)$ converge pour $|z| \geqslant R(f) - \varepsilon$ en prenant $z_0 = R(f) - \varepsilon/2$ par exemple, donc par définition du rayon de convergence, $R(f') \geqslant R(f)$

Corollaire 7.7. Dérivation et intégration d'une série entière

Sur l'intervalle $]-R,+R[$ la fonction $f(t)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ est C^∞ et l'on a :

$$f^{(p)}(t)=\sum_{n\geqslant p} a_n \frac{n!}{(n-p)!}t^{n-p} \quad \text{et} \quad \int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n+1}t^{n+1}.$$

Dém :

- Montrons que f est dérivable (ici, on abandonne la notation $f(z)$ pour désigner la série). On utilise pour cela le théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions (cf. corollaire 5.59 page 337). On pose $f_n(t)=a_nt^n$ et $I=]-R,R[$.
  - Pour tout $t\in I$, $\sum f_n$ converge simplement,
  - Si $[a,b]\subset I$ alors $\sum f_n'$ converge uniformément sur $[a,b]$:
    En effet, si $c=\max(|a|,|b|)$ alors $|f_n'(t)|=n|a_n|.|t^{n-1}|\leqslant n|a_n|.c^{n-1}$ terme général d'une série convergente car $c<R$.

  Ce théorème s'applique à la série $\sum f_n$ sur $I=]-R,R[$ donc $f\in\mathcal{C}^1(I)$ et on peut dériver terme à terme :

$$f'(t)=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_nt^n\right)'=\sum_{n=1}^{+\infty}na_nt^{n-1}$$

- À partir de là, une simple récurrence permet de conclure que $f\in\mathcal{C}^p$ pour tout $p\in\mathbb{N}$ et que, pour tout $t\in]-R,R[$,

$$\begin{aligned} f^{(p)}(t)&=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\left(t^n\right)^{(p)}\\ &=\sum_{n=p}^{+\infty}a_n\frac{n!}{(n-p)!}t^{n-p}\end{aligned}$$

  (on a écarté les p premiers termes qui s'annulent).

- Pour la primitivation, on utilise le corollaire 5.57 page 336.
  - $\sum f_n$ est une série de fonctions continues sur $I=]-R,R[$,
  - $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de I (même démonstration que ci-dessus)

  donc on peut primitiver terme à terme et on a

$$\begin{aligned}\int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u&=\int_0^t\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_nu^n\right)\mathrm{d}u\\ &=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^t a_nu^n\,\mathrm{d}u\\ &=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\frac{t^{n+1}}{n+1}\ \blacksquare\end{aligned}$$

***Remarque* 7.1.6.**

(i) *Le rayon de convergence d'une série entière est invariant par intégration terme à terme et par dérivation terme à terme et, sur* $]-R, R[$, *on peut dériver terme à terme sans justification.*

(ii) *Pour tout entier* k, *on a* $a_k = \dfrac{1}{k!}\mathrm{D}^k f(0)$.
Dém : On a vu au théorème précédent que

$$\mathrm{D}^k f(t) = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n \frac{n!}{(n-k)!} t^{n-k}$$

donc, en prenant $t = 0$, *tous les termes de la somme s'annulent sauf le premier d'où* $\mathrm{D}^k f(0) = k! a_k$ ■

b) Fonctions développables en série entière

Définition 7.1.3. ***Fonction développable en série entière (D.S.E.)***
Soit f *une fonction définie sur un intervalle voisinage de 0, on dit que* f *est développable en série entière sur* $]-r, r[$ *(où* $r > 0$*) ssi*$_{\text{déf}}$

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \quad |t| < r.$$

Proposition 7.1.1. ***Unicité du D.S.E.***
Si une fonction f *admet un développement en série entière au voisinage de* 0, *il est unique.*

Dém : Deux méthodes ici pour faire cette démonstration, chacune étant formatrice.

- On utilise l'unicité du développement limité de f :
  En effet, pour tout n on a

$$f(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n + t^{n+1} \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} a_{n+k+1} t^k}_{=g_n(t)}.$$

  Si $|t| < R$ (rayon de convergence de la série donnant f) alors $a_k t^k \to 0$ donc, pour $t \neq 0$, $a_{n+k+1} t^k = \dfrac{a_{n+k+1} t^{n+k+1}}{t^{n+1}} \to 0$ (quand $k \to +\infty$) par conséquent, le rayon de convergence de la série de somme g_n est $\geqslant R$. On en déduit que g_n est continue en 0 et que $t^{n+1} g_n(t) = o(t^n)$. f admet donc un développement limité à tout ordre donné par $f(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n + o(t^n)$ (on savait déjà que f admettait un D.L. car f est de classe $\mathcal{C}^\infty$). Grâce à l'unicité du D.L. on conclut à l'unicité des coefficients a_n.

- Il y a plus simple ici, effectivement, on a vu que $a_k = \dfrac{1}{k!}\mathrm{D}^k f(0)$ ce qui permet d'affirmer immédiatement que les coefficients du D.S.E. de f sont uniques ■

Définition 7.1.4. ***Série de Taylor***
Soit f une fonction de classe C^∞, on appelle série de Taylor de f la série entière

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n.$$

***Remarque* 7.1.7.** *Une fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ peut ne pas être développable en série entière pour deux raisons :*

(*i*) *Sa série de Taylor peut converger mais sa somme peut être différente de f par exemple $f(t) = \mathrm{e}^{-1/t^2}$.*
Dém : C'est un grand classique du genre.

- *On prouve par récurrence sur n que $f^{(n)}(t) = R(t)f(t)$ où R est une fraction rationnelle en t.*
- *Par comparaison des fonctions puissance et exponentielle, on en déduit que $\lim\limits_{t\to 0} f^{(n)}(t) = 0$ donc, à l'aide du théorème du prolongement dérivable, f se prolonge en 0 en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $f^{(n)}(0) = 0$.*
- *La série de Taylor de f est donc la série nulle, de somme 0 et elle n'est pas égale à f (!)* ■

(*ii*) *Sa série de Taylor peut ne pas converger (hormis en 0), exemple la fonction de Stieltjès $S(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{1+ut}\,\mathrm{d}u$ dont la série de Taylor vaut $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n n! t^n$.*
Dém : Ici, on utilise le théorème de dérivation sous le signe intégral. Cf. question (iii) page 366 qui donne directement $S^{(n)}(t) = (-1)^n (n!)^2$. Le théorème 7.4 donne $R = 0$ comme rayon de convergence ■

c) Recherche de D.S.E., exemples
On utilise les mêmes méthodes que pour les développements limités mais les calculs peuvent être plus laborieux et il ne faut surtout pas oublier de préciser à chaque fois le rayon de convergence ! On peut aussi utiliser les équations différentielles ainsi que l'unicité de la solution vérifiant des conditions initiales données :

Exemple : Pour montrer que la fonction $(1+x)^\alpha$ admet un D.S.E., on prouve d'abord que c'est la seule solution de l'équation différentielle (E) $(1+x)y' - \alpha y = 0$ vérifiant la condition $f(0) = 1$; ensuite, on cherche les solutions de l'équation ci-dessus développables en série entière par analyse-synthèse :
Dém :

- Analyse : si $y = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est solution de (E) en supposant que le rayon de convergence de cette série R est > 0 alors on peut dériver terme à terme d'où la présentation

$$y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \qquad \times -\alpha$$

$$y' = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \qquad \times(1+x)$$

(on fait partir la deuxième somme de $n = 0$, cela permet de simplifier la discussion et, de toutes façons, on multiplie le terme en question par 0).
On trouve alors $(\alpha - n)a_n = (n+1)a_{n+1}$ en égalant les coefficients de x^n par unicité du D.S.E.
Au passage on vérifie alors que le rayon de convergence de la série obtenue vaut 1 si $\alpha \notin \mathbb{N}$ ($\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$).

- Synthèse : soit $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ définie sur $]-1, 1[$ [2]. On vérifie que g est solution de (E) (en dérivant terme à terme) et comme $g(0) = 1 = f(0)$ alors $g = f$ par unicité de la solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre avec condition initiale ■

***Remarque* 7.1.8.** *Les raisonnements semblables à celui que l'on vient de faire s'appliquent dans d'autres circonstances, il suffit que la fonction f dont on cherche le développement en série entière soit la seule solution d'une équation fonctionnelle.*

Pour les fractions rationnelles, décomposer la fraction rationnelle sur $\mathbb{C}$.
On a
$$\frac{1}{(x-a)^p} = \frac{(-1)^p}{a^p}\frac{1}{(1-\frac{x}{a})^p} = \frac{(-1)^p}{a^p}\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{-p}{n}\left(\frac{-x}{a}\right)^n, \ R = 1$$

Exemples de D.S.E.

$$\mathrm{e}^{tz} = 1 + tz + \frac{(tz)^2}{2} + \cdots + \frac{(tz)^n}{n!} + \cdots \qquad R = +\infty$$

on utilise la définition de l'exponentielle vu au chapitre 5

$$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + \cdots + (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \qquad R = +\infty$$
$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \cdots + (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} + \cdots \qquad R = +\infty$$

on utilise les relations $\cos t = \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{it})$ et $\sin t = \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{it})$

$$\mathrm{sh}\, t = t + \frac{t^3}{6} + \cdots + \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \qquad R = +\infty$$
$$\mathrm{ch}\, t = 1 + \frac{t^2}{2} + \cdots + \frac{t^{2n}}{(2n)!} + \cdots \qquad R = +\infty$$

$\mathrm{ch}\, t$ est la partie paire de e^t et $\mathrm{sh}\, t$ est la partie impaire

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \cdots + t^n + \cdots \qquad R = 1$$

[2] on rappelle que $\binom{\alpha}{n} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\ldots)(\alpha-n+1)}{n!}$ est le coefficient binomial généralisé

somme d'une série géométrique

$$(1+t)^\alpha = 1+\alpha t+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}t^2+\cdots+\frac{\alpha(\cdots)(\alpha-n+1)}{n!}t^n+\cdots \qquad R=1$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{n}t^n$$

on vient de le voir en exemple

$$\ln(1+t) = t-\frac{t^2}{2}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{t^n}{n}+\cdots \qquad R=1$$

on intègre $\dfrac{1}{1+t}$

$$\operatorname{Arctan} t = t-\frac{t^3}{3}+\cdots+(-1)^n\frac{t^{2n+1}}{2n+1}+\cdots \qquad R=1$$

on intègre $\dfrac{1}{1+t^2}$

$$\operatorname{Arcsin} t = t+\frac{t^3}{6}+\cdots+\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{t^{2n+1}}{2n+1}+\cdots \qquad R=1$$

on intègre $\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$

Questions :

(i) Chercher le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ avec

$$(a)\ a_n=\frac{\operatorname{sh} n}{\operatorname{ch}^2 n},\quad (b)\ a_n=\frac{n^n}{n!},\quad (c)\ a_n=\frac{1}{\sqrt{n}},\quad (d)\ a_n=\frac{\sin n\theta}{n!}$$

et calculer la somme de la dernière série.

(ii) Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty}(a+bn+cn^2)z^n = \dfrac{a}{1-z}+\dfrac{(b+c)z}{(1-z)^2}+\dfrac{2cz^2}{(1-z)^3}$.

(iii) Rayon de convergence et somme des séries $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{n^3}{n!}x^n$ et

$g(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^{2n}}{4n^2-1}$.

(iv) Chercher les développements en série entière des fonctions

$$(a)\ \frac{2x}{(1+x^2)^2}\quad (b)\ \ln(1+x+x^2)\quad (c)\ \frac{1}{1+x\sqrt{2}+x^2}$$
$$(d)\ \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\quad (e)\ \frac{1}{1-2x\operatorname{ch}\alpha+x^2}$$

(v) Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{2^{2n-1}}{(2n)!}$.

7.2 Séries de Fourier

On considère dans un premier temps des fonctions 2π-périodiques, le cas des fonctions de période T s'y ramène par changement de variable (voir à la fin).

7.2.1 Coefficients de Fourier

a) DÉFINITIONS

$\mathcal{CM}_{2\pi}$ désignera ici l'ensemble des fonctions continues par morceaux, 2π-périodiques, à valeurs complexes. Cet ensemble est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
À partir d'une fonction g continue par morceaux sur un intervalle I contenu dans un intervalle de longueur 2π, prolongeable en une fonction continue par morceaux sur l'adhérence de I, on peut définir une fonction f de $\mathcal{CM}_{2\pi}$ de la manière suivante :

- Si g est définie sur $[a, a+2\pi[$, on pose $f(x) = g(x + k2\pi)$ où $k = -\left[\dfrac{x-a}{2\pi}\right]$.
  Dém :
  - Si $x \in [a, a+2\pi[$ alors $\dfrac{x-a}{2\pi} \in [0,1[$, $k = 0$ donc $f(x) = g(x)$,
  - Soit $x' = x + 2\pi$, $k' = -\left[\dfrac{x'-a}{2\pi}\right]$. $\dfrac{x'-a}{2\pi} = \dfrac{x-a}{2\pi} + 1$ donc, comme la partie entière vérifie $[y+1] = [y] + 1$, on en déduit que $k' = k - 1$ d'où

  $$\begin{aligned} f(x') &= g(x' + k'2\pi) = g(x' - 2\pi + k2\pi) \\ &= g(x + k2\pi) = f(x) \end{aligned}$$

  donc f est bien 2π-périodique et prolonge g à $\mathbb{R}$. ■

- Si on cherche f paire coïncidant avec une fonction g définie sur $[0, \pi]$ alors on prolonge g par $\tilde{g}$ sur $[-\pi, \pi]$ avec $\tilde{g}(-x) = g(x)$ pour $x \in [0, \pi]$ et on procède comme ci-dessus pour définir f à partir de $\tilde{g}$.
  Dém : On a bien $\tilde{g}(-\pi) = \tilde{g}(\pi)$ donc on n'a pas de problème de périodicité avec $x = -\pi$. Ensuite on reprend ce qui a été fait ci-dessus avec $a = -\pi$ ■

- Si on cherche f impaire coïncidant avec une fonction g définie sur $]0, \pi[$ alors on prolonge g par $\tilde{g}$ sur $[-\pi, \pi]$ avec $\tilde{g}(-x) = -g(x)$ pour $x \in]0, \pi[$ et on pose $\tilde{g}(0) = \tilde{g}(\pi) = \tilde{g}(-\pi) = 0$.
  Dém : C'est la même chose ici toujours avec $a = -\pi$ ■

PROPOSITION 7.2.1. ***Intégrale sur une période d'une fonction périodique***
Si $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$, $\displaystyle\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout α réel.

Dém : On utilise le théorème de Chasles :

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\alpha}^{-\pi} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\pi}^{\alpha+2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t$$

on fait le changement de variable $u = t + 2\pi$ dans la première intégrale

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\alpha+2\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\pi}^{\alpha+2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\alpha+2\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\pi}^{\alpha+2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t \quad = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t \; \blacksquare
\end{aligned}
$$

Définition 7.2.1. ***Coefficients de Fourier***
Si $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$ alors on définit ses coefficients de Fourier par

$$\widehat{f}(n) = c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t.$$

On définit aussi les coefficients de Fourier sous forme de cosinus et de sinus ($n \geqslant 1$) :

$$
\begin{aligned}
a_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x, \\
b_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

***Remarque* 7.2.1.** *Pour $n = 0$ on ne définit pas $a_0(f)$, on utilise $c_0(f)$.*

Proposition 7.2.2. *Si $n \in \mathbb{N}^*$ alors on a les relations*

$$
\begin{aligned}
&a_n = c_n + c_{-n},\ \ b_n = ic_n - ic_{-n}, \\
&c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n),\ \ c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n).
\end{aligned}
$$

Dém : Avec les formules d'Euler : $\cos(nx) = \dfrac{\mathrm{e}^{inx} + \mathrm{e}^{-inx}}{2}$ et $\sin(nx) = \dfrac{\mathrm{e}^{inx} - \mathrm{e}^{-inx}}{2i}$ on obtient

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{\mathrm{e}^{inx} + \mathrm{e}^{-inx}}{2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{e}^{inx}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{e}^{-inx}\,\mathrm{d}x \\
&= c_n + c_{-n}.
\end{aligned}
$$

On fait de même avec b_n. Pour c_n et c_{-n} on utilise les formules $\mathrm{e}^{inx} = \cos(nx) + i\sin(nx)$ et $\mathrm{e}^{-inx} = \cos(nx) - i\sin(nx)$ $\blacksquare$

Définition 7.2.2. ***Somme partielle d'une série de Fourier***
Pour tout entier naturel p, on définit la somme partielle :

$$S_p(f)(x) = \sum_{n=-p}^{p} c_n(f)\,\mathrm{e}^{inx}.$$

***Remarque* 7.2.2.** *On a $S_p(f)(x) = c_0(f) + \sum\limits_{n=1}^{p}(a_n(f)\cos nx + b_n(f)\sin nx)$.*

Dém : Immédiat mais utile :

$$\begin{aligned} S_p(f)(x) &= c_0(f) + \sum_{n=1}^{p} c_n(f)\mathrm{e}^{inx} + c_{-n}(f)\mathrm{e}^{-inx} \\ &= c_0(f) + \sum_{n=1}^{p} \frac{a_n - ib_n}{2}(\cos nx + i\sin nx) + \frac{a_n + ib_n}{2}(\cos nx - i\sin nx) \\ &= c_0(f) + \sum_{n=1}^{p} (a_n(f)\cos nx + b_n(f)\sin nx) \end{aligned}$$

car $(a_n \pm ib_n)(\cos nx \mp i\sin nx) = a_n\cos nx + b_n\sin nx \pm i(a_n\sin nx - b_n\cos nx)$, les parties imaginaires se simplifient ■

DÉFINITION 7.2.3. ***Convergence et somme d'une série de Fourier***
Lorsque qu'en un point x de $\mathbb{R}$ les sommes partielles $S_p(f)$ convergent, la série de Fourier est dite convergente au point x et la somme de la série de Fourier est, par définition, la limite des sommes $S_p(f)(x)$ que l'on notera $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)\mathrm{e}^{inx}$.

***Remarque* 7.2.3.**

(*i*) *Il faut faire très attention ici au fait que la somme partielle d'une série de Fourier ne correspond pas à la somme partielle d'une série sauf si on l'écrit à l'aide des fonctions cosinus et sinus (cf. remarque 7.2.2).*

(*ii*) *Même chose pour la notion de convergence !*

b) Propriétés des coefficients de Fourier

THÉORÈME 7.8. L'application $\mathcal{F}$ qui à f associe $\widehat{f}$ est linéaire.
La suite $\widehat{f}$ est bornée et $\|\widehat{f}\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\,\mathrm{d}t = \|f\|_1$.
Enfin $\lim\limits_{n\to\pm\infty} \widehat{f}(n) = 0$ (c'est le **lemme de Lebesgue**).

Dém :

- $\mathcal{F}$ est linéaire par linéarité de l'intégrale.
- On a immédiatement

$$\left|\widehat{f}(n)\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

  donc la suite $(\widehat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ est bornée en norme infinie par $\|f\|_1$.
- Il reste à prouver que $\lim\limits_{|n|\to+\infty} \widehat{f}(n) = 0$.

– On prouve tout d'abord que c'est réalisé pour une fonction indicatrice d'un intervalle :
Si $f = 1_{[a,b]}$ alors

$$\begin{aligned}\widehat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1_{[a,b]}(t)\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_a^b \mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{-in2\pi}\left[\mathrm{e}^{-inb} - \mathrm{e}^{-ina}\right] \to 0\end{aligned}$$

car $\left|\mathrm{e}^{-inb} - \mathrm{e}^{-ina}\right| \leqslant 2$ (si $f = 1_{]]a,b]}$, $f = 1_{[a,b[}$ où $f = 1_{]a,b[}$, c'est la même démonstration).

– Pour une fonction en escalier : on utilise le fait qu'une fonction en escalier est combinaison linéaire (finie) de fonctions indicatrices d'intervalles I_k :
$f = \sum\limits_{k=1}^{l} \lambda_k 1_{I_k}$ d'où

$$\widehat{f}(n) = \sum_{k=1}^{l} \lambda_k \widehat{1}_{I_k}(n) \to 0$$

car chaque terme tend vers 0.

– Par passage à la limite uniforme, on en déduit le résultat pour une fonction continue par morceaux :
En effet, on sait qu'une fonction continue par morceaux est limite uniforme de fonctions en escalier (cf. théorème 5.61 page 339).
Soit $\varepsilon > 0$ alors il existe φ fonction en escalier telle que $\|f - \varphi\|_\infty \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Puis, comme $\widehat{\varphi}(n) \to 0$ quand $|n| \to +\infty$ alors il existe N tel que $|n| \geqslant N \Rightarrow |\widehat{\varphi}(n)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.
On a alors, pour tout $|n| \geqslant N$

$$\begin{aligned}|\widehat{f}(n)| &\leqslant |\widehat{f}(n) - \widehat{\varphi}(n)| + |\widehat{\varphi}(n)| \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi}(f(t) - \varphi(t))\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t\right| + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t) - \varphi(t)|\,\mathrm{d}t + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leqslant \varepsilon\end{aligned}$$

donc $\lim\limits_{|n| \to +\infty} \widehat{f}(n) = 0$.

On remarque que cette démonstration reste valable si on remplace n par λ_n suite de réels tendant vers $+\infty$ ■

Proposition 7.2.3. ***Relations entre coefficients de Fourier***

(i) *Coefficient de $\bar{f}$: $c_n(\bar{f}) = \overline{c_{-n}(f)}$ et si f est réelle $c_n(f) = \overline{c_{-n}(f)}$.*

(ii) *Coefficient de $g : t \mapsto f(-t)$: $c_n(g) = c_{-n}(f)$.*
Si f est paire alors $c_n(f) = c_{-n}(f)$, si f est impaire $c_{-n}(f) = -c_n(f)$.

(iii) *Coefficient de $g : t \mapsto f(t + a)$: $c_n(g) = \mathrm{e}^{ina} c_n(f)$.*

Dém : Simples relations de calcul intégral.

(*i*) Coefficient de $\bar{f}$:

$$\begin{aligned} c_n(\bar{f}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\bar{f}(t)\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{f(t)\mathrm{e}^{int}}\,\mathrm{d}t \\ &= \overline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t} = \overline{c_{-n}(f)} \end{aligned}$$

et si f est réelle $c_n(f) = c_n(\bar{f}) = \overline{c_{-n}(f)}$.

(*ii*) Coefficient de $g : t \mapsto f(-t)$:

$$c_n(g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(-t)\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u)\mathrm{e}^{inu}\,\mathrm{d}u$$

en faisant le changement de variable $u = -t$

$$= c_{-n}(f)$$

Si f est paire alors $c_n(f) = c_n(g) = c_{-n}(f)$, si f est impaire $c_n(g) = -c_n(f) = c_{-n}(f)$.

(*iii*) Coefficient de $g : t \mapsto f(t+a)$:

$$c_n(g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t+a)\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+a}^{\pi+a}f(u)\mathrm{e}^{-in(u-a)}\,\mathrm{d}u$$

en faisant le changement de variable $u = t + a$

$$= \mathrm{e}^{ina}c_n(f)$$

car l'intégrale d'une fonction 2π-périodique sur une période ne dépend pas des bornes ■

***Remarque* 7.2.4.**

(*i*) *Si f est paire et réelle alors $c_n(f) \in \mathbb{R}$ et on peut avoir intérêt à rechercher les coefficients $a_n(f)$ et $c_0(f)$ (les $b_n(f)$ sont tous nuls).*
Dém : On combine le (i) et le (ii) de la proposition ci-dessus, $c_n(f) = \overline{c_{-n}(f)}$ (i) et $g = f$ (ii) $c_n(f) = c_{-n}(f)$ donc $c_n(f) = \overline{c_n(f)}$ i.e. $c_n(f) \in \mathbb{R}$ ■

(*ii*) *Si f est impaire et réelle alors $c_n(f) \in i\mathbb{R}$ et on peut avoir intérêt à rechercher les coefficients $b_n(f)$ (les $a_n(f)$ sont tous nuls).*
Dém : Même chose ■

Définition 7.2.4. ***Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux***
Une fonction f à valeurs dans $\mathbb{C}$ est dite de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur $[a, b]$, où $1 \leqslant k \leqslant +\infty$, s'il existe une subdivision $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ de $[a, b]$ telle que, pour tout i, $f_{|]a_i,a_{i+1}[}$ soit prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ sur $[a_i, a_{i+1}]$.
f est $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur I intervalle ssi$_{\text{déf}}$ pour tout segment $J \subset I$, $f_{|J}$ est $\mathcal{C}^k$ par morceaux.

***Remarque* 7.2.5.**

(i) *Pour que f soit de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux, il suffit que les $f^{(j)}$, $j \in [\![0, k]\!]$, admettent une limite à droite et à gauche des points a_i (à droite si $a_0 = a$ et à gauche si $a_n = b$) et le théorème du prolongement dérivable fera le reste.*
Dém : Posons $f_i = f_{|]a_i,a_{i+1}[}$ et montrons que f_i se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ sur $[a_i, a_{i+1}]$: on procède par récurrence (finie si $k < +\infty$) sur $j \leqslant k$.

- *$j = 0$ est immédiat, on note $\tilde{f}_i$ le prolongement continu de f_i à $[a_i, a_{i+1}]$.*
- *$j = 1$: f_i' admet une limite en a_i et en a_{i+1} donc le théorème du prolongement dérivable s'applique, $\tilde{f}_i$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a_i, a_{i+1}]$.*
- *On suppose la propriété vraie à l'ordre $j \leqslant k - 1$. On applique alors le raisonnement fait pour $j = 1$ à la fonction $\tilde{f}_i^{(j)}$ qui est alors de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a_i, a_{i+1}]$. $\tilde{f}_i$ est par conséquent de classe $\mathcal{C}^{j+1}$ sur $[a_i, a_{i+1}]$.*

Conclusion : f_i se prolonge bien en une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ sur $[a_i, a_{i+1}]$ et ceci pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$ ■

(ii) *Si f est de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur $[a, b]$ alors les dérivées successives de f sont définies sur $[a, b]$ privé d'une partie finie.*

(iii) *Si f est définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique alors on dit que f est de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ si la restriction de f à $[0, 2\pi]$ est de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux.*

(iv) *Les fonctions qui nous intéresseront dans les séries de Fourier seront les fonctions 2π-périodiques de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.*

(v) *On peut définir l'intégrale de la dérivée d'une fonction f continue, $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur I intervalle par $\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = f(b) - f(a)$, pour tout $[a, b] \subset I$. f' n'est pas définie partout.*
Dém : Soient $a_0 = a < a_1 < \ldots < a_n = b$ une subdivision attachée à la fonction f continue, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Par hypothèse, f' admet une limite à droite et (ou) à gauche aux points a_i pour $i \in [\![0, n]\!]$. On pose alors

$$\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{]a_i,a_{i+1}[} f'.$$

Or f' est intégrable sur $]a_i, a_{i+1}[$ (c'est une fonction continue qui admet une limite à droite en a_i et une limite à gauche en a_{i+1}) et, pour $(x, y) \in]a_i, a_{i+1}[^2$, $\int_x^y f'(t)\,\mathrm{d}t = f(y) - f(x)$ grâce au théorème fondamental du calcul différentiel. On sait alors que $\int_{]a_i,a_{i+1}[} f' = f(a_{i+1}) - f(a_i)$ donc, avec la définition que l'on a prise

$$\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n-1} f(a_{i+1}) - f(a_i) = f(b) - f(a).$$

On a même mieux, pour tout $x \in [a, b]$, $\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t = f(x) - f(a)$ ce qui généralise le théorème fondamental du calcul différentiel.
Tout ceci se fait un peu "à la sauvette" mais c'est une volonté du programme de ne traiter les définitions qu'au moment où elles sont nécessaires ■

THÉORÈME 7.9. Intégration par parties
Si u et v sont continues, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ alors pour tout couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\displaystyle\int_a^b u\,\mathrm{d}v = [uv]_a^b - \int_a^b v\,\mathrm{d}u$.

Dém : On prend une subdivision de $[a,b]$ $a_0 = a < a_1 < \ldots < a_n = b$. On écrit que $\int_a^b u\,\mathrm{d}v = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} u\,\mathrm{d}v$ et on utilise la formule d'intégration par parties sur chaque intervalle (les fonctions se prolongent en des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$) puis on remarque que la continuité des applications u et v permet de simplifier les parties toutes intégrées :

$$\begin{aligned}
\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \Big[u(t)v(t)\Big]_{a_i}^{a_{i+1}} - \int_{a_i}^{a_{i+1}} u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} [u(a_{i+1})v(a_{i+1}) - u(a_i)v(a_i)] - \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t \\
&= u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t \ \blacksquare
\end{aligned}$$

PROPOSITION 7.2.4. ***Coefficients de Fourier et dérivée***
Si f est 2π-périodique continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors

$$c_n(\mathrm{D}\, f) = in\, c_n(f).$$

Si f est 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors $c_n(\mathrm{D}^k\, f) = (in)^k c_n(f)$, $c_n(f)$ est négligeable devant n^{-k} au voisinage de $+\infty$.

Dém :

- On utilise le théorème d'intégration par parties que l'on vient de démontrer :
$$\begin{aligned}
c_n(f') &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\Big[f(t)\mathrm{e}^{-int}\Big]_{-\pi}^{\pi} - \frac{(-in)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t \\
&= inc_n(f)
\end{aligned}$$
car f est 2π-périodique donc $\Big[f(t)\mathrm{e}^{-int}\Big]_{-\pi}^{\pi} = 0$.
- $c_n(\mathrm{D}^k\, f) = (in)^k c_n(f)$ s'obtient alors par une récurrence simple.
- Le lemme de Lebesgue s'applique à la fonction $f^{(k)}$:
En effet, $f^{(k)}$ n'est pas définie partout mais on peut la prolonger aux points de discontinuité et obtenir $\tilde{f}^{(k)}$ une fonction continue par morceaux qui admet la même intégrale que $f^{(k)}$.
Par conséquent on a $c_n(\mathrm{D}^k\, f) = o(1)$ et $c_n(f) = o\left(\dfrac{1}{n^k}\right)$ (résultat à bien retenir) $\blacksquare$

Exemples de séries de Fourier :

(*i*) **Fonction créneau** : f impaire, 2π-périodique et $f(x) = 1$ si $x \in]0, \pi[$ alors ses coefficients de Fourier s'écrivent :

$$a_n(f) = 0,\ b_{2p}(f) = 0,\ b_{2p+1}(f) = \frac{4}{\pi(2p+1)},$$

Dém : Comme f est impaire réelle (et 2π-périodique) alors $a_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $c_0(f) = 0$. Il reste à calculer les $b_n(f)$.

$$\begin{aligned} b_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin nt\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{2}{n\pi}\Big[\cos nt\Big]_0^{\pi} = -\frac{2}{n\pi}\Big[(-1)^n - 1\Big] \end{aligned}$$

donc $b_{2p}(f) = 0$ et $b_{2p+1}(f) = \dfrac{4}{(2p+1)\pi}$ ■

(*ii*) f paire, 2π-périodique et $f(x) = x$ si $x \in [0, \pi]$ (en fait f est une primitive de la fonction créneau), ses coefficients de Fourier s'écrivent :

$$b_n(f) = 0,\ c_0(f) = \frac{\pi}{2},\ a_{2p}(f) = 0,\ a_{2p+1}(f) = -\frac{4}{\pi(2p+1)^2}.$$

Dém : Dans le cas qui nous intéresse ici, $b_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On utilise la parité de f pour se ramener à une intégrale sur $[0, \pi]$.

$$\begin{aligned} c_0(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\pi}{2} \\ a_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos nt\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

et on fait une intégration par parties

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{n\pi}\Big[t\sin nt\Big]_0^{\pi} - \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin nt\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{n^2\pi}\Big[\cos nt\Big]_0^{\pi} = \frac{2}{n^2\pi}\Big[(-1)^n - 1\Big] \end{aligned}$$

d'où $a_{2p}(f) = 0$ et $a_{2p+1}(f) = -\dfrac{4}{(2p+1)^2\pi}$ ■

(*iii*) $f(t) = \mathrm{e}^{i\alpha t}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ sur $]-\pi, +\pi]$ et on suppose que f est 2π-périodique, alors ses coefficients de Fourier sont :

$$\widehat{f}(n) = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\frac{(-1)^n}{\alpha - n}$$

ce qui permet d'avoir les coefficients de Fourier (dans les mêmes conditions) pour $\sin\alpha t$ et pour $\cos\alpha t$: respectivement

$$b_n(\sin\alpha t) = (-1)^n\frac{2n\sin\alpha\pi}{\pi(\alpha^2 - n^2)},\quad a_n(\cos\alpha t) = (-1)^n\frac{2\alpha\sin\alpha\pi}{\pi(\alpha^2 - n^2)}.$$

Dém : Là le calcul est très simple :

$$
\begin{aligned}
c_n(f) = \widehat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{i\alpha t}\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{i(\alpha-n)t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{-i}{2\pi(\alpha-n)}\Big[\mathrm{e}^{i(\alpha-n)t}\Big]_{-\pi}^{\pi} = \frac{-i}{2\pi(\alpha-n)}\Big[\mathrm{e}^{i(\alpha-n)\pi} - \mathrm{e}^{-i(\alpha-n)\pi}\Big] \\
&= \frac{2}{2\pi(\alpha-n)}\sin[(\alpha-n)\pi] = (-1)^n\frac{\sin\alpha\pi}{\pi(\alpha-n)}
\end{aligned}
$$

car $\sin(a-n\pi) = (-1)^n\sin a$.
On utilise alors les formules $a_n(f) = c_n(f)+c_{-n}(f)$ et $b_n(f) = i[c_n(f)-c_{-n}(f)]$ et le fait que $(-1)^{-n} = (-1)^n$ d'où

$$
\begin{aligned}
a_n(f) &= (-1)^n\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\left[\frac{1}{\alpha-n}+\frac{1}{\alpha+n}\right] \\
&= (-1)^n\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\frac{2\alpha}{\alpha^2-n^2} \\
b_n(f) &= i(-1)^n\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\left[\frac{1}{\alpha-n}-\frac{1}{\alpha+n}\right] \\
&= i(-1)^n\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\frac{2n}{\alpha^2-n^2}.
\end{aligned}
$$

On en déduit alors les expressions annoncées en prenant les parties réelles et imaginaires ■

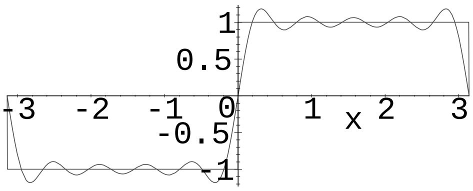

Figure 7.1: Série de Fourier de la fonction créneau

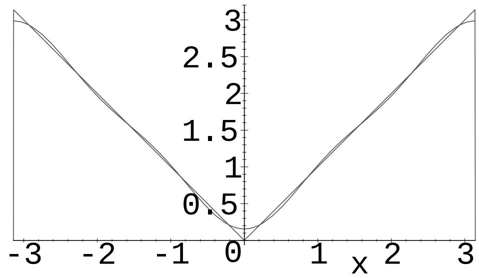

Figure 7.2: Série de Fourier d'une de ses primitives

Questions :

(i) Chercher les coefficients de Fourier de la fonction $f(t) = \operatorname{sh} t$ sur $]-\pi,\pi[$.

(ii) Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$. On pose $g(t) = f(r\mathrm{e}^{it})$, $0 < r < R$. Calculer $\widehat{g}(n)$.

7.2.2 Convergence en moyenne quadratique

On rappelle que

(i) $(f,g) \mapsto (f|g) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\bar{f}(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}_{2\pi}$ espace vectoriel des fonctions 2π-périodiques continues sur $\mathbb{R}$.

(ii) La norme associée est notée $\|f\|_2 = \left(\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t\right)^{1/2}$.

(iii) La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ où $e_n(t) = \mathrm{e}^{int}$ est une famille orthonormale et, pour tout n, $c_n(f) = (e_n|f)$.

THÉORÈME 7.10. **Projection orthogonale sur $\mathcal{P}_p$**
La projection orthogonale d'un élément f de $\mathcal{C}_{2\pi}$ sur le sous-espace vectoriel $\mathcal{P}_p$ engendré par les e_n, où $|n| \leqslant p$, est la somme partielle $S_p(f)$.
Cette projection vérifie la relation

$$\|f\|_2{}^2 = \|S_p(f)\|_2{}^2 + \mathrm{d}(f,\mathcal{P}_p)^2 = \|S_p(f)\|_2{}^2 + \|f - S_p(f)\|_2{}^2.$$

En particulier, l'application qui à tout élément P de $\mathcal{P}_p$ associe $\|f - P\|_2$ atteint son minimum en un point et un seul, à savoir $S_p(f)$.

Dém : On utilise ici le théorème 4.15 page 253 en prenant pour espace F l'ensemble $\mathcal{P}_p$. Dans ce cas, la projection orthogonale s'écrit

$$P_F(f) = \sum_{n=-p}^{p} (e_n|f)e_n$$

or $(e_n|f) = \widehat{f}(n)$ donc $p_F(f) = S_p(f)$. La proposition qui suit ce théorème nous dit alors que $\|f\|_2^2 = \|S_p(f)\|_2^2 + \|f - S_p(f)\|_2^2$ ■

COROLLAIRE 7.11. **Inégalité de Bessel**
Les séries $\sum |c_n(f)|^2$ et $\sum |c_{-n}(f)|^2$ sont convergentes et on a l'inégalité de Bessel :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n(f)|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} |c_{-n}(f)|^2 \leqslant \|f\|_2{}^2.$$

Ceci est en fait aussi valable si $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$.

Dém : Là aussi, ce corollaire est la traduction du théorème 4.15 page 253 et de la proposition 4.3.3 page 253 :

- Soit $J_p = [-p,p]$, $\sum_{n\in J_p} |c_n(f)|^2 \leqslant \|f\|_2{}^2$ donc $\sum |c_n(f)|^2$ et $\sum |c_{-n}(f)|^2$ sont majorées par $\|f\|_2^2$ par conséquent ces deux séries convergent.
- De plus on a

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n(f)|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} |c_{-n}(f)|^2 &= \lim_{p\to+\infty} \sum_{n\in J_p} |c_n(f)^2 \\ &\leqslant \|f\|_2{}^2.\end{aligned}$$

- Maintenant un problème de conscience se pose. En effet le programme ne prévoit rien ici pour gérer l'inégalité de Bessel dans le cas de fonctions continues par morceaux. On va procéder comme ce qui suit :

- Si $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$ alors on définit f_1 par $f_1(x) = \dfrac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)]$. Si f est continue en x alors $f_1(x) = f(x)$ donc f et f_1 ne diffèrent que par un nombre fini de valeurs. Leurs intégrales sont donc égales.
- On note (pour la circonstance) $\mathcal{D}_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions f de $\mathcal{CM}_{2\pi}$ telles que $f = f_1$.

  Alors $\mathcal{D}_{2\pi}$ muni du produit scalaire $(f|g) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ est un espace préhilbertien complexe.

  En effet, les propriétés de linéarité et de symétrie sont les mêmes que sur $\mathcal{C}_{2\pi}$, il reste à prouver que, si $\|f\|_2^2 = 0$ alors $f = 0$.

  Par contraposée, si $f \neq 0$ alors il existe $x \in [-\pi, \pi]$ tel que $f(x) \neq 0$ donc $|f(x)|^2 > 0$. On a ainsi $f(x^+)$ ou $f(x^-) \neq 0$, par conséquent il existe un voisinage V_x (à droite ou à gauche de x) tel que $|f(y)|^2 > 0$ pour $y \in V_y$.

  Donc $\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t > 0$ ce qui achève cette démonstration.

  On peut alors appliquer aux fonctions de $\mathcal{D}_{2\pi}$ ce qu'on a fait sur $\mathcal{C}_{2\pi}$ et obtenir exactement les mêmes conclusions ■

THÉORÈME 7.12. **Convergence en moyenne quadratique**
Pour tout élément f de $\mathcal{C}_{2\pi}$, les sommes partielles $S_n(f)$ convergent en moyenne quadratique vers f i.e. dans $(\mathcal{C}_{2\pi}, \|.\|_2)$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(f) = f$.

Dém : On sait qu'on peut approcher uniformément f par des polynômes trigonométriques P. On utilise alors l'inégalité $\|f\|_2 \leqslant \|f\|_\infty$:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists P \in \mathcal{P} \mid \|f - P\|_2 \leqslant \|f - P\|_\infty \leqslant \varepsilon.$$

Comme P est un polynôme trigonométrique alors $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $P \in \mathcal{P}_N$. Donc, pour $n \geqslant N$, $P \in \mathcal{P}_n$ et on sait que $\|f - S_n(f)\|_2 \leqslant \|f - P\|_2 \leqslant \varepsilon$ (cf. théorème 7.10). Ceci se traduit par $S_n(f) \to f$ pour $\|.\|_2$ ■

COROLLAIRE 7.13. **Formule de Parseval**
Pour tout élément f de $\mathcal{C}_{2\pi}$ on a la formule de Parseval

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \|f\|_2{}^2$$

qui donne, par polarisation :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{c_n(f)}c_n(g) = (f|g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dém : On utilise (comme pour tout corollaire qui se respecte) le théorème précédent :

$$\begin{aligned} \|f\|_2^2 &= \sum_{n=-p}^{p} |c_n(f)|^2 + \underbrace{\|f - S_p(f)\|_2^2}_{\to 0} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 \end{aligned}$$

en prenant la limite quand $p \to +\infty$.

Soit $\ell^2(\mathbb{Z}) = \{(c_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mid \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 < +\infty\}$, comme pour $\ell^2(\mathbb{N})$, on définit le produit scalaire

$$(c|d) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{c}_n d_n.$$

L'égalité de Parseval se traduit alors de la manière suivante : $\|c(f)\|^2 = \|f\|_2^2$ où $c(f) = (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$. Par polarisation on obtient

$$\begin{aligned}(c(f)|c(g))_{\ell^2(\mathbb{Z})} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{c_n(f)} c_n(g) \\ &= (f|g)_{\mathcal{C}_{2\pi}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(t)g(t)\,\mathrm{d}t \ \blacksquare\end{aligned}$$

Corollaire 7.14. L'application linéaire $f \mapsto \widehat{f}$ de $\mathcal{C}_{2\pi}$ dans $\ell^2(\mathbb{Z})$ conserve le produit scalaire ; elle est injective.

Dém : On vient de voir que $(\widehat{f}|\widehat{g}) = (f|g)$ ce qui traduit exactement la première propriété. L'injectivité s'en déduit immédiatement :
Si $\widehat{f} = 0$ alors $\|\widehat{f}\|_{\ell^2(\mathbb{Z})} = \|f\|_{\mathcal{C}_{2\pi}} = 0$ donc $f = 0$ $\blacksquare$

***Remarque* 7.2.6.**

(i) *On a donc, pour une fonction de $\mathcal{C}_{2\pi}$,*

$$f = 0 \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{Z},\ \widehat{f}(n) = 0).$$

Dém : C'est une traduction du dernier corollaire mais ça ne marche pas pour les fonctions continues par morceaux $\blacksquare$

(ii) *Lorsqu'on développe f en série de cosinus et de sinus, on peut réécrire la formule de Parseval sous la forme*

$$\|f\|_2{}^2 = |c_0(f)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2)$$

Dém : On reprend le résultat $\|f\|_2^2 = \lim_{p\to+\infty} \|S_p(f)\|^2$ mais cette fois, on écrit la somme partielle sous la forme $S_p(f) = c_0(f) + \sum_{n=1}^{p} a_n(f)c_n + b_n(f)s_n$ en posant $c_n(t) = \cos(nt)$ et $s_n(t) = \sin(nt)$. La famille (c_n, s_n) est orthogonale et $\|c_n\|_2^2 = \|s_n\|_2^2 = \dfrac{1}{2}$ d'où

$$\|S_p(f)\|_2^2 = |c_0(f)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{p}(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2)$$

et on obtient la formule annoncée en passant à la limite $\blacksquare$

(iii) *La quasi-totalité de ce qu'on vient de voir s'étend au cas des fonctions de $\mathcal{CM}_{2\pi}$ ensemble des fonctions continues par morceaux, 2π-périodiques, notamment la projection $S_p(f)$, l'égalité de Parseval et la convergence en moyenne quadratique. Seule l'injectivité de $f \mapsto \widehat{f}$ ne se conserve pas.*
Dém : Là on sort du programme ( ) et je donne une idée de la démonstration :

- *Pour tout $\varepsilon > 0$, on approche $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$ par une fonction f_ε de $\mathcal{C}_{2\pi}$ telle que $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - f_\varepsilon(t)|^2 \,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon/2$ que l'on note aussi mais abusivement $\|f - f_\varepsilon\|_2^2$ (prendre une fonction égale à f sauf sur de petits intervalles entourant les discontinuités de f où f_ε sera affine par morceaux).*
- *On approche alors f_ε élément de $\mathcal{C}_{2\pi}$ par un polynôme trigonométrique P_ε tel que $\|f_\varepsilon - P_\varepsilon\|_2 \leqslant \varepsilon/2$ et, en utilisant l'inégalité de Minkowski, on obtient $\|f - P_\varepsilon\|_2 \leqslant \|f - f_\varepsilon\|_2 + \|f_\varepsilon - P_\varepsilon\|_2 \leqslant \varepsilon$.*

On peut alors reprendre ce qui a été fait et si on prend des fonctions dans $\mathcal{D}_{2\pi}$, on conserve même l'injectivité ■

Question : Calculer les coefficients de Fourier de la fonction f paire définie par $f(x) = x$ sur $[0, \pi]$. En déduire la somme $\sum\limits_{p=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2p+1)^4}$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^4}$.

7.2.3 Convergence ponctuelle

Une propriété simple et efficace :

Proposition 7.2.5. *Si $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ et si les séries $\sum |\widehat{f}(n))|$, $\sum |\widehat{f}(-n))|$ sont convergentes alors*

$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} \widehat{f}(n) e_n + \sum_{n=1}^{+\infty} \widehat{f}(-n) e_{-n}$$

où $e_n(t) = \mathrm{e}^{int}$ et la convergence de chacune des séries est normale.

Dém :

- $|\widehat{f}(n)\mathrm{e}^{inx}| = |\widehat{f}(n)|$ et $|\widehat{f}(-n)\mathrm{e}^{-inx}| = |\widehat{f}(-n)|$ or, par hypothèse, $\sum |\widehat{f}(n)|$, $\sum |\widehat{f}(-n)|$ sont convergentes donc les séries $\sum \widehat{f}(n)\mathrm{e}^{inx}$ et $\sum \widehat{f}(-n)\mathrm{e}^{-inx}$ sont absolument convergentes.
- On peut donc poser $g = \sum_{n=0}^{+\infty} \widehat{f}(n) e_n + \sum_{n=1}^{+\infty} \widehat{f}(-n) e_{-n}$. Cette fonction est bien définie car, pour tout x, on a une somme de séries convergentes.
- Il y a convergence normale des séries $\sum \widehat{f}(n) e_n$ et $\sum \widehat{f}(-n) e_{-n}$ grâce à la première majoration et donc $g \in \mathcal{C}_{2\pi}$ en tant que somme d'une série normalement convergente de fonctions continues 2π-périodiques.
- On vérifie alors, par interversion somme et intégrale, que $\widehat{f}(k) = \widehat{g}(k)$: prenons par exemple $k \in \mathbb{N}$ alors

$$\begin{aligned}
\widehat{g}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\mathrm{e}^{-ikt}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \widehat{f}(n)\mathrm{e}^{i(n-k)t}\right)\mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \widehat{f}(-n)\mathrm{e}^{-i(n+k)t}\right)\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \widehat{f}(n)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{i(n-k)t}\,\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{+\infty} \widehat{f}(-n)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-i(n+k)t}\,\mathrm{d}t \\
&= \widehat{f}(k)
\end{aligned}$$

car $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{i(n-k)t}\,\mathrm{d}t = \delta_{n,k}$ (symbole de Kronecker) et $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-i(n+k)t}\,\mathrm{d}t = 0$. On fait de même si $k < 0$.

- On en déduit alors que $f = g$ vu le corollaire 7.14 ■

THÉORÈME 7.15. **Convergence normale d'une série de Fourier**
Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

- les séries $\sum |\widehat{f}(n))|$, $\sum |\widehat{f}(-n))|$ sont convergentes.
- La série $S(f) = c_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f)\cos nt + b_n(f)\sin nt$ converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$.
- En particulier, pour tout nombre réel t, la série de Fourier de f converge en ce point, et sa somme est égale à $f(t)$ ce que l'on peut écrire

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n)\mathrm{e}^{int} = c_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f)\cos nt + b_n(f)\sin nt$$

Dém :

- On sait que $\widehat{f'}(p) = ip\widehat{f}(p)$ (cf. proposition 7.2.4 page 401).
- On utilise ensuite l'inégalité classique : $ab \leqslant \dfrac{1}{2}(a^2+b^2)$ qui donne, pour $p \neq 0$,

$$|\widehat{f}(p)| = \frac{1}{|p|}\widehat{f'}(p) \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p^2} + |\widehat{f'}(p)|^2\right),$$

  $\sum |\widehat{f}(p)|$ converge car $\sum 1/p^2$ et $\sum |\widehat{f'}(p)|^2$ convergent. Il en est de même pour la série $\sum \widehat{f}(-p)$.

- On a donc convergence normale de la série de Fourier de f.
- On applique alors la proposition précédente ■

THÉORÈME 7.16. **Théorème de Dirichlet**
Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$ de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.
Pour tout nombre réel t, la série de Fourier de f converge en ce point et on a

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n)\mathrm{e}^{int} = \frac{1}{2}\lim_{h\to 0, h\neq 0}\big[f(t+h) + f(t-h)\big].$$

En particulier, en tout point t où f est continue, la somme de la série de Fourier de f est égale à $f(t)$.

Dém : (Non exigible)

- On sait que

$$\sum_{p=-n}^{n} \mathrm{e}^{ipx} = \frac{\sin(n+1/2)x}{2\sin x/2}$$

cf. question (i) page 16.

- On montre alors la formule de Dirichlet ; en posant $D_n(u) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{\pi \sin\frac{u}{2}}$ **noyau de Dirichlet** en deux temps (ici α est un paramètre que l'on choisira après) :

$$\begin{aligned}
S_n(f)(t) &= \sum_{p=-n}^{n} \widehat{f}(p)\mathrm{e}^{ipt} \\
&= \sum_{p=-n}^{n} \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi+\alpha}^{\pi+\alpha} f(u)\mathrm{e}^{-ipu}\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{e}^{ipt} \\
&= \int_{-\pi+\alpha}^{\pi+\alpha} \frac{1}{2\pi} f(u)\underbrace{\Big(\sum_{p=-n}^{n} \mathrm{e}^{ip(t-u)}\Big)}_{=\pi D_n(t-u)}\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\pi+\alpha}^{\pi+\alpha} f(u)D_n(t-u)\,\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

On prend alors $\alpha = t$ et on partage l'intégrale en deux et on utilise la parité de D_n :

$$\begin{aligned}
S_n(f)(t) &= \frac{1}{2}\int_{t-\pi}^{t+\pi} f(u)D_n(t-u)\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2}\int_{t-\pi}^{t} f(u)D_n(t-u)\,\mathrm{d}u + \frac{1}{2}\int_{t}^{t+\pi} f(u)D_n(t-u)\,\mathrm{d}u \\
&= \int_{0}^{\pi} \frac{1}{2}[f(t+v)+f(t-v)]D_n(v)\,\mathrm{d}v
\end{aligned}$$

en faisant les changements de variables $v = t-u$ et $v = u-t$ respectifs dans chacune des 2 intégrales (D_n est paire).

- On remarque que $\int_0^\pi D_n(v)\,\mathrm{d}v = 1$ soit en revenant à l'écriture de D_n à l'aide des exponentielles complexes soit en prenant $f = 1$ dans la formule que l'on vient d'établir ($S_n(1) = 1$).

  En utilisant ceci avec $y = [f(t^+)+f(t^-)]/2$, on a

$$S_n(f)(t)-y = \int_0^\pi uD_n(u)\varphi(u)\,\mathrm{d}u \text{ où } \varphi(u) = \frac{1}{h}[f(t+u)+f(t-u)-f(t^+)-f(t^-)].$$

  Montrons que φ est une fonction continue par morceaux sur $]0,\pi]$ qui se prolonge par continuité en 0 :
  On réécrit φ sous la forme

$$\varphi(u) = \frac{f(t+u)-f(t^+)}{u} + \frac{f(t-u)-f(t^-)}{u}.$$

φ est continue par morceaux sur $]0,\pi]$ en tant que rapport de fonctions continues par morceaux. Montrons que φ se prolonge par continuité en 0 :
Il existe $\eta > 0$ tel que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]t-\eta,t[$ et $]t,t+\eta[$. On note $f_- = f_{|]t-\eta,t[}$, $f_+ = f_{|]t,t+\eta[}$, $\tilde{f}_-$ et $\tilde{f}_+$ leur prolongement $\mathcal{C}^1$ aux intervalles $[t-\eta,t]$, $[t,t+\eta]$.

$$\frac{f(t+u)-f(t^+)}{u} = \frac{\tilde{f}_+(t+u)-\tilde{f}_+(t)}{u} \to \tilde{f}'_+(t) = f'(t^+),$$
$$\frac{f(t-u)-f(t^+)}{u} = \frac{\tilde{f}_-(t-u)-\tilde{f}_-(t)}{u} \to -\tilde{f}'_-(t) = -f'(t^-)$$

donc $\lim\limits_{u\to 0}\varphi(u) = f'(t^+) - f'(t^-)$.

- $uD_n(u)$ s'écrit $\sin(n+1/2)u\psi(u)$ où $\psi(u) = \dfrac{1}{\pi}\varphi(u)\dfrac{u}{\sin(u/2)}$.
  $\theta\ : u \mapsto \dfrac{u}{\sin(u/2)}$ est continue sur $\mathbb{R}$, on peut démontrer ce résultat
  - soit en étudiant la limite de la dérivée en 0 et en utilisant le théorème du prolongement dérivable,
  - soit en écrivant le D.S.E. de $\dfrac{\sin(u/2)}{u} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n u^{2n}}{2^{2n+1}(2n+1)!}$ ce qui prouve que cette fonction est C^∞ au voisinage de 0 et comme son inverse θ ne s'annule pas sur $]0,\pi]$ et qu'il a une limite en 0 non nulle alors θ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

  En tous cas, φ est une fonction continue par morceaux donc on peut lui appliquer le lemme de Lebesgue.

Conclusion : $S_n(f)(t) - y \to 0$ i.e. $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(n)e^{int} = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{h\to 0, h\neq 0}\big[f(t+h)+f(t-h)\big]$ ■

***Remarque* 7.2.7.**

(*i*) *La différence entre la pratique des deux derniers théorèmes est apparemment minime, cependant, elle est fondamentale.*

(*ii*) *Si f est seulement C^1 par morceaux (pas forcément continue) alors il y a convergence uniforme sur tout intervalle compact $[a,b]$ où f est continue.*
Dém : Ce résultat est hors programme (et ne parlons pas de la démonstration...) Il est cité pour la "culture" ■

Exemples :

(*i*) On a vu à la fin du paragraphe sur les coefficients de Fourier la série de Fourier de la fonction $f(t) = \cos\alpha t$ (pour $t \in [-\pi,\pi]$). On peut dire maintenant que cette série converge normalement et que sa somme est égale à $\cos\alpha t$ i.e.

$$\cos\alpha t = \frac{\sin\alpha\pi}{\alpha\pi} + 2\alpha\sin\alpha\pi\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\cos nt}{\pi(\alpha^2-n^2)}$$

pour $t \in [-\pi,\pi]$.
Dém : La fonction f prolongée par 2π-périodicité à $\mathbb{R}$ est continue (le branchement en π ne pose pas de problème car $f(-\pi) = f(\pi)$). Sur l'ouvert $]-\pi,\pi[$ elle est de classe $\mathcal{C}^1$ (et même $\mathcal{C}^\infty$) et elle se prolonge à l'intervalle $[-\pi,\pi]$ en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Le théorème de convergence normale s'applique ■

(*ii*) Noyau de Poisson $P_r(t)$: pour $|z| < 1$ on a $\dfrac{1+z}{1-z} = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} z^n$ d'où en prenant les parties réelles et complexes

$$\frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2} = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} r^n \cos nt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}\mathrm{e}^{int} = P_r(t)$$

$$\frac{2r\sin t}{1-2r\cos t + r^2} = 2\sum_{n=1}^{+\infty} r^n \sin nt \text{ (où } r = |z|).$$

Dém : On a $\dfrac{1+z}{1-z} - 1 = \dfrac{2z}{1-z} = 2z\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ ce qui donne la première formule.
En posant $z = r\,\mathrm{e}^{it}$ on fait le calcul suivant :

$$\begin{aligned}\frac{1+z}{1-z} &= \frac{1+r\,\mathrm{e}^{it}}{1-r\,\mathrm{e}^{it}}\\ &= \frac{(1+r\,\mathrm{e}^{it})(1-r\,\mathrm{e}^{-it})}{(1-r\,\mathrm{e}^{it})(1-r\,\mathrm{e}^{-it})}\\ &= \frac{1-r^2+2ir\sin t}{1-2r\cos t + r^2}.\end{aligned}$$

Et comme annoncé, si on prend les parties réelles et imaginaires dans la formule

$$\frac{1-r^2+2ir\sin t}{1-2r\cos t + r^2} = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} r^n\,\mathrm{e}^{int}$$

on obtient les deux résultats ■

(*iii*) $\sum_{n=1}^{+\infty} r^n \dfrac{\cos nt}{n} = -\dfrac{1}{2}\ln(1-2r\cos t + r^2)$, $r \in]0,1[$.
Dém : La série $\sum r^n \sin nt$ converge normalement car $|r^n \sin nt| \leqslant r^n$ terme général d'une série convergente. On peut donc intégrer terme à terme :

$$\int_0^t \left(\sum_{n=1}^{+\infty} r^n \sin(nu)\right)\mathrm{d}u = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n}{n}(1-\cos nt)$$

d'où, en utilisant le D.S.E. du logarithme,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} r^n\frac{\cos nt}{n} &= \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{r^n}{n}}_{=-\ln(1-r)} - \int_0^t \left(\sum_{n=1}^{+\infty} r^n\sin(nu)\right)\mathrm{d}u\\ &= -\ln(1-r) - \int_0^t \frac{r\sin u}{1-2r\cos u + r^2}\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

en utilisant la relation du (*ii*). Or

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{r\sin u}{1-2r\cos u + r^2}\,\mathrm{d}u &= \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\mathrm{d}(1-2r\cos u + r^2)}{1-2r\cos u + r^2}\\ &= \frac{1}{2}\Big[\ln(1-2r\cos u + r^2)\Big]_0^t\\ &= \frac{1}{2}\ln(1-2r\cos t + r^2) - \ln(1-r)\end{aligned}$$

ce qui donne la relation $\sum_{n=1}^{+\infty} r^n\dfrac{\cos nt}{n} = -\dfrac{1}{2}\ln(1-2r\cos t + r^2)$ ■

(*iv*) $\operatorname{Arctan} \dfrac{r\sin t}{1-r\cos t} = \sum_{n=1}^{+\infty} r^n \dfrac{\sin nt}{n}$ (même technique). Cette formule est encore valable pour $r=1$ (là, il faut prendre les choses à l'envers, i.e. on cherche le développement en série de Fourier de la fonction $t \mapsto \dfrac{\pi - t}{2}$) : pour $t \in]0, 2\pi[$, le théorème de Dirichlet donne $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin nt}{n} = \dfrac{\pi - t}{2}$.

Dém :

- Pour le cas $r \in]0,1[$, on procède comme ci-dessus :
  La série $\sum r^n \cos nt$ converge normalement car $|r^n \cos nt| \leqslant r^n$, on peut donc intégrer terme à terme :

$$\int_0^t \left(\sum_{n=1}^{+\infty} r^n \cos(nu) \right) \mathrm{d}u = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n}{n} \sin nt$$

  d'où, en utilisant la relation du (*ii*) modifiée :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} r^n \cos nu = \frac{1}{2}\left(\frac{1-r^2}{1-2r\cos u + r^2} - 1 \right) = \frac{r\cos u - r^2}{1 - 2r\cos u + r^2}$$

  on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} r^n \frac{\sin nt}{n} &= \int_0^t \left(\sum_{n=1}^{+\infty} r^n \cos(nu) \right) \mathrm{d}u \\ &= \int_0^t \frac{r\cos u - r^2}{1-2r\cos u + r^2} \,\mathrm{d}u \end{aligned}$$

  et on "remarque" que $\left[\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{r\sin u}{1-2r\cos u + r^2} \right) \right]' = \dfrac{r\cos u - r^2}{1-2r\cos u + r^2}$ (connaissant le résultat, cette démarche est légitime) d'où

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{r\cos u - r^2}{1-2r\cos u + r^2} \,\mathrm{d}u &= \left[\operatorname{Arctan}\left(\frac{r\sin u}{1-2r\cos u + r^2} \right) \right]_0^t \\ &= \operatorname{Arctan}\left(\frac{r\sin t}{1-2r\cos t + r^2} \right) \end{aligned}$$

  d'où $\operatorname{Arctan} \dfrac{r\sin t}{1-r\cos t} = \sum_{n=1}^{+\infty} r^n \dfrac{\sin nt}{n}$.

- Si $r=1$ on ne peut pas passer à la limite dans l'égalité ci-dessus car aucun théorème ne le permet (il n'y a pas de convergence uniforme par rapport à $r \in]0,1]$ à t fixé). On utilise ici la technique suivante :
  On écrit ce que donne l'égalité pour $r=1$ et $t \in]0, 2\pi[$ soit

$$\begin{aligned} \operatorname{Arctan} \frac{\sin t}{1-\cos t} &= \operatorname{Arctan} \frac{2\sin t/2 \cos t/2}{2\cos^2 t/2} = \operatorname{Arctan} \frac{\sin t/2}{\cos t/2} \\ &= \operatorname{Arctan}\left(\tan \frac{\pi - t}{2} \right) = \frac{\pi - t}{2} \end{aligned}$$

car $\dfrac{\pi - t}{2} \in]-\pi/2, \pi/2[$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nt}{n} \text{ formellement.}$$

Pour justifier cette égalité, on procède "à l'envers", c'est-à-dire on cherche le développement en série de Fourier de la fonction f impaire définie par $f(t) = \dfrac{\pi - t}{2}$ sur $]0, \pi[$. On trouve $a_n = \dfrac{1}{n}$ et on utilise le théorème de Dirichlet car f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux ■

(v) D'une manière générale, si l'on veut développer en série de Fourier une expression de la forme $R(\cos x, \sin x)$ où R est une fraction rationnelle en $\cos x$ et $\sin x$ définie sur $\mathbb{R}$ alors on exprime $\cos x$ et $\sin x$ à l'aide de $z = \mathrm{e}^{ix}$, on décompose la fraction rationnelle obtenue en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et on développe chaque élément à l'aide des formules

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(z-a)^p} &= \frac{(-1)^p}{a^p} \frac{1}{\left(1 - \frac{z}{a}\right)^p} &&= \frac{(-1)^p}{a^p} \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p-1}{p-1} \left(\frac{z}{a}\right)^n && \text{si } |a| > 1 \\
\frac{1}{(z-a)^p} &= \frac{\bar{z}^p}{(1 - a\bar{z})^p} &&= \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p-1}{p-1} a^n \bar{z}^{n+p} && \text{si } |a| < 1
\end{aligned}$$

Dém : $R(\cos x, \sin x) = R\left(\dfrac{z^2+1}{2z}, \dfrac{z^2-1}{2iz}\right) = R_1(z)$ où R_1 est une fraction rationnelle en z. On décompose R_1 :

$$R_1(z) = E(z) + \sum_{p=1}^{k} \mathcal{P}\left(\frac{1}{z - z - p}\right)$$

où $z_1, \ldots, z_k$ sont les pôles de R_1. On est alors amené à utiliser les formules rappelées puis à remplacer z et $\bar{z}$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$ ■

***Remarque* 7.2.8.** *Tout ce qui a été dit se généralise sans peine au cas des fonctions T-périodiques. On posera*

$$\begin{aligned}
c_n(f) = \widehat{f}(n) &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \mathrm{e}^{-i\frac{2\pi n}{T} t} \, \mathrm{d}t \\
a_n(f) &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos \frac{2\pi n}{T} t \, \mathrm{d}t \\
b_n(f) &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin \frac{2\pi n}{T} t \, \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

i.e. on remplace 2π par T.

Si on note $\|f\|_1 = \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} |f(t)| \, \mathrm{d}t$, $\|f\|_2 = \left(\dfrac{1}{T} \displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t\right)^{1/2}$, alors l'égalité de Parseval s'écrit de la même façon, elle traduit la conservation de l'énergie d'un signal périodique.

Les théorèmes de convergence 7.15 page 408 et 7.16 page 408 sont les mêmes et l'égalité d'une fonction et de sa série de Fourier s'écrit :

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)\mathrm{e}^{i\frac{2\pi n}{T}x} = c_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n(f)\cos\frac{2\pi n}{T}x + b_n(f)\sin\frac{2\pi n}{T}x\right)$$

ce que l'on voit aussi en utilisant le paramètre $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$. *Cela signifie qu'un signal périodique de classe* $\mathcal{C}^1$ *par morceaux est égal à la somme de ses harmoniques.*

Questions :

(*i*) À l'aide de la série de Fourier de la fonction $\cos\alpha t$ vue page 410 montrer les égalités, pour $t \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$:

$$\pi\,\mathrm{cotan}(\pi t) = \frac{1}{t} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2t}{t^2-n^2}, \qquad \frac{\pi}{\sin\pi t} = \frac{1}{t} + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2t}{t^2-n^2}.$$

En déduire que $\dfrac{\pi^2}{\sin^2\pi t} = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(t-n)^2}$.

(*ii*) Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, on pose $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^{2\pi} f(x+t)\overline{f}(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que

$\widehat{\varphi}(n) = 2\pi|\widehat{f}(n)|^2$. À l'aide de $\varphi(0)$, prouver la formule de Parseval.

(*iii*) Chercher le développement en série de Fourier de $f(x) = \dfrac{\sin x}{\frac{5}{4}+\cos x}$.