# SPÉCIALE MP* : DEVOIR SURVEILLÉ

On note dans ce problème $\mathcal{S}$ l'ensemble des séries à termes réels, $\mathcal{S} = \{\sum a_n, (a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\}$.

Si $a \in \mathcal{S}$, $a = \sum a_n$, on associe les sommes partielles

$$s_n^0(a) = \sum_{p=0}^{n} a_p, \quad s_n^{k+1}(a) = \frac{1}{n+1} \sum_{p=0}^{n} s_p^k(a),\ k \in \mathbb{N}$$

ainsi que les sommes

$$t_n^0(a) = s_n^0(a), \quad t_n^{k+1}(a) = \frac{1}{\binom{k+1+n}{n}} \sum_{p=0}^{n} \binom{k+p}{p} t_p^k(a),\ k \in \mathbb{N}.$$

$a$ désignera dans tout le problème un élément de $\mathcal{S}$.

La partie I sert à prouver des résultats utiles pour la suite du problème et on pourra admettre ces résultats à condition de le préciser clairement sur la copie.

## Partie I

On rappelle que, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels convergeant vers $l \in \mathbb{R}$ alors la suite $y_n = \dfrac{1}{n+1} \sum\limits_{k=0}^{n} x_k$ converge vers $l$.

**I.1.** Prouver que le résultat énoncé ci-dessus reste valable même si $l \in \overline{\mathbb{R}}$.

**I.2.** On revient au cas où $l \in \mathbb{R}$.

**a.** Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes réels convergeant vers $l \in \mathbb{R}$ et $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes strictement positifs telle que la série $\sum \lambda_n$ diverge. Montrer que la suite de terme général

$$\frac{\sum\limits_{p=0}^{n} \lambda_p x_p}{\sum\limits_{p=0}^{n} \lambda_p}$$

converge vers $l$.

**b.** On suppose maintenant que la suite $(x_n)$ a toujours une limite $l \in \mathbb{R}$ et on se donne des suites $(\lambda_{n,p})_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les conditions :

$(i)$ $\lambda_{n,p} > 0$,

$(ii)$ Pour tout $p$ de $\mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_{n,p} = \lambda_p > 0$,

$(iii)$ $\sum\limits_{p=0}^{+\infty} \lambda_p = +\infty$.

Montrer alors que la suite de terme général

$$\frac{\sum\limits_{p=0}^{n} \lambda_{n,p} x_p}{\sum\limits_{p=0}^{n} \lambda_{n,p}}$$

converge vers $l$.

Ce dernier résultat reste valable si $l \in \overline{\mathbb{R}}$ mais on ne demande pas de le démontrer.

## Partie II

Si la suite $(s_n^k(a))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$, on dit que sa limite est la somme d'indice $k$ de la série $a$ et on appelle $\mathcal{S}_k$ le sous-ensemble de $\mathcal{S}$ pour laquelle cette condition est réalisée.

**II.1.** On suppose que la série $a$ est convergente.

**a.** Montrer qu'elle a une somme d'indice 1 égale à sa somme.

**b.** Montrer la relation

$$s_n^1(a) - \sum_{p=0}^{+\infty} a_p = -\left(\sum_{p=n+1}^{+\infty} a_p + \frac{1}{n+1}\sum_{p=0}^{n} pa_p\right).$$

En déduire que $\dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{p=0}^{n} pa_p$ tend vers 0 quand $n$ tend vers l'infini.

**II.2.** **a.** Montrer que, pour toute suite $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels et tout $k \in \mathbb{N}$, il existe une série $a \in \mathcal{S}$, qu'on ne cherchera pas à déterminer explicitement, telle que $s_n^k(a) = \sigma_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**b.** Comparer les ensembles $\mathcal{S}_k$ du point de vue de l'inclusion. Les inclusions obtenues sont-elles strictes ? Pour une série $a \in \mathcal{S}$ donnée, comparer entre elles les sommes d'indice $k$ qui existent éventuellement.

**II.3.** Montrer que si $a_n \geqslant 0$ et si la série $\sum a_n$ diverge alors $a$ n'appartient à aucun ensemble $\mathcal{S}_k$.

## Partie III

Si la suite $(t_n^k(a))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$, on dit que sa limite est la somme d'ordre $k$ de la série $a$ et on appelle $\mathcal{T}_k$ la partie de $\mathcal{S}$ pour laquelle cette hypothèse est réalisée.

**III.1.** Comparer $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{T}_1$ ainsi que, lorsqu'elles existent, les sommes d'indice 1 et d'ordre 1 d'une même série $a \in \mathcal{S}$.

**III.2.** Comparer les ensembles $\mathcal{T}_k$ du point de vue de l'inclusion sans se préoccuper du caractère strict ou large des inclusions obtenues (on pourra démontrer et utiliser la formule $\sum\limits_{p=0}^{n} \binom{k+p}{p} = \binom{k+1+n}{n}$).

Pour une série $a \in \mathcal{S}$ donnée, comparer entre elles les sommes d'ordre $k$ qui existent éventuellement.

**III.3.** On considère la série $c(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ où $(c_n)$ est une suite de réels. On suppose que la série $c(x)$ converge pour tout $x$ de l'intervalle $]-1,+1[$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_n = \sum\limits_{p=0}^{n} c_p$.

**a.** Prouver que, pour tout $x_0 \in ]-1,+1[$, la suite $|c_n x_0^n|$ est bornée. En déduire que la série $c(x)$ est absolument convergente pour $x \in ]-1,+1[$.

**b.** Montrer que, pour tout $x_0 \in ]-1,+1[$, les réels $|d_n x_0^n|$ admettent un majorant réel indépendant de $n$. En déduire que, pour tout $x \in ]-1,+1[$, la suite $(d_n x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

**c.** Pour $x \in ]-1,+1[$, comparer les sommes $\sum\limits_{p=0}^{n} c_p x^p$ et $\sum\limits_{p=0}^{n-1} d_p(x^p - x^{p+1})$. En déduire l'égalité :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} d_n x^n.$$

**d.** En désignant par $c$ la série numérique de terme général $c_n$, établir que, pour tout $x \in ]-1,+1[$ et tout $k \in \mathbb{N}$, on a l'égalité :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = (1-x)^{k+1} \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{k+n}{n} t_n^k(c) x^n.$$

## Partie IV

**IV.1.** En conservant les mêmes notations, on pose $T_n^k(a) = \binom{k+n}{n} t_n^k(a)$.

**a.** À l'aide de la relation donnant $T_n^{k+1}(a)$ en fonction des $T_p^k(a)$ ($p \in [0,n]$) prouver par récurrence l'égalité :

$$\binom{k+n}{n} t_n^k(a) = \sum_{p=0}^{n} \binom{k+n-p}{n-p} a_p.$$

**b.** En déduire l'égalité :

$$(k \geqslant 1) \quad T_n^k(a) = \sum_{p=0}^{n} \binom{k+n-p-1}{n-p} s_p^0(a)$$

puis pour $k \geqslant 2$, exprimer de même $T_n^k(a)$ en fonction des $s_p^1(a)$, $p \in [0,n]$.

**IV.2.** À la série $a \in \mathcal{S}$ on associe la série $F(a) \in \mathcal{S}$ de terme général $b_n = s_n^1(a) - s_{n-1}^1(a)$ ($n \geqslant 1$), avec $b_0 = s_0^1(a) = a_0$.

**a.** Établir pour tous les entiers $k \geqslant 1$ et $n \geqslant 0$ l'égalité :

$$T_n^k(a) = (n+k) T_n^{k-1}(F(a)) - (k-1) T_n^k(F(a))$$

et en déduire l'égalité :

$$t_n^k(a) = k t_n^{k-1}(F(a)) - (k-1) t_n^k(F(a)).$$

**b.** Établir l'égalité :

$$t_n^k(a) = (n+1) t_n^k(F(a)) - n t_{n-1}^k(F(a))$$

puis exprimer $t_n^k(F(a))$ par une combinaison linéaire, à coefficients indépendants de $a$, des $t_p^k(a)$ ($p \in [0,n]$).

**IV.3.** **a.** Pour $k \geqslant 1$, si $F(a) \in \mathcal{T}_{k-1}$, montrer que $a \in \mathcal{T}_k$ et comparer dans ce cas les sommes d'ordre $k-1$ de $F(a)$ et d'ordre $k$ de $a$. Étudier la réciproque.

**b.** Comparer, pour tout $k \in \mathbb{N}$ les ensembles $\mathcal{S}_k$ et $\mathcal{T}_k$ et, lorsqu'elles existent, les sommes d'indice $k$ et d'ordre $k$ d'une même série $a \in \mathcal{S}$.