CHAPITRE 8

Équations différentielles

8.1 Équations différentielles linéaires

Les applications considérées dans cette section sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans un espace vectoriel normé F de dimension finie n sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

8.1.1 Équations linéaires d'ordre 1

a) Compléments de calcul intégral

Proposition 8.1.1. *Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b],F)$, on pose $R_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$ où $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$. La suite $R_n(f)$ admet une limite quand $n \to +\infty$.*

Dém : Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de F et $f = \sum_{i=1}^{p} f_i e_i$.

- $f_i \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K})$ donc les sommes de Riemann des f_i convergent vers leur intégrale :

$$\lim_{n\to+\infty} R_n(f_i) = \int_a^b f_i(t)\,\mathrm{d}t.$$

Par linéarité, on a alors

$$\begin{aligned} R_n(f) &= \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{p} f_i(x_k)e_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{p}\left(\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f_i(x_k)\right)e_i \\ &= \sum_{i=1}^{p} R_n(f_i)e_i \end{aligned}$$

donc la suite $(R_n(f))$ converge vers $\sum_{i=1}^{p}\left(\int_a^b f_i(t)\,\mathrm{d}t\right)e_i$ ■

Définition 8.1.1. ***Intégrale des fonctions de $\mathcal{CM}([a,b],F)$***

On appelle intégrale de f sur $[a,b]$ la quantité noté $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} R_n(f)$.

***Remarque* 8.1.1.**

(i) *La définition de* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *ne dépend pas de la base* (e_i) *que l'on a choisie dans la proposition précédente.*
Dém : C'est une conséquence de l'unicité de la limite. En effet, on vient de prouver que la suite $(R_n(f))$ *avait une limite dans l'espace vectoriel* F *donc* $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *ne dépend pas de la base choisie pour la calculer* ■

(ii) *On a les propriétés de l'intégrale des fonctions complexes : linéarité, Chasles,* $(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t)' = f(x)$, $u\left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right) = \int_a^x u(f(t))\,\mathrm{d}t$ *(u application linéaire).*
Dém : Il suffit d'utiliser la formule $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^p \left(\int_a^x f_i(t)\,\mathrm{d}t\right) e_i$*. Les trois premières propriétés citées découlent immédiatement de cette relation.*
De même, si u est une application linéaire alors

$$\begin{aligned} u\left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right) &= u\left(\sum_{i=1}^p \int_a^x f_i(t)\,\mathrm{d}t.e_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^p \left(\int_a^x f_i(t)\,\mathrm{d}t\right) u(e_i) \\ &= \int_a^x u\left(\sum_{i=1}^p f_i(t)e_i\right)\mathrm{d}t = \int_a^x u(f(t))\,\mathrm{d}t \ ■ \end{aligned}$$

Question

Montrer que, pour $f \in \mathcal{CM}([a,b],F)$, $\displaystyle\left\|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right\| \leqslant \int_a^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t$ pour $a < b$.

b) Définitions, théorème de Cauchy-Lipschitz

Définition 8.1.2. ***Équation linéaire d'ordre 1***
On appelle équation différentielle linéaire d'ordre 1 (synonyme équation différentielle linéaire du premier ordre) toute équation qui s'écrira sous la forme

$$x'(t) = a(t)(x(t)) + b(t) = a(t).x(t) + b(t) \tag{1}$$

où a désigne une application continue de I *dans* $\mathcal{L}(F)$ *et b une application continue de* I *dans* F*,* $a(t).x$ *étant une notation simplifiée correspondant à l'image du vecteur* $x(t)$ *de* F *par l'application linéaire* $a(t)$*.*
On appelle solution de cette équation toute fonction x *de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* I *vérifiant* $x'(t) = a(t).x(t) + b(t)$ *pour tout* t *de* I *(même notation que ci-dessus).*

***Remarque* 8.1.2.**

(i) *On écrit souvent* $x' = a(t).x + b(t)$ *à la place de (1) (moins de parenthèses).*

(ii) ***Traduction matricielle*** *Si on prend une base de* F *et si on note* $A(t)$ *la matrice de l'application linéaire* $a(t)$*,* $B(t)$ *la matrice unicolonne de* $b(t)$ *et* X *celle de* x *alors l'équation différentielle s'écrit :*

$$X' = A(t).X + B(t). \tag{2}$$

(*iii*) ***Traduction en systèmes d'équations différentielles scalaires***

On reprend le précédent système et on écrit le système développé :

$$(3) \qquad \begin{cases} x_1' = a_{11}(t)x_1 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n' = a_{n1}(t)x_1 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t) \end{cases}$$

(*iv*) *On peut ramener un système linéaire d'ordre p à un système linéaire du premier ordre :*

Si $y^{(p)}+a_{p-1}y^{(p-1)}+\cdots+a_0y = b$ est une équation différentielle linéaire d'ordre p, on peut la ramener à un système linéaire du premier ordre en posant $x_1 = y$, $x_2 = y'$,…,$x_p = y^{(p-1)}$, on aura alors (dans le cas d'une équation scalaire)

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & \dots & \dots & -a_{p-1} \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$$

Dém : On a $X = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(p-1)} \end{pmatrix}$ or la première ligne de la matrice s'écrit $y' = y'$, il en va de même des autres à l'exception de la dernière qui s'écrit

$$y^{(p)} = -a_0y - \cdots - a_{p-1}y^{(p-1)} + b \ \blacksquare$$

DÉFINITION 8.1.3. ***Problème de Cauchy, conditions initiales***

Soit $x' = a(t).x + b(t)$ une équation différentielle linéaire, on appelle problème de Cauchy aux conditions initiales $(t_0, x_0) \in I \times F$ le problème suivant :

trouver une solution vérifiant la condition initiale $x(t_0) = x_0$ pour un $t_0 \in I$.

***Remarque* 8.1.3.** *Il existe d'autres conditions pour une équation différentielle que les conditions initiales, notamment les conditions aux limites.*

THÉORÈME 8.1. **Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire**
Pour tout problème de Cauchy (i.e. pour toute condition initiale $(t_0, x_0) \in I \times F$) il existe une solution et une seule à l'équation différentielle (1).

Dém : (Non exigible)
On va utiliser la convergence normale d'une série de fonctions définie sur un segment $J \subset I$. Comme il n'est pas facile de raisonner avec les fonctions dérivées, on remplace l'équation différentielle par une équation intégrale :

$$x \text{ solution de (1)}, \ x(t_0) = x_0 \Leftrightarrow x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} (a(s).x(s) + b(s))\, \mathrm{d}s.$$

Montrons cette équivalence :

($\Rightarrow$) On a $x'(s) = a(s).x(s) + b(s)$ pour tout $s \in I$ d'où, en intégrant de t_0 à t, on obtient
$$\int_{t_0}^{t} x'(s)\,\mathrm{d}s = x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} (a(s).x(s) + b(s))\,\mathrm{d}s.$$

($\Leftarrow$) Si $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} (a(s).x(s) + b(s))\,\mathrm{d}s$ alors x est dérivable grâce au théorème fondamental du calcul différentiel et $x'(t) = a(t).x(t) + b(t)$. Si $t = t_0$ alors $x(t_0) = x_0$.

Existence : On pose $E = \mathcal{C}(I, F)$, soit $G : x \in E \mapsto G(x) \in E$ défini par
$$G(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} (a(s).x(s) + b(s))\,\mathrm{d}s.$$

Compte tenu de l'équivalence montrée en préambule, il suffit de trouver un point fixe de G pour obtenir l'existence d'une solution.
Montrons par récurrence que

$$\text{(I)} \qquad \forall (x,y) \in E^2,\ \|G^n(x)(t) - G^n(y)(t)\| \leqslant K_t \frac{(M_t|t-t_0|)^n}{n!}$$

où $K_t = \sup\limits_{s\in[t_0,t]} \|x(s) - y(s)\|$, $M_t = \sup\limits_{s\in[t_0,t]} \|a(s)\|$ et G^n désigne l'itéré d'ordre n de G. On démontre que l'inégalité (I) est réalisée pour tout $u \in [t_0, t]$:

- Supposons dans un premier temps que $t \geqslant t_0$, soit $u \in [t_0, t]$ alors
$$\begin{aligned}\|G(x)(u) - G(y)(u)\| &= \left\| \int_{t_0}^{u} a(s).x(s)\,\mathrm{d}s - \int_{t_0}^{u} a(s).y(s)\,\mathrm{d}s \right\| \\ &= \left\| \int_{t_0}^{u} a(s).(x(s) - y(s))\,\mathrm{d}s \right\| \text{ par linéarité de } a(s) \\ &\leqslant \int_{t_0}^{u} \|a(s).(x(s)-y(s))\|\,\mathrm{d}s \leqslant \int_{t_0}^{u} \|a(s)\|.\|x(s)-y(s)\|\,\mathrm{d}s\end{aligned}$$
on utilise l'inégalité $\|a(s)(x(s)-y(s))\| \leqslant \|a(s)\|.\|x(s)-y(s)\|$ car $a(s)$ est une application linéaire continue donc
$$\|G(x)(u) - G(y)(u)\| \leqslant (u - t_0)M_t K_t$$
car $\|a(s)\| \leqslant M_u \leqslant M_t$ par hypothèse et $\|x(s) - y(s)\| \leqslant K_u \leqslant K_t$ (les applications $u \mapsto M_u$ et $u \mapsto K_u$ sont croissantes car on prend la borne supérieure sur des ensembles croissants).

- Passage de l'ordre n à l'ordre $n+1$: on procède de la même manière, on suppose que $\|G^n(x)(u) - G^n(y)(u)\| \leqslant K_t \dfrac{[M_t(u-t_0)]^n}{n!}$, alors
$$\begin{aligned}\|G^{n+1}(x)(u) - G^{n+1}(y)(u)\| &= \left\| \int_{t_0}^{u} a(s).[G^n(x)(s) - G^n(y)(s)]\,\mathrm{d}s \right\| \\ &\leqslant \int_{t_0}^{u} \|a(s)\|.\|G^n(x)(s) - G^n(y)(s)\|\,\mathrm{d}s \\ &\leqslant \int_{t_0}^{u} M_t K_t \frac{[M_t(s-t_0)]^n}{n!}\,\mathrm{d}s \leqslant K_t M_t^{n+1} \int_{t_0}^{u} \frac{(s-t_0)^n}{n!}\,\mathrm{d}s \\ &\leqslant K_t \frac{[M_t(u-t_0)]^{n+1}}{(n+1)!}\end{aligned}$$

car une primitive de $(s-t_0)^n$ est $\dfrac{(s-t_0)^{n+1}}{n+1}$ (surtout ne pas développer !). Ceci termine la récurrence en remplaçant u par t.

- Pour $t < t_0$, c'est la même chose mais il faut gérer les valeurs absolues dans l'inégalité :

$$\begin{aligned}\|G^{n+1}(x)(u) - G^{n+1}(y)(u)\| &\leqslant \left|\int_{t_0}^{u} \|a(s)\|.\|G^n(x)(s) - G^n(y)(s)\|\,\mathrm{d}s\right| \\ &\leqslant K_t M_t^{n+1} \left|\int_{t_0}^{u} \frac{(s-t_0)^n}{n!}\,\mathrm{d}s\right| \\ &\leqslant K_t \frac{[M_t|u-t_0|]^{n+1}}{(n+1)!}\end{aligned}$$

On pose ensuite $x_n = G^n(x_0)$ et en notant x_0 la fonction constante égale à x_0, on a alors

$$\|x_{n+1}(t) - x_n(t)\| = \|G^n(x_1)(t) - G^n(x_0)(t)\| \leqslant K_t \frac{(M_t|t-t_0|)^n}{n!}$$

en appliquant (I) à $x = x_1$ et $y = x_0$ (ici $K_t = \sup\limits_{s\in[t_0,t]} \|x_(s) - x_0\|$).

Soit $J = [a,b] \subset I$ un segment alors

$$\sup_{t\in[a,b]} \|x_{n+1}(t) - x_n(t)\| \leqslant K_J \frac{(M_J l)^n}{n!}$$

où $K_J = \max(K_a, K_b)$, $M_J = \max(M_a, M_b)$ et $l = \max(|a-t_0|, |b-t_0|)$. Par le critère de d'Alembert, la série $\sum K_J \dfrac{(M_J l)^n}{n!}$ converge, on en déduit que

- la série $x_0 + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (x_{n+1} - x_n)$ converge normalement sur tout segment J de I.
- Comme $\mathcal{C}(J,F)$ est un espace de Banach, sa somme x est bien définie (on a convergence simple) et continue sur J (cf. théorème 5.50 page 329 étendu au cas des fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie).
- x est donc continue sur tout segment $J \subset I$ donc $x \in \mathcal{C}(I,F)$.
- $x_n = \sum\limits_{p=0}^{n-1} (x_{p+1} - x_p) + x_0$ donc $x_n \xrightarrow[J]{C.U.} x$ et $a.x_n \xrightarrow[J]{C.U.} a.x$ car

$$\|a(s).(x(s) - x_n(s))\| \leqslant \|a(s)\|.\|x(s) - x_n(s)\| \leqslant M_J \sup_{s\in J} \|x(s) - x_n(s)\|.$$

- Pour $J = [t_0, t]$, comme on a convergence uniforme de $(a.x_n)$ vers $a.x$, on peut passer à la limite dans l'égalité

$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} (a(s).x_n(s) + b(s))\,\mathrm{d}s$$

pour obtenir $x(t) = x_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} (a(s).x(s) + b(s))\,\mathrm{d}s$.

Conclusion x vérifie (1) avec la condition initiale $x(t_0) = x_0$.

Unicité : Soit x et y deux solutions alors $x = G(x) = G^n(x)$ (récurrence immédiate) pour tout n, de même pour y.

On applique l'inégalité (I), on a $\|x(t) - y(t)\| \leqslant K_t \dfrac{(M_t|t-t_0|)^n}{n!}$ pour tout n. En prenant la limite quand $n \to +\infty$, $x(t) = y(t)$ pour tout $t \in I$ i.e. $x = y$ ■

c) Étude de la résolution

Théorème 8.2. Équation homogène
Les solutions sur I de l'équation

$$(4) \qquad x' = a(t).x$$

constituent un sous-espace vectoriel $\mathcal{E}$ de $\mathcal{C}^1(I, F)$. En outre, étant donné un élément t_0 de I, l'application φ qui à tout élément x de $\mathcal{E}$ associe $x(t_0)$ est un isomorphisme de $\mathcal{E}$ sur F.
En particulier, la dimension de $\mathcal{E}$ est égale à $n = \dim F$.

Dém : E sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I, F)$ est une conséquence immédiate de la linéarité des applications $a(t)$.
On pose $\varphi\ : x \in \mathcal{E} \mapsto x(t_0) \in F$ et $\psi\ : x_0 \in F \mapsto x \in \mathcal{E}$, $x(t_0) = x_0$. ψ est définie grâce au théorème de Cauchy-Lipschitz et c'est l'inverse de φ :

- φ est une application linéaire de E dans F (immédiat).
- On sait, grâce au théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire que, $t_0 \in I$ étant donné, il existe une unique solution de (4) x vérifiant $x(t_0) = x_0$ donc ψ est bien définie, la linéarité de ψ étant elle aussi immédiate.
- On a alors $\varphi(\psi(x_0)) = \varphi(x) = x(t_0) = x_0$ pour tout $x_0 \in F$ soit $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_F$.
- $\psi(\varphi(x)) = \psi(x(t_0)) = x$ car si y est une solution de (4) qui vérifie $y(t_0) = x(t_0)$ alors $x = y$ (l'unicité de la solution d'une équation différentielle joue un grand rôle ici, rôle que l'on retrouvera souvent par la suite) donc $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_E$.

On a ainsi prouvé que φ était un isomorphisme et $\dim E = \dim \varphi(E) = \dim F$ ■

Lemme 8.3. $x_1, \ldots, x_p$ désignant p solutions de (4), si $\lambda_1 x_1(t_0) + \cdots + \lambda_p x_p(t_0) = 0$ pour un t_0 de I alors $\lambda_1 x_1(t) + \cdots + \lambda_p x_p(t) = 0$ pour tout t de I.

Dém : 0 est solution de (4), on utilise alors l'unicité :
on pose $x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_p x_p$, par linéarité, x est solution de (4) et $x(t_0) = 0$. On a donc $\varphi(x) = 0$ donc $\psi(\varphi(x)) = x = 0$ (en utilisant les détails de la démonstration précédente ■

Théorème 8.4. Wronskien
Si x_1, x_2,...,x_n désignent n solutions de (4) telles que $\det(x_i(t_0)) \neq 0$, alors $\det(x_i(t)) \neq 0$ pour tout t de I (où le déterminant des x_i est pris dans une base de F). Ce déterminant est appelé wronskien.
Toutes les solutions de (4) s'écrivent $x(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i(t)$.

Dém : Par contraposée en utilisant le lemme 8.3, ensuite la famille des (x_i) est une famille libre de n vecteurs dans un espace de dimension n, c'est une base :

- S'il existe $t_1 \in I$ tel que $\det(x_i(t_1)) = 0$ (c'est la négation de la conclusion) alors cela signifie que les vecteurs $(x_1(t_1), \dots, x_n(t_1))$ sont liés. Il existe des λ_i non tous nuls tels que $\lambda_1 x_1(t_1) + \cdots + \lambda_n x_n(t_1) = 0$. Il suffit d'appliquer le lemme précédent, on en déduit que $\lambda_1 x_1(t) + \cdots + \lambda_n x_n(t) = 0$ pour tout $t \in I$, en particulier pour $t = t_0$. On obtient ainsi $\det(x_i(t_0)) = 0$.
- Soit x une solution de (4), la famille $(x_i(t_0))$ est libre et contient n éléments, c'est donc une base de F, on peut alors exprimer $x(t_0)$ dans cette base :

$$x(t_0) = \lambda_1 x_1(t_0) + \cdots + \lambda_n x_n(t_0).$$

On utilise encore le lemme avec $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n - x$. Comme cette solution de (4) s'annule en t_0, elle s'annule sur tout I donc $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ ■

Définition 8.1.4. ***Système fondamental de solutions***
Les x_i forment alors ce qu'on appelle un système fondamental de solutions.

Application : **Méthode de variation des constantes**
Si on connaît un système fondamental de solutions de (4), on va chercher une solution particulière de (1) sous la forme :
$x(t) = \lambda_1(t)x_1(t) + \lambda_2(t)x_2(t) + \cdots + \lambda_n(t)x_n(t)$. On trouvera alors la condition $b(t) = \lambda_1'(t)x_1(t) + \lambda_2'(t)x_2(t) + \cdots + \lambda_n'(t)x_n(t)$ i.e.

$$\begin{cases} b_1(t) = \lambda_1'(t)x_{11}(t) + \lambda_2'(t)x_{12}(t) + \cdots \lambda_n'(t)x_{1n}(t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_n(t) = \lambda_1'(t)x_{n1}(t) + \lambda_2'(t)x_{n2}(t) + \cdots \lambda_n'(t)x_{nn}(t) \end{cases}$$

Or, pour tout t, ce système est de Cramer, on pourra calculer les λ_i' et pour avoir une solution particulière de (2), il suffira de les intégrer.
Dém : On dérive $x(t)$:

$$\begin{aligned} x'(t) &= \lambda_1(t)x_1'(t) + \cdots + \lambda_n(t)x_n'(t) && + \lambda_1'(t)x_1(t) + \cdots + \lambda_n'(t)x_n(t) \\ &= \lambda_1(t)(a(t).x_1(t)) + \cdots + \lambda_n(t)(a(t).x_n(t)) && + \lambda_1'(t)x_1(t) + \cdots + \lambda_n'(t)x_n(t) \\ &= a(t)\left[\lambda_1(t)x_1(t) + \cdots + \lambda_n(t)x_n(t)\right] && + \lambda_1'(t)x_1(t) + \cdots + \lambda_n'(t)x_n(t) \\ &= a(t).x(t) && + \lambda_1'(t)x_1(t) + \cdots + \lambda_n'(t)x_n(t) \\ &= a(t).x(t) && + b(t) \end{aligned}$$

d'où $b(t) = \lambda_1'(t)x_1(t) + \lambda_2'(t)x_2(t) + \cdots + \lambda_n'(t)x_n(t)$.
Les formules de Cramer donnent

$$\begin{aligned} \lambda_1'(t) &= \det(b(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\ \dots &= \dots \\ \lambda_n'(t) &= \det(x_1(t), \dots, x_{n-1}(t), b(t)) \end{aligned}$$

Il suffit en effet (!) d'intégrer les λ_i' avec les formules que l'on vient de trouver. Ce calcul nous fournit une solution particulière de l'équation complète. Cette méthode est rarement utilisée telle qu'elle mais on la retrouvera cependant avec les équations différentielles linéaires du second ordre ■

Questions :

(i) Résoudre $\begin{cases} x' + y = a(t) \\ y' - x = b(t) \end{cases}$ où a et b sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

(ii) Résoudre $\begin{cases} (t^2+1)x' = tx + y + 2t^2 - 1 \\ (t^2+1)y' = -x + ty + 3t \end{cases}$

(iii) Résoudre $\begin{cases} (t+1)x' = tx + y - t - 2 \\ (t-1)y' = -x + ty - 2t + 1 \end{cases}$

8.1.2 Équations linéaires à coefficients constants

On rappelle que, si $a \in \mathcal{L}(F)$ alors $\exp(ta)$ est dérivable, de dérivée $a\exp(ta)$ (cf. théorème 5.60 page 338).

Proposition 8.1.2. *On a* $\exp(sa).\exp(ta) = \exp[(s+t)a]$.

Dém : Avec la théorie des équations différentielles : on pose $g(t) = \mathrm{e}^{(t+s)a}\,\mathrm{e}^{-ta}$.
Le théorème cité ci-dessus nous dit que a commute avec e^{ta} d'où

$$\begin{aligned} g'(t) &= \mathrm{e}^{(t+s)a}(-a\,\mathrm{e}^{-ta}) + a\,\mathrm{e}^{(t+s)a}\,\mathrm{e}^{-ta} \\ &= -a\,\mathrm{e}^{(t+s)a}\,\mathrm{e}^{-ta} + a\,\mathrm{e}^{(t+s)a}\,\mathrm{e}^{-ta} = 0 \end{aligned}$$

donc g est constante soit $g(t) = g(0) = \mathrm{e}^{sa} = \mathrm{e}^{(t+s)a}\,\mathrm{e}^{-ta}$.
Avec $s = 0$ on obtient $g(t) = \mathrm{e}^{ta}\,\mathrm{e}^{-ta} = \mathrm{e}^{0} = \mathrm{Id}_F$ donc $\mathrm{e}^{-ta} = (\mathrm{e}^{ta})^{-1}$.
On obtient le résultat en multipliant à droite par e^{ta} la relation $\mathrm{e}^{sa} = \mathrm{e}^{(t+s)a}\,\mathrm{e}^{-ta}$.
On peut déduire de ce résultat que e^{ta} et e^{sa} commutent ■

Théorème 8.5. **Résolution de l'équation homogène**
L'unique solution sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy $x' = a.x$, $x(t_0) = x_0$ où x_0 est un vecteur de F, est la fonction $t \mapsto \exp[(t-t_0)a].x_0$.
Les solutions correspondant aux conditions initiales (t_0, x_0), $(t_0 + s, x_0)$ se déduisent l'une de l'autre par translation du paramètre s.

Dém :

- On a une démonstration directe, sans utiliser le théorème de Cauchy-Lipschitz. En effet l'équation $x' = a.x$ est équivalente à $(\exp(-ta).x(t))' = 0$:

$$\begin{aligned} x'(t) = a.x(t) &\Leftrightarrow \exp(-ta)[x'(t) - ax(t)] = 0 \\ &\Leftrightarrow \exp(-ta)x'(t) - a\exp(-ta)x(t) = 0 \\ &\Leftrightarrow (\exp(-ta).x(t))' = 0 \end{aligned}$$

  donc $\exp(-ta).x(t)$ est constant et vaut $\exp(-t_0a).x_0$.
  On en déduit que $x(t) = \exp(ta)\exp(-t_0a).x_0$ et, en utilisant la proposition précédente, que $x(t) = \exp[(t-t_0)a].x_0$.

- Le deuxième point est une conséquence immédiate de la proposition précédente :
  Soient x et y les solutions correspondant respectivement aux conditions initiales (t_0, x_0) et $(t_0 + s, x_0)$, alors
  $x(t) = \exp[(t - t_0)a].x_0$ et $y(t) = \exp[(t - t_0 - s)].x_0$ donc $y(t + s) = x(t)$ ■

***Remarque* 8.1.4.**

(i) *Si on prend une base de F alors l'équation s'écrit $X' = A.X$ et tout le problème se ramène à calculer $\exp(tA)$.*
Si $A = PDP^{-1}$ où $D = \mathrm{Diag}(\lambda_i)$ alors $\exp(tA) = P\,\mathrm{Diag}(\mathrm{e}^{t\lambda_i})P^{-1}$.
Dém : On a $D^k = \mathrm{Diag}(\lambda_i^k)$ (immédiat par récurrence) d'où

$$\begin{aligned}\exp(tD) &= \lim_{p\to+\infty}\sum_{k=0}^{p}\frac{t^kD^k}{k!} = \lim_{p\to+\infty}\sum_{k=0}^{p}\mathrm{Diag}(t^k\lambda_i^k/k!)\\ &= \lim_{p\to+\infty}\mathrm{Diag}\left(\sum_{k=0}^{p}t^k\lambda_i^k/k!\right) = \mathrm{Diag}\left(\lim_{p\to+\infty}\sum_{k=0}^{p}t^k\lambda_i^k/k!\right)\\ &= \mathrm{Diag}(\mathrm{e}^{t\lambda_i})\end{aligned}$$

On utilise alors la formule $\exp(tA) = P\exp(tD)P^{-1}$ qui s'obtient de la manière suivante :
$A^k = PD^kP^{-1}$ (récurrence immédiate) puis

$$\exp(tA) = \lim_{p\to+\infty}\sum_{k=0}^{p}\frac{t^k}{k!}A^k = \lim_{p\to+\infty}P\left(\sum_{k=0}^{p}\frac{t^k}{k!}D^k\right)P^{-1}$$

et par continuité du produit matriciel

$$\begin{aligned}&= P\left(\lim_{p\to+\infty}\sum_{k=0}^{p}\frac{(tD)^k}{k!}\right)P^{-1}\\ &= P\exp(tD)P^{-1}\end{aligned}$$

finalement, on arrive à $\exp(tA) = P\,\mathrm{Diag}(\mathrm{e}^{t\lambda_i})P^{-1}$ ■

(ii) *Si A est nilpotent d'indice p (i.e. $A^p = 0$), toutes les solutions de (1) sont polynomiales : $\exp(tA) = I_n + tA + \cdots + \dfrac{t^{p-1}}{(p-1)!}A^{p-1}$.*
Si $A - \lambda I_n$ est nilpotent alors $X' = AX \Leftrightarrow Y' = (A - \lambda I_n)Y$ où $Y = \mathrm{e}^{-\lambda t}X$ et $X = \mathrm{e}^{t\lambda}\left[I_n + (A - \lambda I_n)t + \cdots + \dfrac{(A-\lambda I_n)^{p-1}}{(p-1)!}t^{p-1}\right]X_0$.
Dém : En effet $\exp(tA) = \sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{t^k}{k!}A^k$ or si $k \geqslant p$, $A^k = 0$ donc cette somme est finie.
Si $A - \lambda I_n$ est nilpotent : $X' = AX$ alors

$$\begin{aligned}Y' &= (\mathrm{e}^{-\lambda t}X)' = -\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}X + \mathrm{e}^{-\lambda t}X'\\ &= [-\lambda I_n + A]\,\mathrm{e}^{-\lambda t}X = (A - \lambda I_n)Y.\end{aligned}$$

La réciproque est immédiate. On utilise alors le premier point pour conclure ■

(*iii*) *Si X_0 est un vep de A associé à la vap λ alors $\mathrm{e}^{tA}\, X_0 = \mathrm{e}^{\lambda t}\, X_0$ où λ est un scalaire (il n'est pas nécessaire dans ce cas de calculer e^{tA}).*
Dém : On sait que, si $AX_0 = \lambda X_0$ alors $A^k X_0 = \lambda^k X_0$ (récurrence immédiate) donc

$$\mathrm{e}^{tA}\, X_0 = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} A^k\right) X_0$$

et par continuité du produit matriciel

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} A^k X_0 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \lambda^k X_0 \\ &= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!}\right) X_0 = \mathrm{e}^{\lambda t}\, X_0 \ \blacksquare \end{aligned}$$

(*iv*) *Si on connaît une base de vecteurs propres X_i associés à des valeurs propres λ_i alors l'ensemble des solutions s'écrit*

$$X = \alpha_1\, \mathrm{e}^{t\lambda_1}\, X_1 + \cdots + \alpha_n\, \mathrm{e}^{t\lambda_n}\, X_n,$$

les $(\mathrm{e}^{t\lambda_i}\, X_i)$ forment un système fondamental de solutions (et on peut appliquer la méthode de variation des constantes pour trouver une solution de l'équation non homogène).
Dém : Chaque fonction $X_i(t) = \mathrm{e}^{t\lambda_i}\, X_i$ est solution et les vecteurs $(X_i(0))$ forment une base donc le théorème 8.4 page 420 nous dit que les fonctions $X_i(t)$ réalisent un système fondamental de solutions $\blacksquare$

(*v*) *Si la résolution de $X' = AX$ pour des conditions initiales $X(0) = X_0$ quelconques donne $X(t) = B(t)X_0$ alors $B(t) = \exp(tA)$. Par exemple si on revient au (ii) de la remarque alors on peut en déduire que $\exp(tA) = \mathrm{e}^{t\lambda} \exp(t(A - \lambda I_n))$.*

Dém : On a d'une part $X(t) = B(t)X_0$ et d'autre part $X(t) = \mathrm{e}^{tA}\, X_0$ donc $B(t)X_0 = \mathrm{e}^{tA}\, X_0$ et ceci pour tout X_0 donc les matrices $B(t)$ et e^{tA} sont égales. Si on reprend le (ii) alors on a vu que $X(t) = \mathrm{e}^{t\lambda}\, \mathrm{e}^{t(A-\lambda I_n)}\, X_0$ donc $\exp(tA) = \mathrm{e}^{t\lambda} \exp(t(A - \lambda I_n))$ $\blacksquare$

(*vi*) *Ce que l'on a fait avec une matrice unicolonne peut se généraliser au cas où X_0 est une matrice rectangulaire (ou carrée).*

THÉORÈME 8.6. **Étude de l'équation avec second membre**
L'ensemble des solutions de l'équation (1) $x' = a.x + b(t)$ s'écrit sous la forme

$$x(t) = \mathrm{e}^{ta} \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-ua}\, .b(u)\, \mathrm{d}u + \mathrm{e}^{(t-t_0)a}\, .x_0 = \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{(t-u)a}\, .b(u)\, \mathrm{d}t + \mathrm{e}^{(t-t_0)a}\, .x_0.$$

Dém : L'équation (1) se met là aussi sous la forme équivalente

$$\left(\mathrm{e}^{-ta}\, .x\right)' = \mathrm{e}^{-ta}\, .b(t).$$

En effet, $x'(t) - a.x(t) = b(t)$ peut s'écrire de manière équivalente sous la forme $\mathrm{e}^{-ta}.x'(t) - \mathrm{e}^{-ta}a.x(t) = \mathrm{e}^{-ta}.b(t)$ (attention à l'ordre des termes, bien mettre les matrices avant les vecteurs !). Or $(\mathrm{e}^{-ta}.x(t))' = \mathrm{e}^{-ta}.x'(t) - \mathrm{e}^{-ta}a.x(t)$ d'où l'équivalence annoncée.
Pour obtenir la formule annoncée, il suffit alors d'intégrer cette dernière relation entre t_0 et t et de tenir compte de la condition initiale $x(t_0) = x_0$.
On remarque ensuite que, si f est une application linéaire, alors $f(\int_{t_0}^t h(u)\,\mathrm{d}u) = \int_{t_0}^t f(h(u))\,\mathrm{d}u$ où h est une fonction vectorielle (cf remarque 8.1.1(ii) page 416). On peut donc finalement écrire

$$x(t) = \int_{t_0}^t \mathrm{e}^{ta}\,\mathrm{e}^{-ua}.b(u)\,\mathrm{d}u + \mathrm{e}^{(t-t_0)a}.x_0 = \int_{t_0}^t \mathrm{e}^{(t-u)a}.b(u)\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{(t-t_0)a}.x_0.$$

en utilisant la propriété 8.1.2 page 422 ■

***Remarque* 8.1.5.**

(i) *Le théorème précédent s'écrit* $X(t) = \mathrm{e}^{tA}.\int_{t_0}^t \mathrm{e}^{-uA}.B(u)\,\mathrm{d}u + \mathrm{e}^{(t-t_0)A}.X_0$ *avec les matrices.*

(ii) *Si* $P_A(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + \cdots + a_0$ *est le polynôme caractéristique de la matrice* A *et si* x_i *sont les coordonnées d'une solution* $X' = AX$ *alors elles vérifient* $P_A(\mathrm{D})(x_i) = 0$ *où* D *est l'opérateur dérivation.*
Dém : En effet $A^pX = X^{(p)}$ *donc* $P_A(\mathrm{D})(X) = P_A(A)(X)$ *et on utilise le théorème de Cayley-Hamilton :*

- *Par récurrence,* $AX = X'$ *puis* $A^pX = X^{(p)}$ *devient immédiat.*
- *Si* $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_mX^m$ *est un polynôme alors*

$$\begin{aligned} P(D)(X) &= (a_0\,\mathrm{Id} + a_1\,\mathrm{D} + \cdots + a_m\,\mathrm{D}^m)X = a_0X + a_1X' + \cdots + a_mX^{(m)} \\ &= a_0X + a_1AX + \cdots + a_mA^mX = P(A)X. \end{aligned}$$

On applique cette propriété à P_A *polynôme caractéristique de* A. *Le théorème de Cayley-Hamilton donne* $P_A(A) = 0$ *donc* $P_A(\mathrm{D})X = 0$. *En regardant les coordonnées de ce vecteur, on obtient* $P_A(\mathrm{D})(x_i) = 0$ *ce qui permet de découpler les fonctions coordonnées i.e. de pouvoir trouver une solution sans avoir à les chercher toutes* ■

Questions :

(i) Résoudre $\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = -x - 2y \end{cases}$ O point répulsif.

(ii) Résoudre $\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = -x - y \end{cases}$ O point attractif.

(iii) Résoudre $\begin{cases} x' &= -4x + y + z \\ y' &= x - y - 2z \\ z' &= -2x + y - z \end{cases}.$

8.1.3 Équations linéaires scalaires d'ordre 1 ou 2

a) Équation linéaire scalaire d'ordre 1

On rappelle ici comment on résout une équation différentielle du premier ordre qui s'écrit sous la forme $\alpha(t)x' + \beta(t)x = \gamma(t)$:

- On se place sur un intervalle J où l'équation est résolue en x' (i.e. on divise par $\alpha(t)$ sur un intervalle où α ne s'annule pas), on aura $x' = a(t)x + b(t)$ où a et b sont des fonctions continues à valeurs complexes.

- **Résolution** : Soit A une primitive de a sur J qui s'annule en $t_0 \in J$ alors

$$x' = a(t)x + b(t) \Leftrightarrow \left(\mathrm{e}^{-A(t)}\,x\right)' = \mathrm{e}^{-A(t)}\,b(t) \Leftrightarrow x = x(t_0)\,\mathrm{e}^{A(t)} + \mathrm{e}^{A(t)}\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{-A(u)}\,b(u)\,\mathrm{d}u.$$

  D'où, si l'on se donne $(t_0, x_0) \in I\times\mathbb{C}$, on ne trouvera qu'une seule solution définie sur I.

- L'ensemble des solutions de l'équation résolue sans second membre est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 1, l'ensemble des solutions de l'équation complète est un espace affine sur $\mathbb{C}$ de dimension 1.

b) Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2

Soit $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathcal{C}^4(I, \mathbb{C})$, α non identiquement nulle, on étudie l'équation différentielle

$$\text{(1)} \qquad \alpha(t)x'' + \beta(t)x' + \gamma(t)x = \delta(t)$$

Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que pour tout t de J, on ait $\alpha(t) \neq 0$ alors on pourra ramener l'équation (1) à une forme équivalente

$$\text{(2)} \qquad x'' = a(t)x' + b(t)x + c(t)$$

On sait alors que le problème de Cauchy a une seule solution définie sur J et que l'on peut se ramener à une équation différentielle linéaire d'ordre 1 avec $y = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$.

- **Étude de l'équation homogène** :

$$\text{(3)} \qquad x'' = a(t)x' + b(t)x$$

Définition 8.1.5. ***Wronskien***

Si x_1 et x_2 sont deux solutions linéairement indépendantes de (3) alors on appelle wronskien le déterminant $W(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix}$.

***Remarque* 8.1.6.** *Cette définition correspond bien à celle de la définition 8.4 page 420 en prenant $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2' \end{pmatrix}$.*

Dém : On écrit le système (3) sous la forme $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a(t) & b(t) \end{pmatrix} X$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$.

Il reste à montrer que si x_1 et x_2 sont deux solutions linéairement indépendantes alors X_1 et X_2 le sont aussi.

Par l'absurde : soit $X_2 = \lambda X_1$.

- λ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$: $\lambda = \dfrac{(X_2|X_1)}{\|X_1\|^2}$ est bien de classe $\mathcal{C}^1$ (X_1 ne s'annule jamais car, vu l'unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz, si $X_1(t_0) = 0$ alors $X_1 = 0$).
- On a ainsi $x_2 = \lambda x_1$ et $x_2' = \lambda x_1'$ d'où, en dérivant la première relation, $x_2' = \lambda x_1' + \lambda' x_1$ ce qui donne $\lambda' x_1 = 0$.
- Or $x_2'' = a x_2' + b x_2 = a\lambda x_1' + b\lambda x_1 = \lambda x_1''$ et, en dérivant la deuxième relation $x_2' = \lambda x_1'$ on arrive à $x_2'' = \lambda x_1'' + \lambda' x_1'$ soit $\lambda' x_1' = 0$.

Finalement, on obtient $\lambda' \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix} = \lambda' X_1 = 0$ donc $\lambda' = 0$ car on a vu que X_1 ne s'annulait pas. λ est donc constante, la famille (x_1, x_2) est liée ce qui est contradictoire ■

Proposition 8.1.3. *W est solution de l'équation différentielle $W' = a(t)W$ d'où*

$$W(t) = W(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(u)\,\mathrm{d}u\right).$$

Les solutions $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_2' \end{pmatrix}$ constituent un système fondamental de solutions de l'équation d'ordre 1 associée.

Dém : On peut dériver $W(t)$ en développant le déterminant mais il est une manière plus générale (elle marche aussi pour les équations différentielles linéaires d'ordre n) qui consiste à dériver le déterminant ligne par ligne.

$$W'(t) = \underbrace{\begin{vmatrix} x_1' & x_2' \\ x_1' & x_2' \end{vmatrix}}_{=0} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1'' & x_2'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ bx_1 + ax_1' & bx_2 + ax_2' \end{vmatrix} = b\underbrace{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}}_{=0} + a\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{vmatrix} = aW.$$

Il suffit alors d'intégrer l'équation différentielle $W' = aW$ ■

- **Recherche des solutions de l'équation homogène** :

→ Si on connaît une solution x_1, on cherche les autres solutions sous la forme $x = \lambda x_1$: on a ainsi

$x' = \lambda x_1' + \lambda' x_1$, $x'' = \lambda x_1'' + 2\lambda' x_1' + \lambda'' x_1$; on aura alors l'équation différentielle $\lambda'' x_1 + \lambda'(2x_1' - a(t)x_1) = 0$ ce qui donne, après intégration une autre solution $x_2(t) = x_1(t) \displaystyle\int_{t_0}^{t} \frac{W(u)}{x_1^2(u)}\,\mathrm{d}u$.

Dém : On peut retenir le résultat final mais ce n'est pas forcément facile aussi je recommande de retrouver cette formule par un calcul littéral ou, si les fonctions qui interviennent sont simples, par le calcul effectif. En posant $x = \lambda x_1$ sur un intervalle K où x_1 ne s'annule pas alors

$$\begin{aligned} x(t) &= \lambda(t)x_1(t) && \times(-b) \\ x'(t) &= \lambda(t)x_1'(t) + \lambda'(t)x_1(t) && \times(-a) \\ x''(t) &= \lambda(t)x_1''(t) + 2\lambda'(t)x_1'(t) + \lambda''(t)x_1(t) && \times 1 \end{aligned}$$

. . . .

$$0 = 0 + \lambda'(t)[2x_1'(t) - a(t)x_1(t)] + \lambda''(t)x_1(t).$$

On se ramène donc à l'équation différentielle $\lambda'' x_1 + \lambda'(2x_1' - a(t)x_1) = 0$ qui s'intègre formellement sous la forme $\dfrac{\lambda''}{\lambda'} = \dfrac{ax_1 - 2x_1'}{x_1} = a - 2\dfrac{x_1'}{x_1}$ puis $\ln(\lambda'/C) = W - \ln(x_1^2)$ (toujours formellement) et on retrouve la formule $\lambda'(t) = \dfrac{C}{x_1^2(t)} \mathrm{e}^{\,(t)}$ où $W(t) = W(t_0) \int_{t_0}^{t} a(u)\, du$. On peut choisir $C = 1$ car on cherche une autre solution particulière. Si x_1 s'annule en un point t_1, on peut vérifier (dans la pratique) que x_2 se prolonge en t_1.
La famille (x_1, x_2) sur l'intervalle K est libre car $\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)' = \dfrac{W}{x_1^2} \neq 0$ donc le rapport $\dfrac{x_2}{x_1}$ n'est pas constant ■

→ On peut se ramener à une équation différentielle du premier ordre en posant $z = \dfrac{x'}{x}$; on trouve alors une équation de Riccati $z' + z^2 = a(t)z + b(t)$ (c'est plutôt le contraire qui nous intéresse).
Dém : On se place là encore sur un intervalle K où x ne s'annule pas. $z' = \dfrac{x''}{x} - \left(\dfrac{x'}{x}\right)^2$ donc $\dfrac{x''}{x} = z + z^2$ donc sur K :

$$x'' = ax' + bx \Leftrightarrow z + z^2 = az + b$$

en divisant par x. On se ramène à une équation différentielle du premier ordre mais elle n'est pas linéaire... ■

→ En dernier recours ou si l'énoncé le demande, on pourra chercher les solutions sous forme de séries entières.

- **Recherche des solutions de l'équation complète (2)** :

→ Si on ne connaît qu'une solution de l'équation homogène, on utilise la méthode de variation de la constante (comme ci-dessus).
Dém : On reprend la démonstration ci-dessus :

$$\begin{aligned} x(t) &= \lambda(t)x_1(t) && \times(-b) \\ x'(t) &= \lambda(t)x_1'(t) + \lambda'(t)x_1(t) && \times(-a) \\ x''(t) &= \lambda(t)x_1''(t) + 2\lambda'(t)x_1'(t) + \lambda''(t)x_1(t) && \times 1 \end{aligned}$$

....

$$c(t) = 0 + \lambda'(t)[2x_1'(t) - a(t)x_1(t)] + \lambda''(t)x_1(t).$$

On cherche alors $\lambda' = \dfrac{C(t)}{x_1^2(t)} \mathrm{e}^{\,(t)}$ par la méthode de variation de la constante (encore !) d'où $C'(t) = k\dfrac{x_1(t)}{W(t)}$ que l'on intègre pour trouver λ' puis λ.
Il vaut mieux commencer directement par ces calculs si on a une équation avec second membre ■

→ Si on connaît l'ensemble des solutions de (3), on utilisera la méthode suivante :

$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$, $x' = \lambda_1 x_1' + \lambda_2 x_2'$ en imposant la relation $\lambda_1' x_1 + \lambda_2' x_2 = 0$, puis $x'' = \lambda_1 x_1'' + \lambda_2 x_2'' + \lambda_1' x_1' + \lambda_2' x_2'$; en remplaçant dans l'équation (2), on trouvera $\lambda_1' x_1' + \lambda_2' x_2' = c(t)$. On résout alors le système en λ_1', λ_2' puis on intégre. On trouve alors la solution particulière $x(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} \frac{x_1(s)x_2(t) - x_1(t)x_2(s)}{W(s)} c(s)\,\mathrm{d}s$.
Remarque : cette dernière méthode correspond à la méthode de variation des constantes (cf. page 421).
Dém : On utilise la même présentation pratique :

$$\begin{aligned}
x(t) &= \lambda_1(t)x_1(t) + \lambda_2(t)x_2(t) && \times(-b)\\
x'(t) &= \lambda_1(t)x_1'(t) + \lambda_2(t)x_2'(t) && \times(-a)\\
x''(t) &= \lambda_1(t)x_1''(t) + \lambda_2(t)x_2''(t) + \lambda_1'(t)x_1'(t) + \lambda_2'(t)x_2'(t) && \times 1
\end{aligned}$$

....

$$c(t) = 0 + 0 + \lambda_1(t)x_1'(t) + \lambda_2(t)x_2'(t).$$

On se retrouve avec le système $\begin{cases} \lambda_1'(t)x_1(t) + \lambda_2'(t)x_2(t) & = 0 \\ \lambda_1'(t)x_1'(t) + \lambda_2'(t)x_2'(t) & = c(t) \end{cases}$ qui se résout en

$$\lambda_1'(t) = \frac{c(t)x_2(t)}{W(t)} \qquad \lambda_1(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{c(s)x_2(s)}{W(s)}\,\mathrm{d}u + \mu_1$$

$$\lambda_2'(t) = \frac{-c(t)x_1(t)}{W(t)} \qquad \lambda_2(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{-c(s)x_1(s)}{W(s)}\,\mathrm{d}u + \mu_2$$

d'où, en prenant $\mu_1 = \mu_2 = 0$, on obtient la solution particulière

$$x(t) = \lambda_1(t)x_1(t) + \lambda_2(t)x_2(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{x_1(s)x_2(t) - x_1(t)x_2(s)}{W(s)} c(s)\,\mathrm{d}s.$$

On peut se poser des questions sur la condition $\lambda' x_1 + \mu' x_2 = 0$ en fait, cela revient à utiliser la méthode de variation des constantes que l'on a rappelé : on pose $X = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$. On a vu que si x_1 et x_2 sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène alors (X_1, X_2) forme un système fondamental de solutions (cf. remarque 8.1.6 page 426). On a cherché une solution particulière sous la forme $X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$ et la deuxième ligne de cette écriture matricielle est $x' = \lambda_1 x_1' + \lambda_2 x_2'$ ce qui correspond exactement à la condition $\lambda_1' x_1 + \lambda_2' x_2 = 0$ ■

Exemples :

(*i*) Équations différentielles à coefficients constants, cf. révisions du cours de première année.

(*ii*) **Équation d'Euler** :

$$(4) \qquad at^2 x'' + btx' + cx = 0,\ (a, b, c) \in \mathbb{C}^3$$

Pour $t > 0$, on pose $t = \mathrm{e}^u$, on est alors ramené à une équation à coefficients constants $a(y'' - y') + by' + cy = 0$ $(x(\mathrm{e}^u) = x(t))$; on peut aussi chercher

directement des solutions sous la forme $x = t^r$ où $r \in \mathbb{C}$.
Dém : Si $t > 0$, on écrit $x(t) = y(u)$ et on utilise le théorème de dérivation des applications composées :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = y'(u)\frac{1}{t}, \quad \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}u^2} = -\frac{1}{t^2}y'(u) + \frac{1}{t^2}y''(u)$$

d'où $at^2x''(t) + btx'(t) + cx(t) = ay''(u) + (b-a)y'(u) + cy(u) = 0$, on est donc ramené à une équation différentielle linéaire à coefficients constants que l'on sait résoudre...
Si $t < 0$, on pose $t = -\mathrm{e}^u$ et on reprend les calculs, en fait il suffit d'adapter les solutions que l'on a trouvé dans le premier cas ■

Questions : Résoudre les équations différentielles suivantes :

(*i*) $(x+1)y'' - y' - xy = (x+1)^2$

(*ii*) $x^2y'' + xy' - y = 2x$

(*iii*) $(x^2+1)y'' + xy' - y = 2x$

(*iv*) $4xy'' - 2y' + 9x^2y = 0$

(*v*) $y'' + y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos nx$ où $\sum |a_n|$ converge.

8.2 Notions sur les équations différentielles non linéaires

8.2.1 Équations non linéaires

a) Le théorème de Cauchy-Lipschitz

Définition 8.2.1. ***Équation différentielle, solution***
Soit $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ (i.e. f admet des dérivées partielles continues) où U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, on appelle équation différentielle l'équation

$$x' = f(t, x) \tag{1}$$

On appelle solution de (1) toute fonction φ définie sur I intervalle de $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur I vérifiant $\forall t \in I$, $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$.

Définition 8.2.2. ***Problème de Cauchy, conditions initiales***
Soit $x' = f(t, x)$ une équation différentielle, on appelle problème de Cauchy aux conditions initiales $(t_0, x_0) \in U$ le problème suivant :

trouver une solution vérifiant la condition initiale $\varphi(t_0) = x_0$ pour $(t_0, x_0) \in U$.

Théorème 8.7. Théorème de Cauchy-Lipschitz
Soit l'équation (1), si on se donne $(t_0, x_0) \in U$ une condition initiale alors

- il existe un intervalle J voisinage de t_0
- et une unique solution de (1) $\varphi \; : t \mapsto \varphi(t)$ vérifiant la condition initiale ci-dessus (appelée là aussi condition de Cauchy).

Ne pas oublier ici que φ est de classe $\mathcal{C}^1$.
En outre, si (J_1, φ_1) est une autre solution du problème de Cauchy alors $\varphi = \varphi_1$ sur $J \cap J_1$.

Dém : Hors programme ■

***Remarque* 8.2.1.** *Attention, ici dans l'énoncé de ce théorème, l'unicité est locale, on ne peut pour l'instant conclure à une unicité globale.*

Définition 8.2.3. ***Solution maximale***
On dit que φ solution de l'équation (1) définie sur J est une solution maximale ssi$_{déf}$ il n'existe pas d'intervalle J_1 contenant strictement J et φ_1 un prolongement $\mathcal{C}^1$ de φ à J_1 tel que φ_1 soit aussi solution de l'équation (1).

Théorème 8.8. Existence d'une solution maximale
Avec les hypothèses du théorème précédent, il existe une unique solution maximale pour tout problème de Cauchy.
De plus cette solution est définie sur un intervalle ouvert.

Dém :

- Soient (J_1, φ_1) et (J_2, φ_2) deux solutions de l'équation (1) vérifiant les mêmes conditions initiales en $(t_0, x_0) \in U$ alors $\varphi_1 = \varphi_2$ sur $J_1 \cap J_2$:
En effet, grâce au théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe une unique solution φ de (1) sur $J_1 \cap J_2$ or ${\varphi_1}_{J_1}$ et ${\varphi_2}_{J_2}$ sont aussi solutions donc $\forall t \in J_1 \cap J_2$, $\varphi(t) = \varphi_1(t) = \varphi_2(t)$.

- Montrons alors que l'on peut définir une solution de (1) sur $J_1 \cup J_2$ (on suppose qu'aucun des intervalles J_1 ou J_2 n'est inclus dans l'autre, sinon, il n'y a rien à faire) : on pose $\psi(t) = \begin{cases} \varphi_1(t) & \text{si } t \in J_1 \setminus J_2 \\ \varphi_2(t) & \text{si } t \in J_2 \setminus J_1 \\ \varphi(t) \text{ si } t \in J_1 \cap J_2 \end{cases}$. ψ est bien définie sur $J_1 \cup J_2$, pour tout $t \in J_1 \cup J_2$, on vérifie que $\psi'(t) = f(t, \psi(t))$ (en distinguant les différents cas).

- Soit A l'ensemble des couples (J, φ) solution de (1), on pose $K = \bigcup_{(J,\varphi) \in A} J$ alors K est un intervalle maximal et il existe une solution de (1) ψ définie sur K :
Il suffit de poser $\psi(t) = \varphi(t)$ pour $t \in J$ et (J, φ) solution de (1). ψ est bien solution de (1) sur K et la définition de $\psi(t)$ ne dépend pas de l'intervalle J contenant t vu le premier point. K est un intervalle en tant que réunion d'intervalles contenant t_0.

- Montrons pour conclure que K est un ouvert :
  Soit a la borne inférieure (dans $\overline{\mathbb{R}}$) de K.
  - Si $a = -\infty$ alors c'est terminé.
  - Si a est fini et si $a \in K$ alors ψ est définie en a. Si on considère le problème de Cauchy avec la condition initiale $x(a) = \psi(a)$, on sait qu'il existe un Intervalle L, voisinage de a, et une solution θ telle que $\theta(a) = \psi(a)$. Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\subset L \cap K$ et $\psi = \theta$ sur $[a, a+\varepsilon[$ donc θ prolonge ψ à gauche de a. On obtient alors une contradiction avec la maximalité de ψ.

  Conclusion : K ne contient pas sa borne inférieure, de même pour la borne supérieure donc K est un intervalle ouvert ■

Proposition 8.2.1. *Soit φ une solution de (1) sur l'intervalle J, si a est une borne finie de J et si φ admet une limite b en a avec $(a, b) \in U$, alors on peut prolonger φ sur un intervalle J' contenant strictement J.*

Dém : On suppose par exemple que a est la borne inférieure de J. On prolonge φ par continuité en a par $\varphi(a) = b$. Or $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$ donc, par continuité de f, $\varphi'(t)$ admet une limite quand $t \to a$. On utilise le théorème du prolongement dérivable donc φ est de classe $\mathcal{C}^1$ en a.
On utilise alors la fin de la démonstration du théorème précédent et on trouve en fait un prolongement de φ sur un voisinage de a ■

***Remarque* 8.2.2.**

(*i*) *On a prouvé de plus que toute solution de (1) sur son intervalle de définition était la restriction d'une solution maximale.*

(*ii*) *Si $U = \mathbb{R}^2$ et si une borne a de K intervalle maximal est finie alors φ n'est pas bornée au voisinage de a.*

Question
Démontrer l'affirmation (*ii*) de la remarque ci-dessus.

b) Exemples d'équations différentielles à variables séparables

Définition 8.2.4. ***Équation à variables séparables***
On dit que l'équation différentielle $x' = f(t, x)$ est à variables séparables ssi$_{\text{déf}}$ elle peut se mettre sous la forme

$$p(t) = q(x)x' \text{ ou } p(t)\,\mathrm{d}t = q(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{ou encore} \quad q(x)\,\mathrm{d}t = p(t)\,\mathrm{d}x.$$

Dans le dernier cas, attention aux intégrales particulières !
On cherche des solutions sur $I \times J$ où $p \in \mathcal{C}(I)$, $q \in \mathcal{C}(J)$, q ne s'annulant pas.

Résolution : on a $p(t) = q(x)x' \Leftrightarrow Q(x) = P(t) + C \Leftrightarrow x = Q^{-1}[P(t) + C]$ défini pour $P(t) + C \in Q(J)$. Prendre pour exemple $\mathrm{e}^t = \mathrm{e}^x x'$.
Dém : Ici $I = J = \mathbb{R}$, en intégrant on obtient $\mathrm{e}^t + c = \mathrm{e}^x$ soit $x = \ln(\mathrm{e}^t + C)$. À partir de là, on peut déterminer les solutions maximales selon la valeur de la constante C (qui est calculée en fonction des conditions initiales) :

$$\begin{cases} \text{si } C \geqslant 0 & x \text{ est définie sur } \mathbb{R} \\ \text{si } C < 0 & x \text{ est définie sur }]\ln(-C), +\infty[\end{cases}$$ ■

Équations qui s'y ramènent

(*i*) $F(t, x') = 0$ non résoluble en x' (*On paramétre la courbe* $F(u, v) = 0$*, on a alors* $t = u(s)$, $\mathrm{d}x = v(s)\,\mathrm{d}t = v(s)u'(s)\,\mathrm{d}s$.)
Les solutions se déduisent l'une de l'autre par l'addition d'une constante.
Dém : Paramétrer une courbe ici, c'est trouver deux fonctions u et v définies sur un intervalle I telles que

$$F(u, v) = 0 \Leftrightarrow (\exists s \in I \mid u = u(s),\ v = v(s)) \text{ et } \forall s \in I,\ F(u(s), v(s)) = 0.$$

On suppose en outre que les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$.
On a alors $F(t, x') = 0 \Leftrightarrow t = u(s),\ x'(t) = v(s)$. On se place sur un intervalle $J \subset I$ sur lequel u' ne s'annule pas donc garde un signe constant (u' est continue sur un intervalle) par conséquent $t \in J \mapsto u(t) \in u(J)$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme (i.e. u et u^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^1$). On peut écrire les équivalences

$$\begin{cases} t = u(s) \\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v(s) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = u(s) \\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = v(s)u'(s) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = u(s) \\ x(s) = x_0 + V(s) \end{cases}$$

où V est une primitive de v.
Les solutions (locales) s'écrivent alors $x(t) = x_0 + V(u^{-1}(t))$ et elles se déduisent l'une de l'autre par l'addition d'une constante ■

(*ii*) $F(x, x') = 0$ non résoluble en x' (*On paramétre la courbe* $F(u, v) = 0$*, on a alors* $x = u(s)$, $\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}x}{v(s)} = \dfrac{u'(s)}{v(s)}\,\mathrm{d}s$.)
Les solutions se déduisent l'une de l'autre par translation sur le paramètre.
Dém : On paramètre comme ci-dessus donc $x = u(s)$, $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v(s)$. On se place sur un intervalle $J \subset I$ où u' et v ne s'annulent pas.
On utilise ensuite la dérivation des applications composées :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} \times \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v(s) = u'(s)\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

ce qui est équivalent à $\dfrac{u'(s)}{v(s)}\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 1$ (équation à variables séparables).
Soit $V(s)$ une primitive de $\dfrac{u'(s)}{v(s)}$ sur J alors cette dernière relation est équivalente à $V(s) = t - t_0$ avec V qui s'inverse comme au premier cas ci-dessus : $V'(s) \neq 0$ donc $s \mapsto V(s)$ réalise une bijection de J sur $V(J)$, on a donc $s = V^{-1}(t - t_0)$.
Les solutions s'écrivent $x(t) = u\,(V^{-1}(t - t_0))$ et les solutions se déduisent l'une de l'autre par translation sur le paramètre ■

(*iii*) $P(t, x) + Q(t, x)x' = 0$ où $\omega(t, x) = P(t, x)\,\mathrm{d}t + Q(t, x)\,\mathrm{d}x$ est une forme différentielle exacte. Si $\omega(t, x) = F'(t, x)$ (différentielle de F) alors les solutions vérifient $F(t, x) = \lambda$ où λ est une constante réelle.
Ceci n'est pas vraiment une équation différentielle à variables séparables mais c'est un exemple utile.

Dém : Q est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son ensemble D de définition donc c'est une application continue, $U = \{(t,x) \in D \mid Q(t,x) \neq 0\}$ est un ouvert de D et on suppose que c'est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Sur U, $x' = -\dfrac{P(t,x)}{Q(t,x)}$ est une équation différentielle qui vérifie les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz ($(t,x) \mapsto -\dfrac{P(t,x)}{Q(t,x)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ en tant que rapport de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$) donc il existe des solutions.
Soit $x(t)$ une solution définie sur un intervalle maximal I pour une condition initiale donnée. Soit F une primitive de ω ($P(t,x) = \dfrac{\partial F}{\partial t}$, $Q(t,x) = \dfrac{\partial F}{\partial x}$), on pose $G(t) = F(t, x(t))$ et par la règle de la chaîne (cf. remarque (ii) page 94) alors $G'(t) = P(t,x(t)) + Q(t,x(t))x'(t)$ donc

$$G'(t) = P(t,x(t)) + Q(t,x(t))x'(t) = 0 \Leftrightarrow F(t,x(t)) = \lambda \blacksquare$$

Questions : Résoudre les équations différentielles suivantes :

(i) $t = x'^3 + 2x' - 1$.

(ii) $x = x'^3 + 2x' - 1$ (prendre $s = x'$ comme paramètre).

(iii) $(x - 2t)x' + t - 2x = 0$.

8.2.2 Systèmes différentiels autonomes

DÉFINITION 8.2.5. ***Système différentiel autonome d'ordre 2***

$$(1) \qquad \begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases}$$

où f et g sont des fonctions à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, est un système différentiel autonome d'ordre 2 (ce qu'on peut écrire : $X' = F(X)$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $F(x,y) = \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}$).
On dit que $\varphi(t) = (x(t), y(t))$ fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle J de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ est une solution d'un tel système ssi$_{\text{déf}}$ $\varphi' = F(\varphi) = (f(\varphi), g(\varphi))$.

DÉFINITION 8.2.6. ***Système différentiel autonome d'ordre 1***
Le cas particulier $x' = f(x)$, où f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I intervalle de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est appelé système différentiel autonome d'ordre 1. Il n'est pas nécessaire ici de supposer I ouvert.

PROPOSITION 8.2.2. ***Invariance par translation***
Si φ est une solution du système (1) alors $\varphi_1(t) = \varphi(t + t_1)$ est aussi solution de ce système pour tout $t_1 \in \mathbb{R}$.

Dém : Immédiat ici en effet

$$\varphi_1'(t) = \varphi'(t+t_1) = F(\varphi(t+t_1)) = F(\varphi_1(t))$$

donc φ_1 est aussi solution de (1) et si φ est une solution maximale, il en est de même que φ_1 ■

***Remarque* 8.2.3.** *On retrouve l'invariance par translation mise en évidence lors de la résolution de l'équation $x' = ax$, où a est un endomorphisme de F.*

PROPOSITION 8.2.3. *Soit le système différentiel autonome (1) d'ordre 2, au voisinage d'un point $(x_0, y_0) \in U$ où $(f(x_0, y_0), g(x_0, y_0)) \neq (0, 0)$ alors la résolution locale se ramène à la résolution de deux équations différentielles du premier ordre. Réciproquement la résolution d'une équation différentielle du premier ordre se ramène à la résolution d'un système différentiel autonome.*

Dém :

- En effet, si on prend le système (1), et si, par exemple, $f(x_0, y_0) \neq 0$, alors $f(x, y) \neq 0$ sur un voisinage ouvert U de (x_0, y_0) car f est continue.
  On considère alors l'équation différentielle $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{g(x,y)}{f(x,y)}$; x étant la variable avec la condition initiale $y(x_0) = y_0$ qui s'écrit $y' = F(x, y)$ avec F de classe $\mathcal{C}^1$ (F est le rapport de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$) sur un ouvert U.
  - Le théorème de Cauchy-Lipschitz nous assure l'existence d'une solution maximale $y = \psi(x)$ sur I intervalle : première équation différentielle.
  - On résout ensuite l'équation différentielle $x'(t) = f(x(t), \psi(x(t)))$ avec la condition initiale $x(t_0) = x_0$: deuxième équation différentielle.

  On obtient alors une fonction $\varphi(t) = (x(t), y(t))$ avec $y(t) = \psi(t)$. On a bien $x'(t) = f(x(t), y(t))$ et

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\times\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{g(x(t),y(t))}{f(x(t),y(t))}\times f(x(t),y(t))\\ &= g(x(t),y(t))\end{aligned}$$

  par conséquent φ est bien une solution (locale) du système (1).

- Réciproquement : si $y' = f(x, y)$ est une équation différentielle alors on lui associe le système différentiel autonome équivalent $(x, y) \mapsto (1, f(x, y))$: $x' = 1$ et $y' = f(x, y)$, il suffit de prendre $x = t$ comme paramètre ■

On retrouve une version du théorème de Cauchy-Lipschitz adaptée au cas des systèmes différentiels autonome d'ordre 2 :

THÉORÈME 8.9. **Théorème de Cauchy-Lipschitz**
Soit le système autonome (1), si on se donne $t_0 \in \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in U$ une condition initiale alors il existe un intervalle maximal J voisinage de t_0 et une unique solution de (1) $\varphi\ : t \mapsto \varphi(t)$ vérifiant la condition initiale ci-dessus (appelée là aussi condition de Cauchy). Ne pas oublier ici que φ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Dém : On admet ici l'unicité des solutions de (1) (il existe un seul théorème de Cauchy-Lipschitz qui rassemble les différentes versions que l'on a pu voir dans ce chapitre et pour lequel on a unicité des solutions).

- Si $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$ alors $x(t) = x_0$, $y(t) = y_0$ est solution de (1) sur $\mathbb{R}$.

- Sinon $(f(x_0, y_0), g(x_0, y_0)) \neq 0$, on se ramène grâce à la proposition précédente au cas d'une équation différentielle du premier ordre. On peut alors appliquer la première version du théorème de Cauchy-Lipschitz.

- L'existence d'une solution maximale se démontre de la même façon que dans le cas des équations différentielles non linéaires ■

***Remarque* 8.2.4.** *Soit $x'' = f(x, x')$ une équation différentielle autonome d'ordre 2 où $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ alors on peut lui associer le système différentiel autonome suivant $(x, y) \mapsto (y, f(x, y))$ en posant $y = x'$.*

Interprétation géométrique : Sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^2$, à chaque point M de coordonnées (x, y), on fait correspondre le vecteur (x', y'). L'application qui à (x, y) fait correspondre le vecteur (x', y') est un champ de vecteurs et la recherche d'une solution consiste à trouver une trajectoire $t \in J \mapsto (x(t), y(t))$ telle qu'en chaque point de paramètre t, le vecteur vitesse soit égal à $(x'(t), y'(t)) = F(x(t), y(t))$.
On se reportera à la figure faite page 39, faite avec l'équation différentielle $y' = y$, elle correspond au champ de vecteurs défini par $F(x, y) = \dfrac{a}{\sqrt{1+y^2}}(1, y)$ (on divise par la racine carrée car sur le dessin, les flèches ont toutes la même longueur).

Questions : Résoudre les équations différentielles suivantes :

(i) $y' = y^2$ avec comme condition initiale $y(0) = 1$.

(ii) $y' = \sqrt{y}$ avec comme condition initiale $y(0) = 0$.

(iii) $yy'' - 2y'^2 - y^2 = 0$ (se ramener à un système autonome).