

SPÉCIALE MP* : DEVOIR LIBRE

On utilisera les propriétés suivantes des sommes directes (E espace vectoriel de dimension finie) :

- si $E = E_1 + E_2$ alors $E = E_1 \oplus E_2 \Leftrightarrow \dim E = \dim E_1 + \dim E_2$ (qui se généralise à un nombre fini de sous-espaces vectoriels),
- si $(e_i)_{i \in [1, n]}$ est une base de E , $\{I, J\}$ une partition de $[1, n]$ et si $E_1 = \text{Vect}(e_i)_{i \in I}$, $E_2 = \text{Vect}(e_j)_{j \in J}$, alors $E = E_1 \oplus E_2$ (là aussi on a une généralisation à toute partition de $[1, n]$).

Notations : soit \mathbb{K} un corps commutatif (sous-corps de \mathbb{C}) et V un espace vectoriel de dimension finie sur \mathbb{K} . On note

- $\mathcal{L}(V)$ l'algèbre des endomorphismes de V ,
- Id l'application identique de V ,
- fg le produit des éléments f et g de $\mathcal{L}(V)$,
- f^q le produit de q éléments de $\mathcal{L}(V)$ identiques à f , et, par convention, $f^0 = \text{Id}$.

PREMIÈRE PARTIE : IDÉAUX DE $\mathcal{L}(V)$

On dit que la partie M de $\mathcal{L}(V)$ est un idéal à gauche lorsque M est un *sous-espace vectoriel* de $\mathcal{L}(V)$ et que

$$\forall \varphi \in \mathcal{L}(V), \forall f \in M, \varphi f \in M.$$

On dit que la partie M de $\mathcal{L}(V)$ est un idéal à droite lorsque M est un *sous-espace vectoriel* de $\mathcal{L}(V)$ et que

$$\forall \varphi \in \mathcal{L}(V), \forall f \in M, f\varphi \in M.$$

Soit W un sous-espace vectoriel de V , on note J_W l'ensemble des endomorphismes de V dont l'image est contenue dans W et K_W l'ensemble des endomorphismes de V dont le noyau contient W .

Soit f un élément de $\mathcal{L}(V)$, on note Δ_f l'ensemble des $f\varphi$ où φ décrit $\mathcal{L}(V)$, et Γ_f l'ensemble des φf où φ décrit $\mathcal{L}(V)$.

- I.1. a.** Soit f un élément de $\mathcal{L}(V)$. Montrer que Δ_f est un idéal à droite et Γ_f un idéal à gauche.
- b.** Soit W un sous-espace vectoriel de V . Montrer que J_W est un idéal à droite et K_W un idéal à gauche.
- I.2. a.** Soit W un sous-espace vectoriel de V , montrer que J_W est isomorphe à $\mathcal{L}(V, W)$. Exprimer $\dim J_W$ et $\dim K_W$ en fonction de $\dim V$ et $\dim W$.
- b.** Soit f un endomorphisme de V . Exprimer $\dim \Delta_f$ et $\dim \Gamma_f$ en fonction de $\text{Rg } f$ et $\dim V$ (on pourra utiliser l'application $F : g \in \mathcal{L}(V) \mapsto fg \in \Delta_f$).
- c.** Soit W un sous-espace vectoriel de V . Montrer qu'il existe f dans J_W telle que $\Delta_f = J_W$ et g dans K_W telle que $\Gamma_g = K_W$.
- I.3.** Soit W, W' des sous-espaces vectoriels de V .
- a.** Montrer que $J_W \cap J_{W'} = J_{W \cap W'}$ et $K_W \cap K_{W'} = K_{W+W'}$.
- b.** Montrer que $J_W + J_{W'} = J_{W+W'}$ et $K_W + K_{W'} = K_{W \cap W'}$.

- I.4.** a. Soit M un idéal à droite de $\mathcal{L}(V)$. Montrer qu'il existe W un sous-espace vectoriel de V tel que $J_W \subset M$ et tel qu'aucun sous-espace W' de V ne vérifie $J_{W'} \subset M$ et $\dim W' > \dim W$. Montrer alors que $J_W = M$.
- b. Soit M un idéal à gauche de $\mathcal{L}(V)$. Montrer de même qu'il existe un sous-espace vectoriel W de V tel que $K_W = M$.
- c. Conclure de cette étude que, pour tout idéal à droite M de $\mathcal{L}(V)$, il existe f dans $\mathcal{L}(V)$ telle que $\Delta_f = M$ et que, pour tout idéal à gauche M de $\mathcal{L}(V)$ il existe g dans $\mathcal{L}(V)$ telle que $\Gamma_g = M$.
- I.5.** a. Soit U et W des sous-espaces vectoriels de V . Calculer $\dim(J_U \cap K_W)$.
- b. Montrer que $\{0\}$ et $\mathcal{L}(V)$ sont les seules parties de $\mathcal{L}(V)$ qui sont à la fois idéal à gauche et idéal à droite.

DEUXIÈME PARTIE : BASES STABLES DE $\mathcal{L}(V)$

On suppose ici que la dimension de V est un entier n , au moins égal à 2.

On appelle ici base de $\mathcal{L}(V)$, toute *partie* de $\mathcal{L}(V)$ à la fois libre et génératrice. Une base S de $\mathcal{L}(V)$ est dite stable lorsqu'elle vérifie :

$$\forall f, g \in S, fg \in S \text{ ou } fg = 0$$

Soit B la base (e_1, e_2, \dots, e_n) de V . La base S de $\mathcal{L}(V)$ est dite canoniquement associée à B lorsqu'il existe une bijection $(i, j) \mapsto f_{ij}$ de $\{1, \dots, n\}^2$ sur S telle que

$$\begin{aligned} \forall i, j, k \in \{1, \dots, n\} \quad f_{ij}(e_k) &= 0 && \text{si } j \neq k \\ &= e_i && \text{si } j = k \end{aligned}$$

- II.1.** Montrer que toute base de $\mathcal{L}(V)$ canoniquement associée à une base de V est stable.
- Soit S une base stable de $\mathcal{L}(V)$ et soit r le minimum du rang des éléments de S . Soit S' l'ensemble des f de S telles que $\text{Rg } f = r$.
- II.2.** Montrer que $(\forall g \in S)(\forall f \in S')(gf \in S' \text{ ou } gf = 0)$ et $(fg \in S' \text{ ou } fg = 0)$. En utilisant le **I.5.b.**, montrer que $\text{Vect}(S') = \mathcal{L}(V)$ puis que $S' = S$.
- Tous les éléments de S ont donc le même rang que l'on note r par la suite.
- II.3.** On veut montrer dans cette question que $r < n$.
- a. Soit $\varphi = \sum_{f \in S} f$. Montrer que, si l'on avait $r = n$, alors on aurait

$$\forall g \in S, \varphi g = g\varphi = \varphi$$

b. Conclure.

On note désormais \mathcal{J} l'ensemble des sous-espaces vectoriels U de V tels qu'il existe au moins un élément f de S vérifiant $\text{Im } f = U$; on note \mathcal{N} l'ensemble des sous-espaces vectoriels W de S tels qu'il existe au moins un élément f de S vérifiant $\text{Ker } f = W$.

Pour tout U de \mathcal{J} et pour tout W de \mathcal{N} , on note S_U l'ensemble des f de S telles que $\text{Im } f = U$ et S^W l'ensemble des f de S telles que $\text{Ker } f = W$.

- II.4.** a. Montrer que $\text{Vect}(S_U)$ est un idéal à droite.
Montrer que $\text{Vect}(S_U) = J_U$, $\text{Vect}(S^W) = K_W$ pour tout U de \mathcal{J} et tout W de \mathcal{N} .
- b. Montrer que $\mathcal{L}(V)$ est la somme directe des J_U , où U décrit \mathcal{J} :

$$\mathcal{L}(V) = \bigoplus_{U \in \mathcal{J}} J_U$$

- c. Montrer que V est la somme directe des U , où U décrit \mathcal{J} (on pourra utiliser la décomposition de Id dans la somme des J_U).

- II.5. a.** Soit W un élément de \mathcal{N} . Montrer que K_W est la somme directe des sous-espaces vectoriels engendrés par les $S_U \cap S^W$ où U décrit \mathcal{J} :

$$K_W = \bigoplus_{U \in \mathcal{J}} \text{Vect}(S_U \cap S^W).$$

- b.** En déduire que $\forall U \in \mathcal{J}, \forall W \in \mathcal{N}, \text{Vect}(S_U \cap S^W) = K_W \cap J_U$ et que $S_U \cap S^W \neq \emptyset$.
- II.6. a.** Soit f un élément de $S_U \cap S^W$. Montrer que $f^2 = 0$ ou $f^2 \in S_U \cap S^W$.
- b.** En déduire que : $\forall W \in \mathcal{N}$ et $\forall U \in \mathcal{J}$ ou bien $U \subset W$ ou bien $U \oplus W = V$.
- c.** Montrer que, pour tout W de \mathcal{N} , il existe au moins un U de \mathcal{J} tel que $U \oplus W = V$.
- II.7.** Soit (U, W) un élément de $\mathcal{J} \times \mathcal{N}$ tel que $U \oplus W = V$.

On définit comme suit une application $f \mapsto \bar{f}$ de $J_U \cap K_W$ dans $\mathcal{L}(U)$

$$\bar{f}(x) = f(x) \text{ si } x \in U$$

- a.** Montrer que $f \mapsto \bar{f}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
- b.** En appliquant le II.3. à $S_U \cap S^W$, montrer que $r = 1$.
- c.** Montrer que $S_U \cap S^W$ a pour unique élément la projection d'image U et de noyau W .
- II.8. a.** Montrer que \mathcal{J} et \mathcal{N} ont chacun n éléments et que $\forall U \in \mathcal{J}, \forall W \in \mathcal{N}, S_U \cap S^W$ est un singleton. On note $\varphi_{U,W}$ l'unique élément de $S_U \cap S^W$.
- b.** Montrer que :

$$\begin{aligned} \varphi_{U,W} \varphi_{U',W'} &= 0 && \text{si } U' \subset W \\ &= \varphi_{U,W'} && \text{si } U' \oplus W = V. \end{aligned}$$

- c.** Montrer que $\bigcap_{W \in \mathcal{N}} W = \{O\}$.