# SPÉCIALE MP* : DEVOIR SURVEILLÉ

Vu les commentaires des jurys des concours, on demande dans ce devoir de faire

- un effort de présentation :
  - écrire lisiblement,
  - mettre en évidence les résultats (les souligner ou les encadrer, les dégager),
- un effort de rédaction :
  - bien justifier les théorèmes utilisés,
  - bien structurer les arguments (revenir à la ligne pour chacun d'entre eux),
- et aussi un effort de concision.

Dans tout le problème, sauf indication contraire, $E$ désigne un espace de Banach réel (i.e. un espace vectoriel réel normé complet) de dimension infinie. On notera $E'$ l'ensemble des formes linéaires continues sur $E$ muni de la norme

$$\|\varphi\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |\varphi(x)|.$$

Pour simplifier les notations, toutes les normes utilisées sur les différents espaces vectoriels seront notées de la même manière $\|.\|$.

Soit $(x_n)_{n \geqslant 1}$ une suite (infinie) de vecteurs non nuls de $E$. On note $F$ le sous-espace vectoriel de $E$ engendré par les vecteurs $x_n$ et $\overline{F}$ son adhérence dans $E$. L'espace $\overline{F} = G$ sera appelé “le sous-espace vectoriel fermé engendré par les vecteurs $x_n$”.

On dira que la suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$ est **basique** si pour tout vecteur $x \in \overline{F}$, il existe une suite **unique** $(a_n)_{n \geqslant 1}$ de réels telle que la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n x_n$ converge dans $E$ et soit de somme $x$.

Enfin on dira que la suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$ **vérifie la condition (*)** si

$$\exists K > 0,\ \forall p, q \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant p \leqslant q,\ \forall (a_k)_{k=1}^q \in \mathbb{R}^q,\ \left\| \sum_{k=1}^p a_k x_k \right\| \leqslant K \left\| \sum_{k=1}^q a_k x_k \right\|.$$

Les cinq parties sont, dans une large mesure, indépendantes. La partie IV utilise le résultat final de la partie III et la partie V utilise les résultats des parties II et IV.

## Première partie

On se propose de montrer ici que $E$ contient une suite infinie de vecteurs non nuls vérifiant (*).

Soient $x_1, \ldots, x_n$ $n$ vecteurs de $E$ vérifiant

$$\exists C > 0,\ \forall p, q \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant p \leqslant q \leqslant n,\ \forall (a_k)_{k=1}^q \in \mathbb{R}^q,\ \left\| \sum_{k=1}^p a_k x_k \right\| \leqslant C \left\| \sum_{k=1}^q a_k x_k \right\|.$$

Soit $\varepsilon > 0$ fixé, on notera $E_n$ le sous-espace de $E$ engendré par $x_1, \ldots, x_n$, $S_n$ la sphère unité de $E_n$ et $\delta = \dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$.

**On admettra dans cette partie les deux résultats suivants** :

- Il existe $z_1, \ldots, z_M$ appartenant à $S_n$ tels que
$$\forall z \in S_n,\ \exists j \in [\![1, M]\!],\ \|z - z_j\| \leqslant \delta$$
- Pour tout $z \in E$ tel que $\|z\| = 1$, il existe $\varphi \in E'$ tel que $\|\varphi\| = 1$ et $\varphi(z) = 1$. Ainsi $\forall k \in [\![1, M]\!],\ \exists \varphi_k \in E',\ \|\varphi_k\| = 1,\ \varphi_k(z_k) = 1$.

**I.1.** Montrer par l'absurde qu'il existe $x_{n+1} \in E$, $\|x_{n+1}\| = 1$ et tel que $x_{n+1} \in \bigcap\limits_{k \in [\![1,M]\!]} \operatorname{Ker} \varphi_k$.

**I.2.** **a.** Soient $\alpha_1,\dots,\alpha_n,\alpha_{n+1}$ $n+1$ réels tels que $\left\|\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k x_k\right\| = 1$.

Montrer, en choisissant $j_0 \in [\![1, M]\!]$ et en calculant et majorant $\varphi_{j_0}(z_{j_0}+\alpha_{n+1}x_{n+1})$, que

$$\left\|\sum_{k=1}^{n+1}\alpha_k x_k\right\| \geqslant \frac{1}{1+\varepsilon}.$$

**b.** Montrer que

$$\forall p,q\in\mathbb{N},\ 1\leqslant p\leqslant q\leqslant n+1,\ \forall (a_k)_{k=1}^{n+1}\in\mathbb{R}^{n+1},\quad \left\|\sum_{k=1}^{p}a_k x_k\right\| \leqslant C(1+\varepsilon)\left\|\sum_{k=1}^{q}a_k x_k\right\|.$$

**I.3.** Montrer, en choisissant $\varepsilon=\varepsilon(n)$ convenablement et en raisonnant par récurrence, qu'il existe une suite infinie de vecteurs non nuls de $E$ vérifiant (*).

## Deuxième partie

Question préliminaire : Soient $E_1$ et $E_2$ deux espaces de Banach, $F \subset E_1$ un sous-espace vectoriel dense dans $E_1$ et $T\ : F\to E_2$ une application linéaire continue.
Montrer qu'il existe une et une seule application linéaire continue $\widetilde{T}\ : E_1 \to E_2$ prolongeant $T$ (i.e. telle que pour tout $x\in F$, $T(x)=\widetilde{T}(x)$).
Vérifier que $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$.

Soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de vecteurs non nuls de $E$ vérifiant (*) (avec une constante $K$). On note

$$H=\{x\in E \mid \exists (a_n)_{n\geqslant 1},\ a_n\in\mathbb{R},\ x=\sum_{n=1}^{+\infty}a_n x_n\}$$

et on munit $H$ de la norme induite par $E$.

**II.1.** Montrer que pour tout $x \in H$, la suite $(a_n)$ intervenant dans la définition de $x$ comme élément de $H$ est unique.

**II.2.** Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on définit $P_n\ : H\to E$ par $P_n\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k x_k\right)=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k x_k$.

Montrer que pour tout $n\geqslant 1$, $\|P_n\|\leqslant K$ et que $(P_n)_{n\geqslant 1}$ est une famille de projecteurs linéaires dont on précisera l'image.

Dans toute la suite de cette partie, $F$ et $G=\overline{F}$ désignent respectivement le sous-espace vectoriel et le sous-espace vectoriel fermé de $E$ engendrés par la suite $(x_n)$.

**II.3.** En remarquant que $F\subset H\subset G$ et en utilisant la question préliminaire, montrer que $P_n$ se prolonge de manière unique en une application linéaire continue $\widetilde{P}_n$ de $G$ dans l'image de $P_n$.

Montrer que

$$\forall x\in G,\ \widetilde{P}_n(x)\to x \text{ quand } n\to+\infty.$$

**II.4.** Montrer que pour tout $x\in G$

$$x=\widetilde{P}_1(x)+\sum_{n=1}^{+\infty}(\widetilde{P}_{n+1}(x)-\widetilde{P}_n(x)).$$

En déduire que $G=H$ et conclure.

## Troisième partie

Dans cette partie, $E$ désigne un espace vectoriel normé. Deux joueurs, Pierre et Paul jouent au jeu suivant :

- Pierre choisit un ouvert $U_1 \neq \emptyset$ de $E$ puis Paul choisit un ouvert non vide $V_1 \subset U_1$.
- Pierre choisit alors un ouvert non vide $U_2 \subset V_1$ et ainsi de suite.

À la fin de la partie, les deux joueurs ont ainsi défini deux suites décroissantes d'ouverts non vides $(U_n)_{n\geqslant 1}$ et $(V_n)_{n\geqslant 1}$ telles que

$$\forall n \geqslant 1,\ U_{n+1} \subset V_n \subset U_n.$$

**III.1.** **a.** Montrer que $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} U_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} V_n$.

Notons $U$ cet ensemble. Pierre a gagné la partie si $U$ est vide et Paul si $U$ n'est pas vide. On dit que l'un des joueurs a une stratégie gagnante s'il a une méthode lui permettant de gagner quel que soit la façon de jouer de son adversaire. Remarquons qu'il n'est pas certain a priori que l'un des deux joueurs en ait une.

**b.** On suppose que l'espace $E$ est une réunion dénombrable de fermés $F_n$ d'intérieur vide. Montrer que Pierre a une stratégie gagnante.
Indication : Pierre commence à jouer $U_1 = E$ et à chaque choix de $V_n$ de Paul, Pierre répond $V_n \setminus F_n$.

**c.** Montrer que si $E$ est complet alors Paul a une stratégie gagnante.
Indication : on rappelle le résultat suivant : si $(F_n)$ est une suite décroissante de fermés non vides de $E$ dont le diamètre tend vers 0, alors l'intersection des $F_n$ est non vide.

**d.** En déduire qu'un espace de Banach ne peut pas être égal à une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide.

Dans toute la suite de cette partie, $E$ et $F$ désignent deux espaces de Banach et $T : E \to F$ une application linéaire continue et bijective. On convient de noter, dans un espace vectoriel normé $X$, $B(x_0, r)$ la boule ouverte de centre $x_0 \in X$ et de rayon $r$ et pour une partie $C$ de $X$, $\overline{C}$ son adhérence dans $X$.

**III.2.** **a.** On pose $X_n = n\overline{T(B(0,1))} = \{y \in F \mid \exists x \in \overline{T(B(0,1))},\ y = nx\}$.
Montrer que $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} X_n = F$.

**b.** En déduire qu'il existe $c > 0$ et $y_0 \in F$ tels que $B(y_0, 2c) \subset \overline{T(B(0,1))}$.

**c.** Montrer que $B(0, 2c) \subset \overline{T(B(0,1))}$.

**d.** Soit $y \in F$ vérifiant $\|y\| < c$. Construire une suite $(z_n)_{n\geqslant 1}$ vérifiant

$$\|z_n\| < \frac{1}{2^n} \text{ et } \|y - T(z_1 + \cdots + z_n)\| < \frac{c}{2^n}.$$

**e.** Montrer que la suite $(x_n)$ définie par $x_n = z_1 + \cdots + z_n$ est convergente dans $E$ vers $x = T^{-1}(y)$.

**f.** Montrer que $T^{-1}$ est continue.

## Quatrième partie

Dans cette partie, $E$ est un espace de Banach de dimension infinie et $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite basique d'éléments de $E$. Soit $A$ l'ensemble des suites $(a_n)_{n\geqslant 1}$ de réels telles que la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n x_n$ converge dans $E$. On munit l'espace vectoriel $A$ de la norme $\|(a_n)\|_A = \sup\limits_{N\geqslant 1}\left\|\sum\limits_{n=1}^{N} a_n x_n\right\|$.

**IV.1.** Montrer que $A$ muni de la norme $\|.\|_A$ est un espace de Banach.

On note $G$ le sous-espace vectoriel fermé de $E$ engendré par les vecteurs $(x_n)_{n\geqslant 1}$ et on définit l'application linéaire $\Phi\ : A \to G$ par $\Phi((a_n)) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n x_n$.

**IV.2.** **a.** Montrer que $\Phi$ est continue et bijective.

**b.** En déduire que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ vérifie la condition (*).

## Cinquième partie

Dans cette partie, on considère un espace de Banach $E$ de dimension infinie et une suite basique $(x_n)$ d'éléments de $E$ de **norme 1**. La suite $(x_n)$ vérifie donc la condition (*) avec une constante $K$. On note $G$ le sous-espace fermé de $E$ engendré par les vecteurs $x_n$. On considère enfin une suite $(y_n)$ d'éléments de $E$ telle que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n - y_n\| = \frac{1}{2L} < \frac{1}{2K}.$$

**V.1.** **a.** Montrer que pour tous $1 \leqslant p \leqslant q \in \mathbb{N}$, $\max\limits_{p\leqslant k\leqslant q} |a_k| \leqslant 2K\left\|\sum\limits_{k=p}^{q} a_k x_k\right\|$.

**b.** Montrer que $\left\|\sum\limits_{k=p}^{q} a_k y_k\right\| \leqslant 2\left\|\sum\limits_{k=p}^{q} a_k x_k\right\|$ et $\left\|\sum\limits_{k=p}^{q} a_k x_k\right\| \leqslant \dfrac{L}{L-K}\left\|\sum\limits_{k=p}^{q} a_k y_k\right\|$.

**c.** Montrer que pour toute suite réelle $(a_k)$, la série $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k x_k$ converge dans $E$ si et seulement si la série $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k y_k$ converge dans $E$.

**d.** Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\forall p, q \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant p \leqslant q,\ \forall (a_k)_{k=1}^{q} \in \mathbb{R}^q,\ \left\|\sum_{k=1}^{p} a_k y_k\right\| \leqslant C\left\|\sum_{k=1}^{q} a_k y_k\right\|.$$

On note $Y$ le sous-espace vectoriel fermé de $E$ engendré par les vecteurs $y_n$.

**e.** Montrer que l'application $T\ : G \to Y$ définie par $T\left(\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k x_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k y_k$ est un isomorphisme linéaire continu ainsi que son inverse.

On suppose maintenant que $G = E$ et on note Id l'application identité de $E$. Pour tout $x = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k x_k \in E$, on pose $T(x) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k x_k$ et $u(x) = x - T(x)$. On note $u^0 = \mathrm{Id}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $u^k = u \circ u \circ \ldots \circ u$ $k$ fois.

**V.2.** **a.** Montrer que $\|u\| < 1$.

**b.** Montrer que pour tout $x \in E$, la série $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u^k(x)$ converge dans $E$ et que sa somme $S(x)$ définit une application linéaire continue $S$ telle que $S \circ T = T \circ S = \mathrm{Id}$.

**c.** Déterminer l'espace $Y$.