CHAPITRE 9

Fonctions de plusieurs variables réelles

9.1 Calcul différentiel

Les applications f considérées dans cette section sont définies sur un ouvert U d'un espace E à valeurs dans F, où E et F sont des espaces vectoriels de dimension finie. Pour la pratique, on se limite au cas où $\dim E \leqslant 3$ et $\dim F \leqslant 3$ et où f est de classe $\mathcal{C}^1$. On pose pour la suite $p = \dim E$, $n = \dim F$.

9.1.1 Applications continûment différentiables

La notion de différentielle est très utile pour certaines démonstrations qui deviennent élémentaires, pour la Physique car la différentielle est définie intrinsèquement et enfin parce que c'est la meilleure généralisation que l'on peut donner de la dérivée d'une fonction d'une variable.

a) Définition

Comme on l'a dit, on veut généraliser la notion de dérivée, c'est à dire, remplacer $f(a+h)$ par une application affine $\alpha + l(h)$ où $\alpha \in F$, $l \in \mathcal{L}(E, F)$, telle que $f(a+h) = \alpha + l(h) + o(h)$ (la fonction $o(h)$ est une fonction qui s'écrit $\|h\|\varepsilon(h)$ où $\varepsilon(h)$ tend vers 0 quand h tend vers 0). Avec $h = 0$, on déduit que $\alpha = f(a)$.
Comme U est un ouvert, les fonctions de h que l'on a vu ci-dessus sont définies sur une boule ouverte de centre 0 : $B(0, r)$, l'application linéaire l est définie sur E en entier car tout vecteur x de E peut s'écrire $x = \lambda y$ où $y \in B(0, r)$. Ceci permet de prouver que l est unique.
Dém : En effet, si l et l' sont deux applications linéaires qui vérifient la même propriété alors

$$f(a+h) = f(a) + l(h) + \|h\|o(1) = f(a) + l'(h) + \|h\|o(1)$$

soit $l(h) - l'(h) = \|h\|o(1)$ et comme U est un ouvert alors il existe une boule ouverte $B(a, r)$ contenue dans U. L'égalité que l'on vient d'écrire est donc valable pour $a + h \in B(a, r)$ soit $h \in B(0, r)$. Soit $u \in S(0, 1)$ un vecteur de la sphère unité on pose $h = tu$ où $t < r$

$$l(h) - l'(h) = l(tu) - l'(tu) = t[l(u) - l'(u)] = to(1)$$

donc, en divisant par t, on obtient $l(u) - l'(u) = o(1)$ où $o(1)$ est une fonction de t qui tend vers 0 quand $t \to 0$. On peut passer à la limite quand t tend vers 0 ce qui donne $l(u) - l'(u) = 0$. $l - l'$ est une application linéaire qui est nulle sur la sphère unité donc $l - l'$ est nulle sur E par homothétie (tout vecteur x de E peut s'écrire $x = \|x\|u$ avec $u \in S(0,1)$).
Conclusion : si une telle application existe alors elle est unique et on voit ici l'intérêt de prendre des fonctions définies sur un ouvert U ■

DÉFINITION 9.1.1. ***Différentielle***
On dit que f est différentiable en $a \in U$ ssi$_{\text{déf}}$ il existe une application linéaire l de E dans F telle que $f(a+h) = f(a) + l(h) + o(h)$.
l est appelée application linéaire tangente à f en a ou différentielle de f en a et notée $\mathrm{d}f(a)$, $\mathrm{D}\,f(a)$ ou encore plus simplement (pour un public averti) $f'(a)$.

***Remarque* 9.1.1.** *Si $E = \mathbb{R}$ alors $f'(a)(h) = f'(a).h$ i.e. on confondra différentielle et dérivée (ce qui justifie a posteriori la notation).*

Dém : Une application linéaire de $E = \mathbb{R}$ dans F espace vectoriel de dimension finie s'écrit $l(h) = hu$ où $u \in F$.
Si f est différentiable en a alors $f(a+h) = f(a) + hu + o(h)$. On déduit de cette écriture que f est dérivable en a et que sa dérivée vaut u ■
On rappelle la notion de dérivée selon un vecteur et de dérivée partielle que l'on a vu dans les révisions du cours de première année.
Soit $a \in U$ et h un vecteur non nul de E alors on sait qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $t \in [-\delta, \delta]$, $a + th \in U$. On peut alors définir la fonction $\varphi_h(t) = f(a+th)$ sur $[-\delta, \delta]$.

DÉFINITION 9.1.2. ***Dérivée d'une fonction selon un vecteur***
Si la fonction φ_h est dérivable en 0, on dit que f admet une dérivée en $a \in U$ selon le vecteur h et on pose $\mathrm{D}_h\,f(a) = \varphi'_h(0)$.

DÉFINITION 9.1.3. ***Dérivées partielles***
Lorsque l'on prend les vecteurs $(e_1, \dots, e_p)$ d'une base $\mathcal{B}$ de E alors on peut écrire $f(a) = f(a_1e_1 + \cdots + a_pe_p) = f_{\mathcal{B}}(a_1, \dots, a_p)$. Si f admet des dérivées selon ces vecteurs, on parle de dérivée partielle pour $f_{\mathcal{B}}$. On note alors

$$\mathrm{D}_j\,f(a) = \frac{\partial f_{\mathcal{B}}}{\partial x_j}(a_1, \dots, a_p).$$

***Remarque* 9.1.2.** *Ici, contrairement à ce qui a été vu dans les révisions du cours de première année, le choix d'une base de E est essentiel pour définir une dérivée partielle (et il faut connaître tous les vecteurs de cette base pour définir correctement la dérivée partielle D_j) mais il suffit de connaître le vecteur e_j pour calculer la dérivée de f selon ce vecteur. Dans la pratique, on ne fait pas la différence entre f et $f_{\mathcal{B}}$ lorsqu'il n'y a pas de confusion à craindre.*

PROPOSITION 9.1.1. *Si f est différentiable au point a, elle est continue en ce point et admet des dérivées selon tout vecteur h ; en outre,*

$$f'(a)(h) = \mathrm{D}_h\,f(a) = \sum_{j=1}^{p} h_j\,\mathrm{D}_j\,f(a)$$

dans toute base (e_j) de E où $h = \sum h_je_j$.

Dém :

- Continuité : comme $\lim_{h\to 0} f'(a)(h)+o(h)=0$ alors $f(a+h)=f'(a)(h)+o(h)\to f(a)$ et par conséquent f est continue en a.
- $\varphi_h(t)=f(a)+tf'(a)(h)+o(t)$ donc $\dfrac{f(a+th)-f(a)}{t}=f'(a)(h)+o(1)$ ce qui donne $\mathrm{D}_h\, f(a)=f'(a)(h)$.
- Enfin

$$\begin{aligned} f'(a)\left(\sum_{j=1}^{p} h_j e_j\right) &= \sum_{j=1}^{p} h_j f'(a)(e_j) \text{ par linéarité de } f'(a)\\ &= \sum_{j=1}^{p} h_j\, \mathrm{D}_{e_j}\, f(a)\\ &= \sum_{j=1}^{p} h_j\, \mathrm{D}_j\, f(a) \end{aligned}$$

car $\mathrm{D}_{e_j}\, f(a)=\lim_{t\to 0}\dfrac{f(a_1,\dots,a_j+t,\dots,a_p)}{t}=\mathrm{D}_j\, f(a)$ ■

***Remarque* 9.1.3.** *Une fonction peut être continue en 0, admettre des dérivées selon tous les vecteurs et cependant, ne pas être différentiable comme le montre l'exemple :*

$$f(x,y)=\begin{cases} 0 & si\ (x,y)=(0,0)\\ \dfrac{x^5}{(y-x^2)^2+x^4} & si\ (x,y)\neq(0,0)\end{cases}$$

DÉFINITION 9.1.4. ***Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$***
On dit que $f\in\mathcal{F}(U,F)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U si, pour tout vecteur h de $E\setminus\{0\}$, pour tout x de U, $\mathrm{D}_h\, f(x)$ existe et l'application $x\in U\mapsto \mathrm{D}_h\, f(x)$ est continue sur U.
L'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur U est noté $\mathcal{C}^1(U,F)$.

b) Le théorème fondamental, fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

THÉORÈME 9.1. **Théorème fondamental**
Si, dans une base de E, les dérivées partielles sont continues sur U, alors f est différentiable en tout point a de U. En outre, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et on a équivalence.

Dém : Démonstration non exigible.
On se place dans le cas où $\dim E=2$, la généralisation ne présentant pas de difficultés. On choisit donc une base (e_1,e_2) de E et on écrit tout dans cette base. Pour simplifier les notations on va donc écrire $f(x,y)$ à la place de $f(xe_1+ye_2)$. Toutes les normes étant équivalentes, on choisit la norme infinie.

On définit la fonction $g_1(t) = f(x+ht, y+k) - f(x, y+k) - ht\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$: la dérivée de $t \mapsto f(x+ht, y+k)$ fait intervenir la dérivée, partielle par rapport à x d'où

$$g_1'(t) = h\frac{\partial f}{\partial x}(x+ht, y+k) - h\frac{\partial f}{\partial x}(x,y).$$

De même si on pose $g_2(t) = f(x, y+kt) - f(x,y) - kt\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ alors

$$g_2'(t) = k\frac{\partial f}{\partial x}(x, y+kt) - k\frac{\partial f}{\partial x}(x,y).$$

On utilise alors l'inégalité des accroissements finis pour évaluer les deux différences $g_1(1) - g_1(0)$ et $g_2(1) - g_2(0)$:

$$\|g_1(1) - g_1(0)\| \leqslant \sup_{t\in[0,1]} \|g_1'(t)\| \leqslant |h| \sup_{t\in[0,1]} \left\|\frac{\partial f}{\partial x}(x+ht, y+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right\|$$
$$\|g_2(1) - g_1(0)\| \leqslant \sup_{t\in[0,1]} \|g_2'(t)\| \leqslant |k| \sup_{t\in[0,1]} \left\|\frac{\partial f}{\partial x}(x, y+kt) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right\|$$

On utilise maintenant la continuité des dérivées partielles :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \mid \|(h_1,k_1)\| \leqslant \eta \Rightarrow \left\|\frac{\partial f}{\partial x}(x+h_1, y+k_1) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right\| \leqslant \varepsilon$$

donc, pour $\|(h,k)\| \leqslant \eta$ on a $\|(ht,k)\| \leqslant \eta$ et $\|(0,kt)\| \leqslant \eta$ pour $t \in [0,1]$ et on peut majorer les différences $\|g_1(1) - g_1(0)\|$ par $|h|\varepsilon$ et $\|g_2(1) - g_2(0)\|$ par $|k|\varepsilon$.
On obtient alors

$$\begin{aligned}\|g_1(1) - g_1(0) + g_2(1) - g_2(0)\| &\leqslant \left\|f(x+h, y+k) - f(x,y) - h\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - k\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right\| \\ &\leqslant \|g_1(1) - g_1(0)\| + \|g_2(1) - g_2(0)\| \leqslant \varepsilon(|h| + |k|) \\ &\leqslant \varepsilon\|(h,k)\|.\end{aligned}$$

On peut alors écrire $f(x+h, y+k) - f(x,y) = h\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + k\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) + o\left(\|(h,k)\|\right)$
donc f est bien différentiable en (x,y) et $\mathrm{D}_{(h,k)}\, f(x,y) = h\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + k\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.
$(x,y) \mapsto \mathrm{D}_{(h,k)}\, f(x,y)$ est continue par conséquent f est bien C^1.
La généralisation peut se faire de la même manière :
On étudie la différence $f(x_1+h_1, \ldots, x_p+h_p) - f(x_1, \ldots, x_p)$ et on fait intervenir les fonctions

$$g_j(t) = f(x_1, \ldots, x_j + th_j, \ldots, x_p + h_p) - f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_p + h_p) - h_j\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \ldots, x_p).$$

On a alors

$$\begin{aligned}&f(x_1+h_1, \ldots, x_p+h_p) - f(x_1, \ldots, x_p) - \sum_{j=1}^{p} h_j\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \ldots, x_p) \\ &\qquad = \sum_{j=1}^{p} g_j(1) - g_j(0).\end{aligned}$$

La fin de la démonstration est identique et la réciproque est évidente ■

***Remarque* 9.1.4.** *On peut reprendre alors la définition 9.1.4 ci-dessus et dire que f est de classe $\mathcal{C}^1$ ssi f est différentiable et $x \in U \mapsto f'(x) \in \mathcal{L}(E, F)$ est continue.*

Dém : C'est une conséquence du théorème précédent, la continuité de $x \mapsto f'(x)$ se vérifie plus facilement avec les dérivées partielles ■

PROPOSITION 9.1.2. ***Différentielle d'une application linéaire***
Si f est une application linéaire de E dans F, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur E et, pour tout point a de E, $f'(a) = f$ i.e. la différentielle de f est constante.

Dém : Ce résultat peut paraître surprenant mais il est immédiat :
$f(a+h)-f(a) = f(h)$ car f est linéaire qui s'écrit aussi $f(a+h)-f(a) = f(h)+o(h)$ donc f est bien différentiable et sa différentielle vaut f (qui est une application constante et donc, si on veut la différencier à nouveau, on trouvera 0) ■

THÉORÈME 9.2. **Différentielle du composé de deux fonctions**
Si $f \in \mathcal{C}^1(U, F)$, $g \in \mathcal{C}^1(V, G)$ avec $f(U) \subset V$ alors $g \circ f \in \mathcal{C}^1(U, G)$ et pour tout a de U, $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \circ f'(a)$.

Dém : Le principe de la démonstration est simple avec les notations employées mais il est important de comprendre les quantités que l'on manipule.
f différentiable en a : $f(a+h) = f(a)+f'(a)(h)+o(h) = f(a)+f'(a)(h)+\|h\|\varepsilon_1(h)$,
g différentiable en $f(a)$: $g(f(a)+u) = g(f(a)) + g'(f(a))(u) + o(u)$ en prenant ici $u = f'(a)(h) + o(h) = f'(a)(h) + \varepsilon_1(h) = O(h)$ et $o(u) = \|u\|\varepsilon_2(u)$.

$$\begin{aligned} g(f(a+h)) &= g(f(a)) + g'(f(a))[f'(a)(h) + \|h\|\varepsilon_1(h)] + \|u\|\varepsilon_2(u) \\ &= g(f(a)) + g'(f(a))(f'(a)(h)) + \underbrace{\|h\|g'(f(a))(\varepsilon_1(h)) + \|u\|\varepsilon_2(u)}_{=\Delta(h)}. \end{aligned}$$

- $\|u\| \leqslant \|f'(a)(h)\| + \|h\|.\|\varepsilon_1(h)\| \leqslant M\|h\| + \|h\|.\|\varepsilon_1(h)\|$ car $f'(a)$ est une application linéaire continue et $\|f'(a)(x)\| \leqslant M\|x\|$ d'où, pour $\|h\|$ suffisamment petit, $\|u\| \leqslant (M+1)\|h\|$ donc, lorsque $h \to 0$, $u \to 0$ et par conséquent $\varepsilon_2(u) = \varepsilon_4(h)$ qui tend vers 0 quand $h \to 0$.
  Conclusion de ce premier point : $\|u\|\varepsilon_2(u) = o(h)$.

- $\|g'(f(a))(\varepsilon_1(h))\| \leqslant M'\|\varepsilon_1(h)\|$ (toujours grâce à la continuité des applications linéaires en dimension finie) par conséquent $g'(f(a))(\varepsilon_1(h)) = \varepsilon_4(h)$ et $\|h\|g'(f(a))(\varepsilon_1(h)) = o(h)$.

On a ainsi $\Delta(h) = o(h)$ donc $g(f(a+h)) = g(f(a)) + g'(f(a))(f'(a)(h)) + o(h)$ i.e. $g \circ f$ est différentiable en a, $(g \circ f)'(a) = g'(f(a))(f'(a)) = g'(f(a)) \circ f'(a)$, le $\circ$ désignant la composition des applications linéaires.
Enfin, pour terminer, il reste à montrer que $x \in U \mapsto g'(f(x)) \circ f'(x) \in \mathcal{L}(E, G)$ est continue :

- $x \in U \mapsto g'(f(x)) \in \mathcal{L}(F, G)$ est continue comme composée d'applications continues,

- Si $G_1 = \mathcal{L}(F, G)$ et $F_1 = \mathcal{L}(E, F)$ alors $(v, u) \in G_1 \times F_1 \mapsto B(v, u) = v \circ u$ est continue car c'est une application bilinéaire en dimension finie.

Par conséquent $x \in U \mapsto (g'(f(x)), f'(x)) \mapsto B(g'(f(x)), f'(x)) = g'(f(x)) \circ f'(x)$ est bien continue par composition ■

Définition 9.1.5. ***Difféomorphisme***
Soit $f \in \mathcal{C}^1(U, F)$, on dit que f est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ de U sur $f(U) = V$ ouvert de F ssi$_{déf}$ f est une bijection de U sur $f(U)$ et son application réciproque f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $f(U)$.

***Remarque* 9.1.5.** *La notion de difféomorphisme est utile pour les changements de variables dans les intégrales multiples et elle est essentielle pour tous les prolongements que l'on peut faire sur le calcul différentiel.*

Proposition 9.1.3. *Si f est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de $U \subset E$ sur $f(U) \subset F$ alors* $\dim E = \dim F$, *pour tout x de U, $f'(x)$ est un isomorphisme et*
$$(f^{-1})'(f(x)) = (f'(x))^{-1}.$$

Dém : Soit $x \in U$ alors, avec $g = f^{-1}$ on a $(g \circ f)(x) = x$.
Par hypothèse g et f sont différentiables donc la différenciation de cette relation donne
$$\forall x \in U,\ (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \circ f'(x) = \mathrm{Id}_E\,.$$
De même $\forall y \in V$, $(f \circ g)'(y) = f'(g(y)) \circ g'(y) = \mathrm{Id}_F$ donc en posant $y = f(x)$ on obtient
$$\begin{cases} g'(y) \circ f'(x) & = \mathrm{Id}_E \\ f'(x) \circ g'(y) & = \mathrm{Id}_F \end{cases}$$
donc $f'(x)$ et $g'(f(x))$ sont des applications linéaires inverses l'une de l'autre. $f'(x)$ est un isomorphisme car c'est une application linéaire bijective.
On peut alors conclure que $\dim E = \dim F$ ■

Théorème 9.3. L'ensemble $\mathcal{C}^1(U, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(U, F)$ et l'application $\mathrm{D}\ : f \in \mathcal{C}^1(U, F) \mapsto f' \in \mathcal{C}(U, \mathcal{L}(E, F))$ est linéaire.

Dém : On a bien évidemment $\mathcal{C}^1(U, F) \subset \mathcal{C}(U, F)$ et $0 \in \mathcal{C}^1(U, F)$ (application nulle). Montrons la stabilité par combinaison linéaire :
Soit $(f, g) \in \mathcal{C}^1(U, F)^2$, par définition on a
$$\begin{aligned} \forall x \in U, f(x+h) &= f(x) + f'(x)(h) + o(h) \\ g(x+h) &= g(x) + g'(x)(h) + o(h) \end{aligned}$$
donc pour tout couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,
$$(\lambda f + \mu g)(x+h) = (\lambda f + \mu g)(x) + \lambda f'(x)(h) + \mu g'(x)(h) + o(h)$$
donc $\lambda f + \mu g$ est différentiable, de différentielle $\lambda f'(x) + \mu g'(x)$. En outre l'application $x \in U \mapsto \lambda f'(x) + \mu g'(x) \in \mathcal{L}(E, F)$ est continue.
Conclusion : $\mathcal{C}^1(U, F)$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(U, F)$ ■

***Remarque* 9.1.6.** *Il faut noter ici que f' est une application continue de U dans $F_1 = \mathcal{L}(E, F)$ qui est aussi un espace vectoriel de dimension finie (à suivre).*

Proposition 9.1.4. ***Caractérisation d'une application de classe $\mathcal{C}^1$ par ses fonctions coordonnées***
On a l'équivalence suivante, si on choisit (ε_i) une base de F et si on note f_i les applications coordonnées de f dans cette base :
$$f \in \mathcal{C}^1(U, F) \Leftrightarrow (\forall i \in [\![1, n]\!],\ f_i \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}))$$
et $\mathrm{D}_h f = \sum \mathrm{D}_h f_i \varepsilon_i$.

Dém :

- ($\Rightarrow$) Soit (ε_i^*) la base duale de (ε_i). Les formes linéaires ε_i^* sont les applications coordonnées donc $f_i = \varepsilon_i^* \circ f$. ε_i^* étant une forme linéaire est différentiable, de différentielle constante (cf. proposition 9.1.2 page 441) donc elle est de classe $\mathcal{C}^1$. Par composition, $f_i \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$.

- ($\Leftarrow$) Pour tout i, f_i est de classe $\mathcal{C}^1$, il en est de même de $f_i\varepsilon_i$. $f = \sum_{i=1}^{n} f_i\varepsilon_i$ est $\mathcal{C}^1$ comme somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ ■

c) Matrice jacobienne, jacobien

Définition 9.1.6. ***Matrice jacobienne, jacobien***
Soit $f \in \mathcal{C}^1(U, F)$, on choisit une base $(e_j)_{j\in[\![1,p]\!]}$ de E et $(\varepsilon_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une base de F, f_i désignent les applications coordonnées de f dans cette base. On appelle matrice jacobienne de f en $a \in U$ relativement à ces deux bases la matrice de l'application linéaire $f'(a)$ dans ces bases. On écrit alors : $M_f(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_p} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_p} \end{pmatrix}$ où les dérivées partielles sont prises au point a.
Si $E = F$, on parle du jacobien $J_f(a) = \det M_f(a)$ parfois noté $\dfrac{D(f_1, \ldots, f_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)}$.

Proposition 9.1.5. ***Propriétés des matrices jacobiennes***
Si $f \in \mathcal{C}^1(U, F)$, $g \in \mathcal{C}^1(V, G)$ avec $f(U) \subset V$, si l'on choisit des bases dans E, F, G alors

$$M_{g\circ f}(a) = M_g(f(a)).M_f(a).$$

Si f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme alors

$$M_{f^{-1}}(f(a)) = (M_f(a))^{-1}.$$

Dém :

- On traduit matriciellement la formule $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \circ f'(a)$ (le $\circ$ ici désigne la composition des applications linéaires) : le résultat est alors immédiat $M_{g\circ f}(a) = M_g(f(a)).M_f(a)$.

- On peut reprendre la formule précédente avec $g = f^{-1}$, $g \circ f = \mathrm{Id}_U$ donc $(g \circ f)'(a) = \mathrm{Id}_E$ (cf. proposition 9.1.3). On a alors $M_g(b) = (M_f(a))^{-1}$ avec $b = f(a)$ ■

Remarque* 9.1.7. *Régle de la chaîne
Cette dernière propriété généralise la règle de la chaîne que l'on a déjà vue en première année page 94, en effet, avec $h = g \circ f$, $\dim G = m$, on a

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial h_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial h_1}{\partial x_p} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial h_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial h_m}{\partial x_p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial y_p} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial g_m}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_m}{\partial y_p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_p} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_p} \end{pmatrix}$$

soit

$$\frac{\partial h}{\partial x_i} = \frac{\partial g}{\partial y_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial g}{\partial y_n}\frac{\partial f_n}{\partial x_i}$$

pour $i \in [\![1, p]\!]$ *et où* $x = (x_1, \ldots, x_p)$, $f = (f_1, \ldots, f_n)$.

Une propriété simple mais utile.

THÉORÈME 9.4. Soit $f \in \mathcal{C}^1(U, F)$ et $\varphi \in \mathcal{C}^1(I, E)$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ telle que $\varphi(I) \subset U$, on sait que $f \circ \varphi$ est différentiable et on a

$$\underbrace{(f \circ \varphi)'}_{\text{dérivée}}(t) = \underbrace{f'(\varphi(t))}_{\text{différentielle}}(\varphi'(t))$$

où on a confondu différentielle et dérivée pour les fonctions d'une variable.

Dém : La démonstration et l'interprétation de ce théorème pose toujours problème. En effet, la démonstration est une conséquence directe du théorème de différenciation du composé de deux fonctions différentiables suivit de l'identification de la dérivée et de la différentielle pour une fonction d'une variable réelle.
Cette version ne faisant pas l'unanimité, je propose donc une démonstration à la main (moins élégante mais plus pédagogique (?)) :
Revenons à la définition de la dérivée : $\varphi(t+h) = \varphi(t) + h\varphi'(t) + o(h)$ en utilisant la dérivabilité de φ, $\varphi'(t)$ désignant ici le vecteur dérivé. t et h désignent des réels, $t \in I$, $t + h \in I$.

$$\begin{aligned}\frac{(f\circ\varphi)(t+h) - (f\circ\varphi)(t)}{h} &= \frac{f(\varphi(t+h)) - f(\varphi(t))}{h}\\ &= \frac{f(\varphi(t) + h\varphi'(t) + o(h)) - f(\varphi(t))}{h}\\ &= \frac{f'(\varphi(t))(h\varphi'(t) + o(h))}{h} \text{ grâce à la différentiabilité de } f\\ &= f'(\varphi(t))(\varphi'(t) + o(1)) \text{ par linéarité de } f'(\varphi(t)).\end{aligned}$$

$f'(\varphi(t))$ est une application linéaire en dimension finie, elle est continue par conséquent $f'(\varphi(t))(o(1)) = o(1)$ donc $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(f\circ\varphi)(t+h) - (f\circ\varphi)(t)}{h} = f'(\varphi(t))(\varphi'(t))$.
Conclusion : $f \circ \varphi$ est dérivable et $(f \circ \varphi)'(t) = f'(\varphi(t))(\varphi'(t))$ ■

COROLLAIRE 9.5. Lorsque f est un difféomorphisme, l'image $f(\Gamma)$ d'une courbe paramétrée $\Gamma\ : t \in I \mapsto \varphi(t) \in F$ régulière à l'ordre 1 est une courbe régulière à l'ordre 1 (une courbe régulière à l'ordre 1 est une courbe sans point stationnaire).
La tangente à $f(\Gamma)$ en $M = f(\varphi(t))$ est donnée par $f'(\varphi(t))(\varphi(t))$.

Dém : La courbe $f(\Gamma)$ est paramétrée par $(I, f \circ \varphi)$ et on vient de démontrer que $(f \circ \varphi)'(t) = f'(\varphi(t))(\varphi'(t))$. Par hypothèse, Γ est régulière donc $\varphi(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$ et comme $f(\varphi(t))$ est inversible (cf. proposition 9.1.3 page 442) on a

$$\forall t \in I,\ f'(\varphi(t))(\varphi'(t)) \neq 0$$

donc $f(\Gamma)$ est régulière ■

THÉORÈME 9.6. **Théorème d'inversion globale**
Soit $f \in \mathcal{C}^1(U, E)$ une application injective de U ouvert $U \subset E$ alors
f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur $f(U)$ ssi le jacobien de f ne s'annule pas sur U.

Dém : Hors programme, cette démonstration utilise le théorème d'inversion locale : Si $f \in \mathcal{C}^1(U, E)$ et si $J_f(x) \neq 0$ alors il existe un voisinage de x, V_x tel que f_{V_x} soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de V_x sur $f(V_x)$ ■

***Remarque* 9.1.8.** *Si U est connexe par arc alors J_f le jacobien de f garde un signe constant, ce qui n'est pas forcément le cas si U n'est pas connexe par arc (U réunion de deux boules ouvertes disjointes).*

Dém : En effet, comme $x \in U \mapsto J_f(x) \in \mathbb{R}$ est une application continue alors $J_f(U)$ est un connexe par arc de $\mathbb{R}$ i.e. un intervalle I. Comme $0 \notin I$ alors on a soit $I \subset]-\infty, 0[$ soit $I \subset]0, +\infty[$. J_f garde donc une signe constant ■

Questions :

(i) Prouver que la fonction définie dans le remarque 9.1.3 page 439 vérifie bien les propriétés annoncées.

(ii) Soit $f \in \mathcal{C}^1(U, F)$ où U est un ouvert convexe. Si $(a, b) \in U^2$, on définit $F(t) = f(a + t(b - a))$ pour $t \in [0, 1]$. Montrer que F est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ et que $F'(t) = f'(a + t(b - a))(b - a)$.

(iii) Soit $a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ la somme d'une série entière de rayon $R > 0$. Montrer que $f(x, y) = \dfrac{a(x) - a(y)}{x - y}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]-R, R[^2$.

(iv) Est-ce que les applications $\begin{cases} p \ : (r, \theta) & \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta) \\ s \ : (r, \theta, \varphi) & \mapsto (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta) \end{cases}$ sont des $\mathcal{C}^1$-difféomorphismes sur des ensembles à préciser ?

9.1.2 Fonctions numériques continûment différentiables

On a déjà vu dans les révisions du cours de première année que $\mathcal{C}^1(U)$ ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur U à valeurs réelles était un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{C}(U)$.

THÉORÈME 9.7.
$\mathcal{C}^1(U)$ est une sous-algèbre de l'algèbre $\mathcal{C}(U)$.

Dém :

- On sait déjà que $\mathcal{C}^1(U)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(U)$ (cf. théorème 9.3).
- L'application $\mathbf{1}$: $x \in U \mapsto 1 \in \mathbb{R}$ est dans $\mathcal{C}^1(U)$.
- Soit $(f, g) \in \mathcal{C}^1(U)$ alors

$$\begin{aligned}(fg)(x+h) &= f(x+h)g(x+h) \\ &= (f(x) + f'(x)(h) + o(h))(g(x) + g'(x)(h) + o(h)) \\ &= (fg)(x) + g(x)f'(x)(h) + f(x)g'(x)(h) + o(h).\end{aligned}$$

Or l'application $h \mapsto g(x)f'(x)(h) + f(x)g'(x)(h)$ est linéaire et continue donc $fg \in \mathcal{C}^1(U)$ et on a de plus

$$\forall x \in U,\ \mathrm{D}(fg)(x) = f(x)\,\mathrm{D}\,g(x) + g(x)\,\mathrm{D}\,f(x).$$

On pouvait aussi utiliser la différentiabilité des applications composées avec les applications $\varphi\ : (f,g) \in \mathbb{R}^2 \mapsto fg$ et $\theta\ : x \in U \mapsto (f(x), g(x))$ ■

On a défini le gradient en dimension 2, cela se généralise à tout espace vectoriel euclidien E. En particulier, dans ce paragraphe, le corps de base sera $\mathbb{R}$. En utilisant l'isomorphisme canonique qui existe entre E et E^* son dual on peut poser :

Définition 9.1.7. *Gradient*
On définit le gradient d'une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur U ouvert de E euclidien par

$$f'(a)(h) = (\operatorname{grad} f(a)|h).$$

Proposition 9.1.6. *Dans une base orthonormale (e_i) de E, le gradient s'écrit :*

$$\operatorname{grad} f(a) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)e_i.$$

Dém : Par définition on a $f'(a)(h) = (\operatorname{grad} f(a)|h)$ d'une part et

$$f'(a)(h) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i = (V|h)$$

en posant V le vecteur de composantes $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ d'autre part.
On a par conséquent, pour tout h de E, $(\operatorname{grad} f(a)|h) = (V|h)$ ce qui entraîne que $V = \operatorname{grad} f(a)$ ■

Théorème 9.8. Inégalité des accroissements finis
Si U est un ouvert convexe et si $\operatorname{grad} f$ est une fonction bornée sur U alors

$$\forall (a,b) \in U^2,\ |f(b) - f(a)| \leqslant \|b-a\| \sup_{x\in U} \|\operatorname{grad} f(x)\|.$$

Dém : Soit $\varphi(t) = tb + (1-t)a$, comme U est convexe alors $\varphi(t) \in U$ pour tout $t \in [0,1]$. On pose $F(t) = f(\varphi(t))$ alors on a vu au théorème 9.4 page 444 que

$$F'(t) = (\operatorname{grad} f(\varphi(t))|\varphi'(t)) = (\operatorname{grad} f(\varphi(t))|b-a).$$

On utilise alors Cauchy-Schwarz :

$$|F'(t)| \leqslant \|\operatorname{grad} f(\varphi(t))\|.\|b-a\| \leqslant \sup_{x\in U} \|\operatorname{grad} f(x)\|.\|b-a\|$$

et on applique l'inégalité des accroissements finis à $F(1) - F(0) = f(b) - f(a)$:

$$|f(b) - f(a)| = |F(1) - F(0)| \leqslant (1-0) \sup_{t\in[0,1]} |F'(t)|$$

$$\leqslant \sup_{x\in U} \|\operatorname{grad} f(x)\|.\|b-a\|\ ■$$

COROLLAIRE 9.9. Si f de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert convexe U alors

$$f \text{ est constante ssi } \operatorname{grad} f = 0.$$

Dém :

($\Rightarrow$) Immédiat !

($\Leftarrow$) Comme $\operatorname{grad} f = 0$, il est borné sur U (!) donc

$$\forall (a,b) \in U^2,\ |f(b) - f(a)| \leqslant 0 \text{ d'où } f(b) = f(a).$$

Soit $a \in U$ alors pour tout $b \in U$, $f(b) = f(a)$ donc f est bien constante ■

***Remarque* 9.1.9.**

(*i*) *On peut généraliser cette dernière propriété au cas où U est un ouvert étoilé (on reste dans le cadre du programme) ou, encore mieux, au cas où U est un ouvert connexe par arc (là on sort du programme...)*
Dém : Si U est étoilé par rapport à a, la démonstration du corollaire précédent est encore valable.
Si U est un ouvert connexe par arc alors on admet la propriété suivante : pour tout $(a,b) \in U$ on peut relier a à b par un chemin continu formé de segments de droites.
Soit $a_0 = a, a_1, \dots, a_n = b$ les extrémités des segments en question alors, toujours avec le même argument que dans la démonstration du corollaire, on a $f(a) = f(a_1) = \dots = f(a_{n-1}) = f(b)$. On retrouve la même conclusion. ■

(*ii*) *Pour prouver que $\operatorname{grad} f = 0$, il suffit que les dérivées partielles de f dans une base (quelconque en fait) soient toutes nulles.*
Dém : Immédiat car si f est différentiable et si ses dérivées partielles sont nulles alors f' est nulle donc $\operatorname{grad} f = 0$ ■

DÉFINITION 9.1.8. ***Points critiques***
Soit $f \in \mathcal{C}^1(U)$, on dit que a est un point critique de f ssi$_{\text{déf}}$ $\operatorname{grad} f(a) = 0$ (i.e. toutes les dérivées partielles de f en a sont nulles).

THÉORÈME 9.10. **Condition nécessaire d'existence d'un extremum local**
Soit $f \in \mathcal{C}^1(U)$, si f présente en $a \in U$ un extremum local alors a est un point critique de f.

Dém : Comme U est un ouvert alors il existe $r > 0$ tel que $B(a,r) \subset U$.
Pour $h \in E$, soit $\varphi_h(t) = f(a + th)$ définie sur $I =]-\alpha, \alpha[$ avec $\alpha = \dfrac{r}{\|h\|}$. Comme a est un extremum local, φ_h passe aussi par un extremum local en 0 donc $\varphi_h'(0) = 0$ d'où

$$\varphi_h'(0) = D_h f(a) = f'(a)(h) = (\operatorname{grad} f(a) | h) = 0$$

et ceci pour tout h donc $\operatorname{grad} f(a) = 0$, a est bien un point critique de f ■

Questions :

(i) Soit $f \in \mathcal{C}^1(U)$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. On suppose que $\forall (x,y) \in U$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$. Que penser de f ?

(ii) Résoudre sur $\mathbb{R}^2$: $\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ pour f de classe $\mathcal{C}^1$.

(iii) Soit $a \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ et $b \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, chercher $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ tel que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = a(x,y)$, $f(0,y) = b(y)$.

(iv) Simplifier les expressions $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $y\dfrac{\partial f}{\partial x} - x\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

(v) Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$, calculer $\operatorname{grad} f \circ \varphi$.

(vi) Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, $\|.\|$ norme dans E espace euclidien. Calculer $\operatorname{grad} f(\|x\|)$.

9.1.3 Dérivées partielles d'ordre $k \geqslant 2$

a) Le théorème de Schwarz

On reprend ici la définition d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$.

Définition 9.1.9. ***Fonction de classe $\mathcal{C}^2$***

Soit $f \in \mathcal{F}(U, \mathbb{R})$, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U si f est de classe $\mathcal{C}^1$ et si la différentielle f' de f est de classe $\mathcal{C}^1$.

***Remarque* 9.1.10.**

(i) *En choisissant une base de E, cette dernière définition est encore équivalente au fait que toutes les dérivées partielles de f sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.*
Dém : Les coordonnées de $f'(x)$ dans $\mathcal{B}^*$, base duale la base $\mathcal{B}$ de E sont exactement les dérivées partielles de $f_{\mathcal{B}}$ ■

(ii) *On pourra alors définir les dérivées partielles* $\mathrm{D}_{i,j} f = \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\right)$.

Théorème 9.11. **Théorème de Schwarz**

Si $f \in \mathcal{C}^2(U)$ alors dans une base de E, $\mathrm{D}_{i,j} f = \mathrm{D}_{j,i} f$ pour tout couple (i,j), ce qui donne, avec les notations de Jacobi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Dém : Hors programme.

En dimension 2, on évalue $\Delta(h,k) = f(a,b) + f(a+h, b+k) - f(a+h, b) - f(a, b+k)$

en faisant intervenir les deux fonctions $g_1(t) = f(a+ht, b+k) - f(a+hy, b)$ et $g_2(t) = f(a+h, b+kt) - f(a, b+kt)$. On trouve

$$\begin{aligned}\Delta(h,k) &= hk\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}f(a+h\theta, b+k\theta')\\ &= hk\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(a+h\theta_1, b+k\theta_1')\end{aligned}$$

et on utilise la continuité des dérivées partielles secondes ■

Définition 9.1.10. ***Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$***
On peut définir la notion de fonction de classe $\mathcal{C}^k$ par récurrence sur k :
f est de classe $\mathcal{C}^k$ $\text{ssi}_{\text{déf}}$ (dans une base de E) pour tout i, les $\mathrm{D}_i f$ sont de classe $\mathcal{C}^{k-1}$. On notera $\mathcal{C}^k(U)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur U.
Dans la foulée, on peut définir

$$\mathcal{C}^\infty(U) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{C}^k(U).$$

Proposition 9.1.7. *L'ensemble $\mathcal{C}^k(U)$ ($1 \leqslant k \leqslant +\infty$) est une sous-algèbre de $\mathcal{C}(U)$.*

Dém : Tout d'abord on a $\mathcal{C}^k(U) \subset \mathcal{C}(U)$, 0 (l'application nulle) est dans $\mathcal{C}^k(U)$ et $\mathbf{1} : x \in U \mapsto 1$ est de classe $\mathcal{C}^k$.
Procédons par récurrence finie sur k pour montrer que, si $(f,g) \in \mathcal{C}^k(U)$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, alors $\lambda f + \mu g \in \mathcal{C}^k(U)$ et $f.g \in \mathcal{C}^k(U)$. On se place dans une base de E et on s'intéresse aux dérivées partielles. $k = 1$ a déjà été traité avec le théorème 9.7 page 445. On suppose donc la propriété vraie à l'ordre $k-1$.

- Grâce aux propriétés de la dérivation, on a

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda\frac{\partial}{\partial x_i}f(x) + \mu\frac{\partial}{\partial x_i}g(x)$$

  donc, par hypothèse de récurrence, $\lambda\frac{\partial}{\partial x_i}f(x) + \mu\frac{\partial}{\partial x_i}g(x) \in \mathcal{C}^{k-1}(U)$ pour tout i soit, par définition, $\lambda f + \mu g \in \mathcal{C}^k(U)$.

- De même

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f.g)(x) = f(x)\frac{\partial}{\partial x_i}g(x) + \frac{\partial}{\partial x_i}f(x).g(x)$$

  et la même démarche que ci-dessus nous permet d'affirmer que $f.g \in \mathcal{C}^k(U)$

On a donc prouvé par récurrence finie que $\mathcal{C}^k(U)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{C}(U)$ ■
Notations :

(i) Si $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{N}^p$, on pose $\mathrm{D}^\alpha f = \mathrm{D}_{1^{\alpha_1},\dots,p^{\alpha_p}} f = \dfrac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_p^{\alpha_p}}$ où $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_p$.

(ii) Dans le cas des fonctions de 2 variables, on utilisera souvent les notations de Monge :

$$p = \frac{\partial f}{\partial x},\ q = \frac{\partial f}{\partial y},\ r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ s = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} \text{ et } t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

PROPOSITION 9.1.8. *Les opérateurs différentiels* D_h *et en particulier les* D_i *sont des applications linéaires de* $\mathcal{C}^k(U)$ *dans* $\mathcal{C}^{k-1}(U)$ *pour* $1 \leqslant k < +\infty$.

Dém : C'est la démonstration qui vient d'être faite ■

b) RECHERCHE D'EXTREMUM

PROPOSITION 9.1.9. *Soit* $f \in \mathcal{C}^2(U)$, $(a,b) \in U$, $\varphi(t) = (a+th, b+tk)$ *telle que* $\varphi([0,1]) \subset U$, *on pose* $F(t) = f(\varphi(t))$. $F \in \mathcal{C}^2([0,1])$ *et*

$$F''(t) = h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\varphi(t)) + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\varphi(t)) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\varphi(t)).$$

Dém : On a déjà $F'(t) = h\dfrac{\partial f}{\partial x}(\varphi(t)) + k\dfrac{\partial f}{\partial y}(\varphi(t))$ (cf. question (ii) page 445), il suffit de dériver encore une fois en utilisant la même propriété (en fait la règle de la chaîne) :

On écrit $F'(t) = f_1(\varphi(t))$ avec $f_1(x,y) = h\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + k\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$. f_1 est de classe $\mathcal{C}^1$ (puisque f est de classe $\mathcal{C}^2$) donc, en utilisant la même démarche, on peut dériver à nouveau F' :

$$\begin{aligned}
F''(t) &= h\frac{\partial f_1}{\partial x}(\varphi(t)) + k\frac{\partial f_1}{\partial y}(\varphi(t)) \\
&= h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\varphi(t)) + hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\varphi(t)) + hk\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\varphi(t)) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\varphi(t)) \\
&= h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\varphi(t)) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\varphi(t)) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\varphi(t))
\end{aligned}$$

grâce au théorème de Schwarz ■

THÉORÈME 9.12. **Formule de Taylor reste intégral dans $\mathcal{C}^2(U)$**
Soit $f \in \mathcal{C}^2(U)$, U ouvert de $\mathbb{R}^2$, alors (en posant $\varphi(t) = (a+th, b+tk)$) :

$$\begin{aligned}
f(a+h, b+k) &= f(a,b) + h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \\
&\quad + \int_0^1 (1-t)\left[h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\varphi(t)) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\varphi(t)) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\varphi(t))\right] \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Dém : On applique Taylor reste intégral à la fonction $F(t) = f(a+th, b+tk)$ en utilisant la proposition précédente :

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \int_0^1 (1-t)F''(t)\,\mathrm{d}t$$

et on remplace : $F(1) = f(a+h, b+k)$, $F(0) = f(a,b)$, $F'(0) = h\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) + k\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)$

et enfin $F''(t) = h^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\varphi(t)) + 2hk\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\varphi(t)) + k^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\varphi(t))$ ■

Corollaire 9.13. **Formule de Taylor-Young**
On reprend les hypothèses ci-dessus, alors, au voisinage de (a, b) (en prenant un voisinage compact), on a

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + h\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) + hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) + \frac{k^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) + (h^2+k^2)\varepsilon(h, k)$$

où la fonction $\varepsilon(h, k)$ est une fonction qui tend vers 0 quand (h, k) tend vers $(0, 0)$.

Dém : Avec la formule ci-dessus, il suffit de prouver que

$$\Delta = \int_0^1 (1-t)\left[h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\varphi(t)) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\varphi(t)) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\varphi(t))\right] \mathrm{d}t - \frac{1}{2}\left[h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)\right] = o\left(\|(h, k)\|^2\right).$$

Comme souvent lorsqu'on a à faire la différence entre une intégrale et une autre expression, on essaye de tout mettre sous forme d'intégrale ce qui justifie ce qui suit :

$$\frac{1}{2}\left[h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)\right] = \int_0^1 (1-t)\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)\right) \mathrm{d}t$$

donc, en reportant dans l'expression de Δ on obtient

$$\Delta = \int_0^1 (1-t)\left[h^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\varphi(t)) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)\right) + 2hk\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\varphi(t)) - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)\right) + k^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\varphi(t)) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)\right)\right] \mathrm{d}t.$$

Grâce à la continuité des dérivées partielles, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, si $\|(h, k)\| \leqslant \eta$ on ait

$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\varphi(t)) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)\right| \leqslant \varepsilon$$
$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\varphi(t)) - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)\right| \leqslant \varepsilon$$
$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\varphi(t)) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)\right| \leqslant \varepsilon.$$

Donc $|\Delta| \leqslant \int_0^1 (1-t)[h^2\varepsilon + 2|hk|\varepsilon + k^2\varepsilon]\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\varepsilon}{2}(|h|+|k|)^2 \leqslant \varepsilon(h^2+k^2)$ (en utilisant Cauchy-Schwarz) ce qui se traduit exactement par $\Delta = o(\|(h, k)\|^2$ ■

Théorème 9.14. Existence d'un extremum local
Dans l'hypothèse où f est de classe C^2 sur U ouvert de $\mathbb{R}^2$ et où $p = q = 0$ en (a, b) (on utilise les notations de Monge) alors

si $rt - s^2 > 0$, $\begin{cases} r > 0 & \text{on a un minimum local strict en } (a,b) \\ r < 0 & \text{on a un maximum local strict en } (a,b) \end{cases}$

si $rt - s^2 < 0$ on n'a pas d'extremum, au voisinage de (a, b), la surface d'équation $z = f(x, y)$ présente un col.

Dém : On utilise la formule de Taylor-Young à l'ordre 2

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = Q(h, k) + \|(h, k)\|^2\varepsilon(h, k) \text{ où } Q(h, k) = \frac{1}{2}(rh^2 + 2shk + tk^2)$$

(avec les notations de Monge). Comme toutes les normes sont équivalentes, on a le libre choix de la norme pour faire le raisonnement.

- Si $rt - s^2 > 0$ alors $Q(h, k)$ est une forme quadratique définie, positive si $r > 0$, négative si $r < 0$:
  - Si $r > 0$ alors $rh^2 + 2shk + tk^2 = r\left[(h + 2\frac{s}{r}k)^2 + \frac{rt-s^2}{r^2}k^2\right] \geqslant 0$ donc $Q(h, k) \geqslant 0$ et $Q(h, k) = 0 \Rightarrow k = 0$ et $h + 2\frac{s}{r}k = 0$ d'où $h = k = 0$. Q est bien définie positive.
  - Si $r < 0$ alors en multipliant par -1 on peut utiliser le raisonnement précédent et conclure que Q est définie négative.

  On prend alors $\|(h, k)\| = \sqrt{|Q(h, k)|}$ (qui est une norme euclidienne) d'où

$$\begin{aligned} f(a + h, b + k) - f(a, b) &= Q(h, k) + \|(h, k)\|^2\varepsilon(h, k) \\ &= \pm\|(h, k)\|^2 + \|(h, k)\|^2\varepsilon(h, k) \\ &= \pm\|(h, k)\|^2(1 + \underbrace{\varepsilon(h, k)}_{=o(1)}) \end{aligned}$$

  et donc pour $\|(h, k)\|$ suffisamment petit, on a (par exemple) $|\varepsilon(h, k)| < 1$ soit $1 + \varepsilon(h, k) \geqslant 1 - |\varepsilon(h, k)| > 0$ par conséquent
  - $f(a + h, b + k) - f(a, b) > 0$ si $r > 0$ et $(h, k) \neq (0, 0)$, on a un minimum local strict,
  - $f(a + h, b + k) - f(a, b) < 0$ si $r < 0$ et $(h, k) \neq (0, 0)$, on a un maximum local strict.
- Si $rt - s^2 < 0$ alors on peut écrire en changeant de base $Q(h, k) = H^2 - K^2$:
  - Si $(r, t) \neq (0, 0)$, on peut supposer, compte tenu de la symétrie, que $r \neq 0$ et même, quitte à changer de signe, que $r > 0$. On reprend alors le calcul qui a été fait : $rh^2 + 2shk + tk^2 = r\left[(h + 2\frac{s}{r}k)^2 + \frac{rt-s^2}{r^2}k^2\right]$, on pose $H = \sqrt{r/2}(h + 2\frac{s}{r}k)$ et $K = \sqrt{\frac{s^2-rt}{2r}}k$.
  - Si $r = t = 0$ alors $Q(h, k) = shk = \dfrac{s}{4}[(h + k)^2 - (h - k)^2]$, on pose $H = \sqrt{s}\dfrac{h + k}{2}$ et $K = \sqrt{s}\dfrac{h - k}{2}$.

$Q'(h,k) = H^2 + K^2$ est une forme quadratique positive et si $Q'(h,k) = 0$ alors $H(h,k) = K(h,k) = 0$ donc $h = k = 0$ (en distinguant les deux cas que l'on a considéré ci-dessus). Q' est définie positive, $\|(h,k)\| = \sqrt{H^2 + K^2}$ définit bien une norme (euclidienne) d'où

$$f(a+h, b+k) - f(a,b) = H^2 - K^2 + o\left(H^2 + K^2\right) = H^2 - K^2 + o\left(\|(h,k)\|^2\right).$$

- Sur la droite $H = 0$ que l'on peut paramétrer par $(x,y) = (a,b) + tK$ (avec $K \neq 0$), on a

$$f(x,y) = f((a,b) + tK) = -t^2K^2 + o(t^2K^2) = -t^2K^2(1 + o(1)) < 0.$$

- Sur la droite $K = 0$, c'est la même chose :

$$f(x,y) = f((a,b) + tH) = t^2H^2 + o(t^2H^2) = t^2H^2(1 + o(1) > 0.$$

Dans ce cas, f ne présente en (a,b) ni un maximum, ni un minimum ■

Recherche pratique d'extrema :

(i) Sur un ouvert, on utilisera évidemment le théorème précédent.

(ii) Si f est définie sur $\overline{U}$ fermé, on étudiera ce qui se passe à l'intérieur et on fera une étude spéciale à la frontière ; les extrema se trouveront là où les conditions du théorème 9.14 seront remplies et éventuellement sur la frontière de U.

Questions :

(i) Dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ résoudre les équations

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \text{ avec } b^2 - ac \geqslant 0$$

(poser $u = x + \lambda y$, $v = x + \mu y$ pour la dernière équation).

(ii) Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$, on pose $F(x,y,z) = f\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)$. Résoudre $\Delta F = 0$, $F = 0$ sur $S(0,1)$, $\dfrac{\partial F}{\partial x}(1,0,0) = 1$.

(iii) Soit $f(x,y) = \sin x + \sin y + \cos(x+y)$ définie sur $\mathbb{R}^2$. Chercher les extrema de f.

(iv) Chercher les extrema de $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$ sur le triangle OAB fermé où $O = (0,0)$, $A = (1,0)$, $B = (0,1)$.

(v) Étude en $(0,0)$ de $f(x,y) = \lambda x^4 + y^4 + 4x^3y + x^5 - y^5$ (on précisera si $(0,0)$ est un extremum local ou non).

9.1.4 Notions sur les courbes et les surfaces

On demande de rappeler ici la notion de point régulier d'une courbe (cf. cours de première année page 42) ainsi que les notions de tangente et de normale (même paragraphe).
Dans le cas d'une courbe définie implicitement on pose la définition suivante :

DÉFINITION 9.1.11. ***Point régulier***
Soit $F \in \mathcal{C}^k(U)$ où $1 \leqslant k \leqslant +\infty$ et U un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Si $F(a,b) = 0$ et $\operatorname{grad} F(a,b) \neq 0$ on dit que le point (a,b) est régulier.

***Remarque* 9.1.11.** *Dans la définition d'une courbe implicite (cf. définition 5.2.5 page 95) on a choisi délibérément de ne prendre que des points réguliers.*

On ne donne pas de définition générale d'une surface, dans ce paragraphe, on dit qu'un sous-ensemble est une surface si c'est soit une surface paramétrée, soit l'ensemble des points satisfaisant une relation $F(x,y,z) = 0$.

a) SURFACE PARAMÉTRÉE

DÉFINITION 9.1.12. ***Surface paramétrée***
Soit U un ouvert connexe par arc du plan $\mathbb{R}^2$, f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur U à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, on appelle surface paramétrée par (U,f) l'ensemble des points de $\mathbb{R}^3$ donné par $\{f(u,v),\ (u,v) \in U\}$.

***Remarque* 9.1.12.** *Si on note $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ le repère orthonormé canonique de $\mathbb{R}^3$ alors l'ensemble des points de la surface paramétrée s'écrit :*

$$M = O + g(u,v)\overrightarrow{i} + h(u,v)\overrightarrow{j} + l(u,v)\overrightarrow{k}.$$

Dém : f est parfaitement définie par ses composantes dans la base canonique :

$$f(u,v) = (g(u,v), h(u,v), l(u,v))$$

d'où, en passant en mode point + vecteur de la géométrie affine, on a bien

$$\begin{aligned} M &= O + \overrightarrow{OM} \\ &= O + g(u,v)\overrightarrow{i} + h(u,v)\overrightarrow{j} + l(u,v)\overrightarrow{k} \ \blacksquare \end{aligned}$$

DÉFINITION 9.1.13. ***Paramétrisation cartésienne***
Soit une surface paramétrée, on dit que l'on a une paramétrisation cartésienne ssi$_{\text{déf}}$ on peut exprimer une coordonnée de M comme fonction de classe $\mathcal{C}^1$ des deux autres (si $M = O + g(u,v)\overrightarrow{i} + h(u,v)\overrightarrow{j} + l(u,v)\overrightarrow{k}$ alors on peut avoir $g(u,v) = u$, $h(u,v) = v$).

DÉFINITION 9.1.14. ***Point régulier***
Soit M un point de la surface de paramètre (u_0, v_0), on dit que M est un point régulier ssi$_{\text{déf}}$ *les vecteurs* $\dfrac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0)$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0)$ *forment une famille libre. En d'autres termes, $\mathbb{R}^3$ étant muni de sa structure euclidienne canonique alors le produit vectoriel* $\dfrac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) \wedge \dfrac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0)$ *est non nul.*

DÉFINITION 9.1.15. ***Plan tangent, normale***
Si $O + g(u,v)\overrightarrow{i} + h(u,v)\overrightarrow{j} + l(u,v)\overrightarrow{k}$ est la paramétrisation de la surface alors l'équation du plan tangent au point régulier de paramètre (u_0, v_0) est donnée par

$$\begin{vmatrix} x - g(u_0, v_0) & \dfrac{\partial g}{\partial u}(u_0, v_0) & \dfrac{\partial g}{\partial v}(u_0, v_0) \\ y - h(u_0, v_0) & \dfrac{\partial h}{\partial u}(u_0, v_0) & \dfrac{\partial h}{\partial v}(u_0, v_0) \\ z - l(u_0, v_0) & \dfrac{\partial l}{\partial u}(u_0, v_0) & \dfrac{\partial l}{\partial v}(u_0, v_0) \end{vmatrix} = 0$$

et le vecteur normal est le vecteur $\dfrac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) \wedge \dfrac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0)$.

***Remarque* 9.1.13.** *Dans le cas d'une paramétrisation cartésienne, tout point est régulier et si $z = \varphi(x, y)$ alors l'équation du plan tangent s'écrit*

$$z - z_0 = (x - x_0)\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Dém : Dans le cas d'une paramétrisation cartésienne, $g(u, v) = u$, $h(u, v) = v$ et $l(u, v) = \varphi(u, v)$ (pour respecter les notations). Les deux vecteurs

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0) \end{pmatrix}$$

forment bien une famille libre donc tout point est régulier. Le produit vectoriel donne

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) \\ -\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0) \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc l'équation du plan tangent (qui admet ce vecteur comme vecteur normal) est alors

$$-(x - u_0)\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) - (y - v_0)\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) + z - \varphi(u_0, v_0) = 0$$

d'où le résultat annoncé en remplaçant u_0 par x_0, v_0 par y_0 et $\varphi(u_0, v_0)$ par z_0 ■

b) ÉQUATION CARTÉSIENNE D'UNE SURFACE

On a vu en 5.2.1 page 95 des révisions du cours de première année le cas des courbes d'équation $F(x, y) = 0$. Dans ce paragraphe, on généralise au cas des surfaces d'équation $F(x, y, z) = 0$.

DÉFINITION 9.1.16. ***Équation cartésienne d'une surface***
Soit $F \in \mathcal{C}^k(V)$ où V est un ouvert de $\mathbb{R}^3$, $k \geqslant 1$, $F(x,y,z) = 0$ est l'équation cartésienne d'une surface.

THÉORÈME 9.15. **Théorème des fonctions implicites** (Démo H.P.)
Soit $F \in \mathcal{C}^k(V)$ où V est un ouvert de $\mathbb{R}^3$, $k \geqslant 1$. S'il existe un point (a,b,c) de V tel que l'on ait les hypothèses

$$(i)\ F(a,b,c) = 0, \quad (ii)\ \frac{\partial F}{\partial z}(a,b,c) \neq 0$$

alors

- il existe des intervalles ouverts I, J et K de centres respectifs a, b et c tels que $I \times J \times K \subset V$,
- Il existe une unique fonction φ de classe $\mathcal{C}^k$ sur $I \times J$ et à valeurs dans K telle que

$$\forall (x,y,z) \in I \times J \times K,\ (F(x,y,z) = 0) \Leftrightarrow (z = \varphi(x,y))$$

(et on a aussi $c = \varphi(a,b)$).

***Remarque* 9.1.14.**

(i) *On dit ici qu'au voisinage de (a,b,c) on a pu exprimer z comme fonction implicite de (x,y).*

(ii) *Si $\frac{\partial F}{\partial z}(a,b,c) = 0$ mais si $\frac{\partial F}{\partial x}(a,b,c) \neq 0$ alors on pourra exprimer x comme fonction implicite de (y,z).*

(iii) *Pour calculer la différentielle de φ sur $I \times J$, il suffit de dériver par rapport à x et à y la relation $F(x,y,\varphi(x,y)) = 0$, on aura alors*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,\varphi(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y))}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,\varphi(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y))}.$$

Dém : On utilise la règle de la chaîne, on dérive (par exemple la relation $G(x,y) = F(x,y,\varphi(x,y)) = 0$ pour $x \in I$:

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,\varphi(x,y)) + \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y))\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = 0$$

d'où $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,\varphi(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y))}$. On procède de même avec y ■

DÉFINITION 9.1.17. ***Point régulier***
Soit $M = (x,y,z)$ un point de la surface d'équation $F(x,y,z) = 0$, on dit que M est un point régulier de cette surface ssi$_{déf}$ $\operatorname{grad} F(M) \neq 0$.

***Remarque* 9.1.15.**

(*i*) *Au voisinage d'un point régulier M on peut définir l'une des trois variables comme fonction des deux autres. On aura alors une paramétrisation cartésienne.*

(*ii*) *Les deux notions de point régulier se recoupent grâce au théorème des fonctions implicites (tout point d'une paramétrisation cartésienne étant régulier).*
Dém : Je ne pense pas que la démonstration qui suit soit exigible (le programme n'en parle pas), le résultat lui-même n'est pas mentionné mais il peut être intéressant de comprendre que ces deux notions sont équivalentes.

- *Si* $\dfrac{\partial f}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0) \neq 0$ *alors l'une des trois composantes de ce vecteur est non nulle par exemple la troisième :* $\begin{vmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \\ \frac{\partial h}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial v} \end{vmatrix}(u_0, v_0) \neq 0$. *On utilise alors le théorème d'inversion locale qui est hors programme (cf. théorème 9.6). Il existe un voisinage V de (u_0, v_0) tel que $\psi\ : (u, v) \mapsto (g(u, v), h(u, v))$ soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de V sur $\psi(V)$. Ceci se traduit par : si $x = g(u, v)$ et $y = h(u, v)$ alors $u = \lambda(x, y)$ et $v = \mu(x, y)$ où λ et μ sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de (x_0, y_0) où $x_0 = g(u_0, v_0)$ et $y_0 = h(u_0, v_0)$. On a alors $z = l(u, v) = l(\lambda(x, y), \mu(x, y)) = \varphi(x, y)$.*
On s'est ramené à une paramétrisation cartésienne, le point en question est donc régulier.
- *Si $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ et* $\operatorname{grad} F(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, *on peut supposer que la troisième coordonnée de ce vecteur est non nulle, i.e.* $\dfrac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.
Le théorème des fonctions implicites nous permet d'affirmer que z peut s'exprimer localement comme fonction implicite de (x, y). On est encore ramené à une paramétrisation cartésienne comme ci-dessus.

Conclusion : en fait, un point d'une surface est un point régulier ssi on peut écrire localement l'équation de cette surface sous forme cartésienne (l'une des coordonnées s'exprime en fonction des deux autres) ■

En utilisant une paramétrisation locale cartésienne on obtient :

THÉORÈME 9.16. Le plan tangent à une surface $F(x, y, z) = 0$ en un point régulier $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ a pour équation

$$(x - x_0)\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0)\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0)\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0$$

et $\operatorname{grad} F(x_0, y_0, z_0)$ est un vecteur normal à cette surface en M_0.

Dém : On reprend la démonstration que l'on vient de faire, par exemple $z = \varphi(x, y)$ au voisinage de $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$. φ est la fonction implicite définie au voisinage de (x_0, y_0) et on sait en calculer les dérivées partielles (cf. remarque 9.1.14 (*iii*) page 456).
Or $z - z_0 = (x - x_0)\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0)$ (cf. remarque 9.1.13 page 455)

donc, en remplaçant les dérivées de φ par leur expression, on trouve

$$z - z_0 = -(x - x_0)\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)} - (y - y_0)\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)}$$

d'où le résultat en multipliant par $\dfrac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)$ ■

c) Intersection de 2 surfaces au voisinage d'un point

Soient 2 surfaces S et S' d'équations respectives $F(x, y, z) = 0$ et $G(x, y, z) = 0$ (F et G de classe $\mathcal{C}^1$) et $A = (a, b, c)$ un point d'intersection de S et S' (on a donc $F(A) = G(A) = 0$) tel que $\operatorname{grad} F(A) \wedge \operatorname{grad} G(A) \neq 0$ (i.e. les plans tangents en A à S et S' sont sécants) et on suppose que dans un voisinage Ω de A (à une permutation près des coordonnées), $J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial y} & \dfrac{\partial F}{\partial z} \\ \dfrac{\partial G}{\partial y} & \dfrac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix} \neq 0$ (ceci vient du fait que les vecteurs $\operatorname{grad} F(A)$ et $\operatorname{grad} G(A)$ sont libres). Quitte à réduire encore ce voisinage, on peut supposer que $\dfrac{\partial G}{\partial z} \neq 0$ sur Ω.

On applique alors le théorème des fonctions implicites, il existe I, J, K intervalles centrés en a, b, c tels que $I \times J \times K \subset \Omega$, il existe $\varphi \in \mathcal{C}^1(I \times J, K)$ telle que $G(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow z = \varphi(x, y)$. On a alors $\begin{cases} H(x, y) & = F(x, y, \varphi(x, y)) = 0 \\ H(a, b) & = 0 \end{cases}$. Or

$$\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\dfrac{\partial G}{\partial y}}{\dfrac{\partial G}{\partial z}} = \frac{J}{\dfrac{\partial G}{\partial z}} \neq 0$$

donc, on peut appliquer à nouveau le théorème des fonctions implicites à H. Il existe I_1, J_1 intervalles centrés en a et b, $I_1 \subset I$, $J_1 \subset J$, il existe $\theta \in \mathcal{C}^1(I_1, J_1)$ telle que $H(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \theta(x)$. On a alors

$$\forall (x, y, z) \in I_1 \times J_1 \times K, \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \forall x \in I_1,\ y = \theta(x),\ z = \varphi(x, \theta(x))$$

i.e. localement, l'intersection de ces deux surfaces se réduit à une courbe.

***Remarque* 9.1.16.** *On a ainsi "bricolé" une autre version du théorème des fonctions implicites.*

On a de plus la propriété suivante :

Proposition 9.1.10. ***Courbe intersection de deux surfaces***
La tangente à la courbe intersection des 2 surfaces est l'intersection des 2 plans tangents à chacune des surfaces.

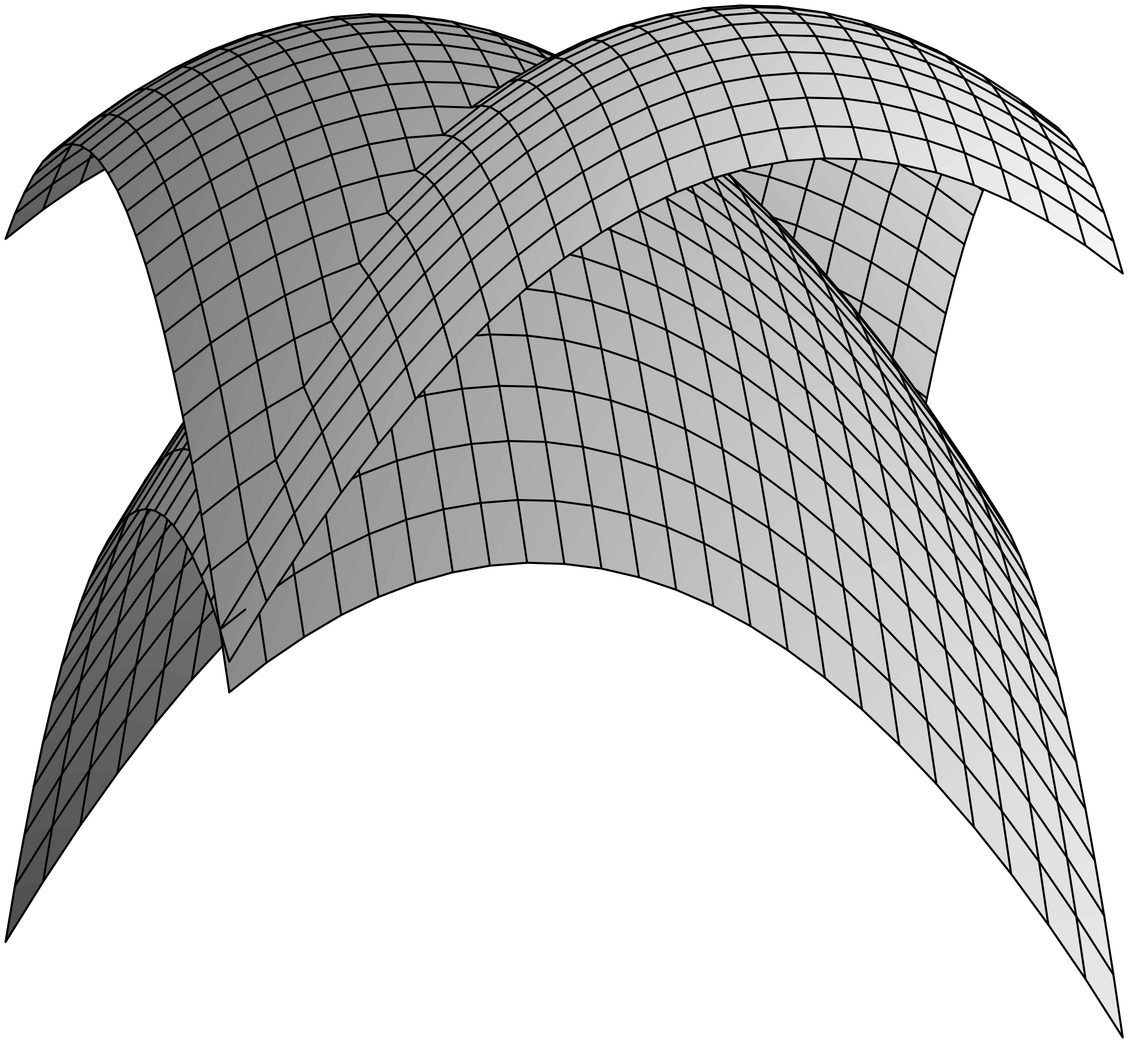

Figure 9.1: Intersection de deux surfaces

Dém : On a vu ci-dessus que, localement, on pouvait écrire l'équation de la courbe Γ intersection des deux surfaces sous la forme $y = \theta(x)$, $z = \psi(x)$ (à une permutation près des coordonnées).

- Γ est tracée sur S d'équation $F(x, y, z) = 0$ alors la tangente à Γ en A est contenue dans le plan Π_A tangent à cette surface :

  En effet, le vecteur directeur de la tangente à Γ est $\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} 1 \\ \theta'(x) \\ \psi'(x) \end{pmatrix}$ et on sait que $F(x, \theta(x), \psi(x)) = 0$ donc, en dérivant par rapport à x cette relation, on obtient
  $$\frac{\partial F}{\partial x}(x, \theta(x), \psi(x)) + \theta'(x)\frac{\partial F}{\partial y}(x, \theta(x), \psi(x)) + \psi'(x)\frac{\partial F}{\partial z}(x, \theta(x), \psi(x)) = 0$$
  soit $\overrightarrow{V}\,.\,\mathrm{grad}\, F = 0$ donc le vecteur V est orthogonal à $\mathrm{grad}\, F$, il est parallèle au plan Π_A et comme $A \in S$ alors la droite $D_A = (A, \overrightarrow{V})$ tangente à Γ en A est contenue dans Π_A.

- De même Γ est aussi tracée sur S' donc D_A est contenue dans Π'_A plan tangent à S' en A.

Conclusion : comme les deux plans tangents se coupent selon une droite et que $D_A \subset \Pi_A \cap \Pi'_A$ alors $D_A = \Pi_A \cap \Pi'_1$ ■

Position d'une surface par rapport à son plan tangent

On choisit un repère tel que le point M_0 soit l'origine O et que le plan tangent soit le plan $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Dans ce cas, on peut trouver une paramétrisation cartésienne $z = \varphi(x, y)$. On suppose que $rt - s^2 \neq 0$ alors :

- 1er cas : $rt - s^2 > 0$, $r > 0$: φ présente un minimum, la surface S est au dessus de son plan tangent.

  Si on coupe par des plans d'équation $z = \lambda$ ($\lambda > 0$), on peut prouver que la courbe obtenue est homéomorphe à un cercle (on obtient en fait une courbe qui ressemble à une ellipse). Le point M_0 est un point elliptique et S présente en M_0 une disposition en forme de ballon. Le cas $r < 0$ est tout à fait semblable.

- 2ième cas : $rt - s^2 < 0$: φ n'admet pas d'extremum, la surface traverse le plan tangent.

  Si on coupe par des plans d'équation $z = \lambda$, on trouve une courbe homéomorphe (sur un voisinage de M_0) à la courbe $X^2 - Y^2 = \lambda$. Le point M_0 est un point hyperbolique et S présente en M_0 une disposition en forme de col.

Questions :

(i) Soit $f(u, v) = O + u^2 \overrightarrow{i} + uv \overrightarrow{j} + (2u + v^2) \overrightarrow{k}$, chercher l'équation du plan tangent à cette surface au point M_0 de paramètre (u_0, v_0) avec $(u_0, v_0) \neq (0, 0)$.

Chercher l'intersection de ce plan tangent avec la surface.

(ii) Soit $f(u, v) = O + (u + v) \overrightarrow{i} + (u^2 + v^2) \overrightarrow{j} + (u^2 - v^2) \overrightarrow{k}$. Chercher le lieu des points M tels que le plan tangent soit parallèle au vecteur $(1, 0, 1)$.

(iii) Chercher la projection orthogonale sur xOy de la courbe intersection de

$x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et $x + y + z = \dfrac{1}{3}$.

9.2 Intégrales curvilignes

DÉFINITION 9.2.1. ***Forme différentielle***

Soit U un ouvert de E, on appelle forme différentielle de degré 1, de classe $\mathcal{C}^k$ toute application ω de classe $\mathcal{C}^k$ de U dans le dual E^* de E.

***Remarque* 9.2.1.** *Si on choisit (e_j) une base de E et si on note $(\mathrm{d}x_j)$ la base duale de E^* alors on peut écrire $\omega = a_1 \,\mathrm{d}x_1 + \cdots + a_p \,\mathrm{d}x_p$. Les applications a_j étant des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.*

Dém : Immédiat, c'est une question de notation. Si $x \in U$ alors $\omega(x) \in E^*$ donc on peut exprimer ce vecteur dans la base duale :

$$\omega(x) = a_1(x) \,\mathrm{d}x_1 + \cdots + a_p(x) \,\mathrm{d}x_p \ ■$$

Interprétation en termes de champs de vecteurs

Si E est muni d'une structure euclidienne, on peut identifier E et E^* et on écrit, dans une base orthonormée $\omega(x)(v) = (a(x)|v)$ où $a(x)$ est le vecteur de composantes $(a_j(x))$ et v un vecteur de E, ceci s'écrit aussi, avec des notations empruntées à la Physique, $\omega(x)(\overrightarrow{\mathrm{d}M}) = \overrightarrow{a(x)}.\overrightarrow{\mathrm{d}M}$.

Dém : On sait que, pour un espace euclidien, E et E^* sont canoniquement isomorphes (cf. théorème 9.4 page 162).
En fait, si on écrit ω dans la base duale d'une base orthonormale alors on a directement le résultat, avec $v = v_1e_1 + \cdots + v_pe_p$ alors

$$\begin{aligned}\omega(x)(v) &= a_1(x)v_1 + \cdots + a_p(x)v_p \\ &= (a(x)|v)\end{aligned}$$

en notant $a(x)$ le vecteur $a_1(x)e_1 + \cdots + a_p(x)e_p$ ■

DÉFINITION 9.2.2. ***Primitive d'une forme différentielle***
Soit ω une forme différentielle de degré 1 et de classe $\mathcal{C}^k$ sur un ouvert U de E, on appelle primitive de ω toute fonction f de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur U telle que $\omega = f'$.

***Remarque* 9.2.2.** *Si f est une primitive de ω alors, dans une base $a_j = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}$.*

Dém : On sait que, si f est différentiable à valeurs réelles, sa différentielle est une forme linéaire et ses coordonnées dans la base duale sont les $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$. On a bien $a_j = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}$.
On peut aussi se placer dans une base orthonormale et utiliser le gradient ■

DÉFINITION 9.2.3. ***Forme différentielle exacte***
On dit que ω forme différentielle de degré 1 et de classe $\mathcal{C}^k$ sur un ouvert U de E est exacte ssi$_{\text{déf}}$ ω admet une primitive sur U.

DÉFINITION 9.2.4. ***Intégrale curviligne***
Soit (I, φ) un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^1$, où $I = [a, b]$, de support $\varphi(I)$ inclus dans U, alors on pose

$$\int_{(I,\varphi)} \omega = \int_a^b \omega(\varphi(t))(\varphi'(t))\,\mathrm{d}t.$$

***Remarque* 9.2.3.** *Grâce au théorème de changement de variables, cette définition ne dépend pas du chemin choisi pour paramétrer l'arc géométrique associé. On définit donc l'intégrale curviligne sur un arc orienté Γ de classe $\mathcal{C}^1$ par $\displaystyle\int_\Gamma \omega = \int_{(I,\varphi)} \omega$ où (I, φ) est un paramétrage admissible de Γ.*

Dém : Soient (I,φ) et (J,ψ) deux paramétrages admissibles de Γ, $I=[a,b]$ et $J=[c,d]$. On a $\psi=\varphi\circ\theta$ avec θ strictement croissante de $[c,d]$ sur $[a,b]$.

$$\begin{aligned}\int_{(I,\varphi)}\omega &= \int_a^b \omega[\varphi(t)][\varphi'(t)]\,\mathrm{d}t\\ &= \int_c^d \omega[\varphi(\theta(u))][\varphi'(\theta(u))]\theta'(u)\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

en faisant le changement de variable $t=\theta(u)$

$$= \int_c^d \omega(\psi(u))(\psi'(u))\,\mathrm{d}u = \int_{(J,\psi)}\omega$$

car $\omega[\varphi(\theta(u))][\varphi'(\theta(u))]\theta'(u) = \omega[\varphi(\theta(u))][\varphi'(\theta(u))\theta'(u)] = \omega(\psi(u))(\psi'(u))$ par linéarité. On a donc prouvé que la valeur de cette intégrale ne dépend pas du paramétrage admissible ■

Expression analytique : on a

$$\int_{(I,\varphi)}\omega(\varphi(t))(\varphi'(t))\,\mathrm{d}t = \int_a^b\left(\sum_{i=1}^p a_i(x_1(t),\dots,x_p(t))x_i'(t)\right)\mathrm{d}t$$

où $\varphi(t)=(x_1(t),\dots,x_p(t))$.

Dém : On revient à l'expression de ω dans une base duale :

$$\omega(\varphi(t)) = a_1(\varphi(t))\,\mathrm{d}x_1+\dots+a_p(\varphi(t))\,\mathrm{d}x_p$$

d'où $\omega(\varphi(t))(\varphi'(t)) = \sum_{i=1}^p a_i(x_1(t),\dots,x_p(t))x_i'(t)$ et on remplace dans l'intégrale ■

Proposition 9.2.1. *Si ω est une forme différentielle exacte alors*

$$\int_\Gamma\omega = f(B)-f(A)$$

où A et B sont les extrémités de l'arc Γ.

Dém : Soit $F(t)=f(\varphi(t))$ on sait comment dériver F (cf. théorème 9.4 page 444) : $F'(t)=f'(\varphi(t))(\varphi'(t))=\omega(\varphi(t))(\varphi'(t))$ donc

$$\begin{aligned}\int_\Gamma\omega &= \int_a^b\omega(\varphi(t))(\varphi'(t))\,\mathrm{d}t\\ &= \int_a^b F'(t)\,\mathrm{d}t = F(b)-F(a)\\ &= f(\varphi(b))-f(\varphi(a)) = f(B)-f(A)\ ■\end{aligned}$$

***Remarque* 9.2.4.**

(i) *Le dernier résultat signifie que l'intégrale de ω ne dépend pas du chemin choisi (propriété souvent utilisée en Physique).*

(ii) *Si* Γ *est un arc géométrique fermé (i.e.* $A = B$*) alors l'intégrale de* ω *est nulle.*

(iii) *On a la réciproque suivante à la propriété 9.2.1 page 462 dans le cas d'un ouvert* U *étoilé : si, pour tout arc* Γ *de classe* $\mathcal{C}^1$, $\int_\Gamma \omega$ *ne dépend que des extrémités alors* ω *est une forme différentielle exacte (on pose* $f(x) = \int_{(A,x)} \omega$ *et on prend un chemin particulier pour calculer* $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$*).*

Dém : On se ramène par translation au cas où U *est étoilé par rapport à l'origine. Comme* U *est un ouvert, si* $x \in U$ *alors il existe* $r > 0$ *tel que* $B(x, 2r) \subset U$ *donc* $\overline{B}(x, r) \subset U$*.*

On choisit une base de E *et on va prouver que* $f(x) = \int_{[O,x]} \omega$ *admet une dérivée partielle par rapport à* x_1*. Soit* $\varepsilon_1 = x - re_1$*, on se place dans le plan* (O, ε_1, e_1) *et on cherche un chemin paramétré* γ *de classe* $\mathcal{C}^1$ *qui arrive au voisinage de* x *selon un segment dirigé par le vecteur* e_1 *qui relie* O *à* x*.*

- *Si la famille* (ε_1, e_1) *est liée, on prend directement pour* γ *le segment* (O, x)*,*
- *sinon, dans le repère* (O, ε_1, e_1) *on considère le chemin paramétré* γ_1 *:* $X(t) = -t^2 + 2t$, $Y(t) = t^2 - t$*.* $\gamma_1(0) = O$, $\gamma_1(1) = \varepsilon_1$ *et* $\gamma_1'(1) = e_1$ *que l'on complète par le segment* $[\varepsilon_1, x]$ *pour obtenir* γ *de classe* $\mathcal{C}^1$*.*

On exprime alors $f(x) = \int_{(O,\varepsilon_1)} \omega + \int_{[\varepsilon_1,x]} \omega$*. Cette formule reste valable pour* $x + he_1$ *avec* $h \in]-r, r[$*. On paramètre le segment* $[x, x+he_1]$ *par* $\varphi(t) = x + the_1$ *d'où* $\omega(\varphi(t))(\varphi'(t)) = a_1(x + the_1)h$ *car* $\varphi'(t) = he_1$ *par conséquent*

$$\begin{aligned} f(x + he_1) - f(x) &= \int_{\gamma \cup [x, x+he_1]} \omega - \int_\gamma \omega = \int_{[x,x+he_1]} \omega \\ &= \int_0^1 \omega(\varphi(t))(\varphi'(t))\,\mathrm{d}t = h \int_0^1 a_1(x + the_1)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Or $\left| \int_0^1 a_1(x + the_1)\,\mathrm{d}t - a_1(x) \right| \leqslant \int_0^1 |a_1(x + the_1) - a_1(x)|\,\mathrm{d}t \to 0$ *quand* h *tend vers* 0 *en utilisant la continuité de* a_1 *en* x *(ou, si l'on préfère, le théorème de continuité sous le signe intégral). On a alors*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + he_1) - f(x)}{h} = a_1(x)$$

ce qui prouve que $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x) = a_1(x)$*. Il en est de même pour les autres dérivées partielles. Comme les dérivées partielles de* f *sont continues,* f *est différentiable et sa différentielle est* ω ■

Définition 9.2.5. ***Forme différentielle fermée***

Soit ω *une forme différentielle de degré 1 et de classe* $\mathcal{C}^k$, $k \geqslant 1$*, sur un ouvert* U *de* E*, on dit que* ω *est fermée ssi*$_{\text{déf}}$

$$\forall (i, j) \in [\![1, p]\!]^2,\ \frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}$$

dans une base de E*.*

***Remarque* 9.2.5.** *On a vu lors de la définition d'une primitive d'une forme différentielle que dans ce cas,* $a_i = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ *alors, grâce au théorème de Schwarz, on peut affirmer qu'une forme différentielle exacte est fermée.*

Dém : C'est un coup de Schwarz (pas avec Cauchy cette fois-ci). f est de classe $\mathcal{C}^2$ donc on peut intervertir les dérivations partielles (c'est là qu'il intervient) :

$$\begin{aligned}\frac{\partial a_i}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) && = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\end{aligned}$$

donc ω est bien fermée ■

THÉORÈME 9.17. Théorème de Poincaré

Si ω est une forme différentielle de degré 1 de classe $\mathcal{C}^1$ au moins sur U ouvert étoilé alors on a l'équivalence suivante

$$\omega \text{ est exacte} \Leftrightarrow \omega \text{ est fermée}$$

Dém : Il y a un sens évident (c'est l'objet de la remarque précédente), l'autre n'est pas exigible.

En fait, on se ramène au cas où U est étoilé par rapport à l'origine et on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \omega(tx)(x)\,\mathrm{d}t$. On vérifie alors que $f' = \omega$ sur U.

Pour cela, on utilise le théorème de dérivation sous le signe intégral appliqué aux fonctions $x_i \mapsto \int_0^1 a_j(tx_1,\dots,tx_i,\dots,tx_p)x_j\,\mathrm{d}t$:

- $t \mapsto a_j(tx_1,\dots,tx_i,\dots,tx_p)x_j$ est borné par M_j car c'est une fonction continue sur un compact. Comme $t \mapsto M_j$ est intégrable (!) sur $[0,1]$, on a l'hypothèse de domination.
- $x_i \mapsto a_j(tx_1,\dots,tx_i,\dots,tx_p)x_j$ est continue

on en déduit que

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_i}\int_0^1 a_j(tx_1,\dots,tx_i,\dots,tx_p)x_j\,\mathrm{d}t\\ &\qquad= \begin{cases}\int_0^1 \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left[a_j(tx_1,\dots,tx_i,\dots,tx_p)\right]x_j & \text{si } i\neq j\\ \int_0^1 \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left[a_j(tx_1,\dots,tx_i,\dots,tx_p)\right]x_j + \int_0^1 a_j(tx_1,\dots,tx_p)\,\mathrm{d}t & \text{si } i=j\end{cases}\end{aligned}$$

On note plus simplement $a_j(tx)$ à la place de $a_j(tx_1,\dots,tx_p)$. On a donc

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\int_0^1 \sum_{j=1}^p a_j(tx)x_j\,\mathrm{d}t\right)\\ &= \int_0^1 \sum_{j=1}^p \frac{\partial a_j}{\partial x_i}(tx)tx_j\,\mathrm{d}t + \int_0^1 a_i(tx)\,\mathrm{d}t \text{ en dérivant sous le signe } \int\\ &= \int_0^1 \sum_{j=1}^p \frac{\partial a_i}{\partial x_j}(tx)tx_j\,\mathrm{d}t + \int_0^1 a_i(tx)\,\mathrm{d}t \text{ car } \frac{\partial a_j}{\partial x_i} = \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\\ &= \left[ta_i(tx)\right]_0^1 = a_i(x) \text{ car } [ta_i(tx)]' = a_i(tx) + \sum_{j=1}^p \frac{\partial a_i}{\partial x_j}(tx)tx_j.\end{aligned}$$

On a donc f de classe $\mathcal{C}^2$ au moins et $f' = \omega$ ■

On retrouve le théorème de Green-Riemann dans un cas plus général avec une démonstration.

Théorème 9.18. Théorème de Green-Riemann
Si A est une partie connexe par arcs qui se décompose, au moyen de droites parallèles aux axes, en une réunion d'un nombre fini de parties élémentaires d'intérieurs disjoints, définies par des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux,
si P et Q sont des applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U contenant A alors

$$\iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\partial A} (P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y)$$

où $\alpha = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ et ∂A est la frontière de A parcourue dans le sens direct (i.e. on laisse l'intérieur de A à gauche comme pour le cercle trigonométrique).

Dém : La démonstration n'est pas exigible, on pourra, au choix, regarder le premier point, les deux premiers points où la totalité.

- Montrons dans un premier temps la formule lorsque A est une partie élémentaire, les fonctions φ_i et ψ_i étant de classe $\mathcal{C}^1$. On écrit par conséquent $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqslant x \leqslant b,\ \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)\}$ alors ∂A est paramétré par

  * x varie de a à b, $y = \varphi_1(x)$,
  * x varie de b à a, $y = \varphi_2(x)$.

  On obtient par conséquent

$$\begin{aligned}\int_{\partial A} P\,\mathrm{d}x &= \int_a^b P(x, \varphi_1(x))\,\mathrm{d}x + \int_b^a P(x, \varphi_2(x))\,\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b P(x, \varphi_1(x))\,\mathrm{d}x - \int_a^b P(x, \varphi_2(x))\,\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b [P(x, \varphi_1(x)) - P(x, \varphi_2(x))]\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)\,\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x = -\iint_A \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

  et on fait de même pour Q (en utilisant l'autre définition pour l'ensemble $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leqslant y \leqslant d,\ \psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y)\}$) mais cette fois, on n'a pas le signe $-$.
  En rassemblant les résultats, on obtient

$$\iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\partial A} (P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y).$$

- On peut étendre sans problème l'intégrale curviligne au cas d'un arc paramétré continu de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et généraliser la démonstration précédente au cas d'une partie élémentaire définie par des fonctions continues de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

- Enfin, si $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ où les A_i sont des parties élémentaires d'intérieurs disjoints alors

$$\iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sum_{i=1}^{n} \iint_{A_i} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sum_{i=1}^{n} \int_{\partial A_i} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y.$$

La frontière de A est la réunion des frontières "extérieures" des parties A_i (on ne s'attardera pas sur ce point mais il se comprend bien de manière intuitive), la formule s'écrit alors sous la forme simplifiée

$$\iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\partial A} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y.$$

On procède pour cela par récurrence sur n ■

Questions :

(i) Trouver α pour que

$$\omega = \frac{1}{(y+ax)^{\alpha}} \left[(yz - a^2)\,\mathrm{d}x - (xz + a)\,\mathrm{d}y + x(y + ax)\,\mathrm{d}z\right]$$

soit une forme différentielle exacte. Trouver alors f tel que $\omega = f'$.

(ii) Montrer qu'un disque fermé peut se définir comme une partie élémentaire selon les termes du théorème de Green-Riemann.