ERRATA ET COMPLÉMENTS

- PAGE 16 5ième ligne en partant du haut : rajouter $\theta \neq 0[\pi]$.
- PAGE 21 12ième en partant du bas : lire $\overrightarrow{AM_0} = k\dfrac{\overrightarrow{u}}{\| \overrightarrow{u} \|^2}$
- PAGE 26 proposition 1.3.4 lire

PROPOSITION 1.3.4 **Expression dans une base orthonormale**

Si $\overrightarrow{u} = (x_1, y_1, z_1)$ et $\overrightarrow{v} = (x_2, y_2, z_2)$ alors

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = (y_1 z_2 - z_1 y_2, z_1 x_2 - x_1 z_2, x_1 y_2 - y_1 x_2).$$

- PAGE 26 théorème 1.9 : il y a une erreur liée à la précédente

THÉORÈME 1.9 **Développement du déterminant**
Si $\overrightarrow{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overrightarrow{v} = (x_2, y_2, z_2)$ et $\overrightarrow{w} = (x_3, y_3, z_3)$ dans une base orthonormale alors

$$\begin{aligned}\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, w) &= (y_1 z_2 - z_1 y_2, z_1 x_2 - x_1 z_2, x_1 y_2 - y_1 x_2).(x_3, y_3, z_3)\\ &= x_1 y_2 z_3 + y_1 z_2 x_3 + z_1 x_2 y_3 - z_1 y_2 x_3 - x_1 z_2 y_3 - y_1 x_2 z_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, w) &= (y_1 z_2 - z_1 y_2, z_1 x_2 - x_1 z_2, x_1 y_2 - y_1 x_2).(x_3, y_3, z_3)\\ &= x_1 y_2 z_3 + y_1 z_2 x_3 + z_1 x_2 y_3 - z_1 y_2 x_3 - x_1 z_2 y_3 - y_1 x_2 z_3\end{aligned}$$

- PAGE 39 : remarque 2.2.1 lire $\lambda \in \mathbb{C}$
- PAGE 45 : lire Les asymptotes de cette hyperbole ont pour équation $y = \pm\dfrac{b}{a}x$.
- PAGE 49 la remarque 3.1.1 est fausse (il existe un contre-exemple non élémentaire).
- PAGE 95 : une imprécision dans la remarque 5.2.2 (*ii*), lire :

(*ii*) *Si $F(a,b) = 0$ mais avec $\dfrac{\partial F}{\partial y}(a,b) = 0$, si $\dfrac{\partial F}{\partial x}(a,b) \neq 0$ alors on peut exprimer x comme fonction implicite d'y.*

- PAGE 110 méthode de démonstration lire

(*iii*) Démonstration de la contraposée $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$ i.e. prouver que P implique Q est équivalent à prouver que non Q implique non P.

- PAGE 111 après la *Remarque* 7.1.2. lire

$$\neg(\forall x \in E,\ P(x)) \Leftrightarrow (\exists x \in E \mid \neg P(x))$$
$$\neg(\exists x \in E \mid P(x)) \Leftrightarrow (\forall x \in E,\ \neg P(x))$$

- PAGE 124 en haut de page lire

DÉFINITION 7.3.6. **P.G.C.D., P.P.C.M. de deux entiers**
L'ensemble des diviseurs positifs de deux éléments a et b de $\mathbb{Z}$ est non vide et fini (il contient 1), on appelle p.g.c.d. de a et b le plus grand élément d de cet ensemble et on note $d = a \wedge b$.
De même, l'ensemble des multiples positifs communs à a et b est non vide dans $\mathbb{N}$ (il contient ab), on appelle p.p.c.m. de a et b le plus petit élément de cet ensemble, noté $m = a \vee b$.

- PAGE 138 fin de page lire

DÉFINITION 8.3.6. **Multiples et diviseurs d'un polynôme**
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ on dit que Q est un multiple de P si $Q = RP$ avec $R \in \mathbb{K}[X]$.

L'ensemble des multiples de P s'écrit $P\mathbb{K}[X] = \{Q \in \mathbb{K}[X] \mid \exists R \in \mathbb{K}[X],\ Q = RP\}$. On dit que R est un diviseur de P si P est un multiple de R.

- PAGE 164 milieu de page : lire

PROPOSITION 9.2.2. *Soit u une isométrie de E, O une origine de E, la translation t définie par $t(M) = M + \overrightarrow{u(O)O}$ alors $t \circ u$ est une isométrie qui conserve l'origine.*

- PAGE 172 haut de page : lire

*Remarque 1.1.1. Si $p \in \mathbb{Z}$ alors $p\overline{a} = \overline{pa}$. L'application qui à $p \in \mathbb{Z}$ fait correspondre $\overline{p}$ est un morphisme de groupe appelé **morphisme canonique** de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.*

- PAGE 175 milieu de page, démonstration du (ii) : lire

Inclusion dans l'autre sens : $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = m'\mathbb{Z}$ (idéal) donc m' est un multiple commun à a et b. Or $m\mathbb{Z} \subset m'\mathbb{Z}$ i.e. $m = km'$ et $m' \geqslant m \Rightarrow m = m'$.

- PAGE 177 haut de page : lire

  (i) On peut, grâce au dernier corollaire, en déduire l'expression de l'indicatrice d'Euler $\varphi(pq)$ égale au nombre d'éléments inversibles dans l'anneau $\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$.

$$\varphi(pq) = pq\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{q}\right).$$

- PAGE 193 bas de page : lire u à a la place de E à la fin de la définition 3.2.5.

- PAGE 223 haut de page : lire

$v_n(x) = (n+1)u_{n+1}(x) - nu_n(x)$. On obtient le tableau suivant (pour $x = 2$)

- PAGE 223 bas de page : dans le théorème du point fixe, rajouter l'hypothèse $f(A) \subset A$.

- PAGE 223 bas de page dans la démonstration du corollaire 5.6 : lire

$x_{n+1} - a = f(x_n) - f(a) = (x_n - a)f'(a) + o(x_n - a)$ ■

- PAGE 224 haut de page dans la méthode du δ^2 d'Aitken : lire

où $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$ et $\Delta^2 x_n = \Delta(\Delta x_n) = x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n$.

- PAGE 224 : lire

Calcul de la racine carrée d'un nombre complexe

Soit $a \in \mathbb{C}^*$, on note $\pm\alpha$ les deux racines carrées de a. On définit la suite (u_n) par $u_0 = b \in \mathbb{C}^* \setminus \Delta$ ou Δ est la médiatrice de $A(\alpha)A'(-\alpha)$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right)$.

Par un calcul simple on a $u_{n+1} \pm \alpha = \dfrac{(u_n \pm \alpha)^2}{2u_n}$ donc, comme $u_0 \notin \Delta$ on montre que $u_1 \notin \Delta$ et par une récurrence immédiate, $u_n \notin \Delta$. Les termes de la suite (u_n) sont donc tous définis (aucun ne s'annule).

- PAGE 247 bas de page, théorème de Fubini : lire

Soit $u = (u_{p,q})_{(p,q)\in \mathbb{N}^2}$ une suite double de réels ou de complexes. Si

- PAGE 260 milieu de page, dans la démonstration du théorème 6.7 : lire

Dém : Si $I =]\alpha, \beta[$, soit $J = [a,b] \subset I$ alors $\exists (n_a, n_b) \in \mathbb{N}^2$ tq $a \in J_{n_a}$ et $b \in J_{n_b}$. On pose $n = \max(n_a, n_b)$ donc $J \subset J_n$ et $\int_J f \leqslant \int_{J_n} f \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{J_n} f = \lim_{n\to+\infty} \int_{J_n} f$. f est intégrable sur I.
Si $I = [a, b[$ on se ramène au cas où $J'_n = [a, b_n]$ car $\int_{[a,a_n]} f \to 0$, de même si $I =]a, b]$ et si $I = [a, b]$ on utilise la remarque ci-dessus.

- PAGE 264 dans la proposition 6.2.8 : lire

Si a, b et c sont 3 éléments de $\overline{I}$ et si $f \in \mathrm{L}^1(I)$ alors $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

• PAGE 265 haut de page, démonstration du théorème 6.18 : lire

Dém : φ est strictement monotone (sinon on obtient une contradiction avec le théorème des valeurs intermédiaires, cf. question (iv) page 65). Quitte à changer φ en $-\varphi$ on peut supposer que $\varphi' > 0$. Si (J_n) est une suite de segments croissante de réunion I' alors $(\varphi(J_n))$ est une suite de segments croissante, de réunion I et on a $\int_{J_n} f = \int_{\varphi(J_n)} f \circ \varphi.\varphi'$ d'où l'égalité par passage à la limite ■

• PAGE 265 bas de page, dans la remarque 6.2.4 : lire

(i) *Il faut faire très attention lorsqu'on utilise le théorème 5.40 et son corollaire car l'intégrale d'une fonction continue par morceaux peut se transformer en intégrale impropre. Prendre par exemple* $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(x^2)\,\mathrm{d}x$ *lorsqu'on fait le changement de variable* $t = x^2$.

• PAGE 268 : au corollaire 6.25 rajouter l'hypothèse f continue par rapport au couple (x, t).

• PAGE 272 : reprendre la fin de la démonstration ce qui s'écrit

Dém : Soit $J \subset \overset{\circ}{I} \subset I$ et $J' \subset \overset{\circ}{I'} \subset I'$ alors $\iint_{J\times J'} f \leqslant \iint_{I\times I'} f$ par conséquent $f \in \mathrm{L}^1(\overset{\circ}{I} \times \overset{\circ}{I'})$. Soit $\varepsilon > 0$ alors il existe $J \subset I$ et $J' \subset I'$ segments tels que $\iint_{J\times J'} f \geqslant \iint_{I\times I'} f - \varepsilon/2$. f étant continue sur $J\times J'$, qui est compact, est bornée par une constante A. On prend alors $J_1 \subset J$ tel que $J_1 \subset \overset{\circ}{I}$, de même avec $J_1' \subset \overset{\circ}{I'}$ vérifiant aire $(J\times J' \setminus J_1\times J_1') \leqslant \varepsilon/(2A)$. On a alors $\iint_{J_1\times J_1'} f \geqslant \iint_{I\times I'} f - \varepsilon$ ■

On arrive maintenant à une partie du programme qui demande à être réécrite. En effet, les propriétés que l'on demande de démontrer sont loin d'être élémentaires ce qui entre en contradiction avec l'un des objectifs de ce nouveau programme qui se voulait être une version simplifiée du précédent.

• PAGE 274 : dans la proposition 6.3.4 remplacer $f \in \mathcal{C}(I\times I', \mathbb{C})$ par $f \in \mathrm{L}^1(I\times I', \mathbb{C})$

on remarquera que cette propriété n'est pas à sa place puisque l'on intègre la fonction $(r, \theta) \mapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta)r$ sur un ensemble $C(I\times I')$ qui n'est pas un produit d'intervalles (sauf cas particuliers) mais plutôt à la fin du paragraphe 6.3.2 suivant. On émettra une grosse réserve cependant, $C(I\times I')$ n'est pas une partie élémentaire ni une partie simple notamment dans le cas où I ou I' n'est pas borné !

• PAGE 275 : la démonstration du théorème 6.36 est complètement fausse mais elle est exigible. Je vais donner l'idée de la démonstration :

Dém : On commence par le cas $f \geqslant 0$, et on prolonge f à une fonction F continue sur $\mathbb{R}^2$, nulle en dehors d'un compact et telle que $F.1_A = f = \widehat{f}.1_A$ (prendre par exemple

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{si } (x,y) \in A, \\ f(x,\varphi_2(x))\times(\varphi_2(x)+1-y) & \text{si } \varphi_2(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)+1,\ a \leqslant x \leqslant b \\ f(x,\varphi_1(x))\times(-\varphi_1(x)+1+y) & \text{si } \varphi_1(x) \geqslant y \geqslant \varphi_2(x)-1,\ a \leqslant x \leqslant b \\ F(b,y)\times(b+1-x) & \text{si } b \leqslant x \leqslant b+1 \\ F(a,y)\times(-a+x+1) & \text{si } a-1 \leqslant x \leqslant a \end{cases}$$

0 ailleurs et on prouve que F est continue—faire un dessin—et $\|F\|_\infty = \|f\|_\infty$...).
On a alors $\alpha F \leqslant \widehat{f} \leqslant \beta F$ d'où

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(x,y)F(x,y)\,\mathrm{d}y \leqslant \underbrace{\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \widehat{f}(x,y)\,\mathrm{d}y}_{=g(x)} \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \beta(x,y)F(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

g est continue, positive, intégrable (car elle est nulle en dehors d'un compact) et $\iint_{\mathbb{R}^2} \alpha F \leqslant \int_{\mathbb{R}} g \leqslant \iint_{\mathbb{R}^2} \beta F$ et on fait de même avec $h(y) = \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ ce qui donne les inégalités $\iint_{\mathbb{R}^2} \alpha F \leqslant \int_{\mathbb{R}} h \leqslant \iint_{\mathbb{R}^2} \beta F$. On fait alors les différences d'où

$$\iint_{\mathbb{R}^2} (\alpha - \beta)F \leqslant \int_{\mathbb{R}} g - \int_{\mathbb{R}} h \leqslant \iint_{\mathbb{R}^2} (\beta - \alpha)F$$

i.e. $\forall \varepsilon > 0$, $\left|\int_{\mathbb{R}} g - \int_{\mathbb{R}} h\right| \leqslant \varepsilon \|f\|_\infty$ d'où l'égalité. On généralise alors au cas où f est réelle puis f complexe ■

• Page 276 : dans la définition 6.3.7 rajouter : on admet que cette définition est indépendante du découpage de A en parties élémentaires.

• Page 292 : remplacer le deuxième point du théorème 7.15 par

- La série $S(f) = c_0(f) + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n(f)\cos nt + b_n(f)\sin nt$ converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$.

• Page 295 : proposition 8.1.1 lire :

Proposition 8.1.1. Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b],F)$, on pose $R_n(f) = \dfrac{b-a}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k)$ où

• Page 304 : question (ii) lire

(ii) $x = x'^3 + 2x' - 1$ (prendre $s = x'$ comme paramètre).

• Page 305 : j'ai fait une confusion avec les anciens programmes et il faut reprendre la démonstration de la proposition 8.2.3 de la manière suivante :

Dém : En effet, si on prend le système (1), et si, par exemple, $f(x_0,y_0) \neq 0$, alors $f(x,y) \neq 0$ sur un voisinage de (x_0,y_0). On considère alors l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)}$; x étant la variable avec la condition initiale $y(x_0) = y_0$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz nous assure l'existence d'une solution maximale $y = \varphi(x)$ sur I intervalle. On résout l'équation différentielle $x'(t) = f(x(t), \varphi(x(t)))$ avec la condition initiale $x(t_0) = x_0$. Réciproquement : si $y' = f(x,y)$ est une équation différentielle alors on lui associe le système différentiel autonome $(x,y) \mapsto (1, f(x,y))$ ■

• Page 305 : dans la démonstration du théorème 8.9, lire :

Dém : Si $f(x_0,y_0) = g(x_0,y_0) = 0$ alors $x(t) = x_0,\ y(t) = y_0$ est solution de (1) sur $\mathbb{R}$ (et on admet qu'elle est unique).