SPÉCIALE MP* : CORRIGÉ DU DEVOIR SURVEILLÉ

PARTIE I $\boxed{12}$

I.1. Prouvons le résultat demandé si $l = +\infty$.
Pour tout $M > 0$, il existe N tel que $x_n > 2M$ pour $n \geqslant N$.
On a alors $y_n \geqslant \dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{N} x_n + 2\dfrac{n-N}{n+1}M \to 2M$ donc $y_n \geqslant M$ pour n assez grand.
Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$
Si $x_n \to -\infty$ on applique le résultat précédent à la suite $y_n = -x_n$. .... $\boxed{3}$

I.2. a. On se ramène au cas où $l = 0$ en considérant la suite $x'_n = x_n - l$, alors

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ |x'_n| \leqslant \varepsilon/2.$$

Posons $L_n = \sum\limits_{p=0}^{n} \lambda_p$ et $Y_n = \sum\limits_{p=0}^{n} \lambda_p x_p \Big/ L_n$, on a :

$$\begin{aligned}|Y_n| &\leqslant \left|\sum_{p=0}^{N-1} \lambda_p x_p\right| \Big/ L_n + \varepsilon/2 \\ &\leqslant \varepsilon\end{aligned}$$

en choisissant $n \geqslant n_0 \geqslant N$ pour que $\left|\sum\limits_{p=0}^{N-1} \lambda_p x_p\right| \leqslant L_n\varepsilon/2$ (ce qui est possible car $L_n \to +\infty$).
Conclusion : on a $\lim\limits_{n\to+\infty} Y_n = 0$ .... $\boxed{3}$
Remarque : le théorème de sommation des équivalents s'applique mais on en demande la redémonstration.

b. On prouve tout d'abord que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{p=0}^{n} \lambda_{n,p} = +\infty$.
En effet, soit $M > 0$ alors on sait qu'il existe n_0 tel que $\sum\limits_{p=0}^{n_0} \lambda_p \geqslant 2M$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{p=0}^{n_0} \lambda_{n,p} = \sum\limits_{p=0}^{n_0} \lambda_p \geqslant 2M$ donc il existe $n_1 \geqslant n_0$ tel que $\sum\limits_{p=0}^{n_0} \lambda_{n,p} \geqslant M$ pour $n \geqslant n_1$.
Avec l'inégalité $\sum\limits_{p=0}^{n} \lambda_{n,p} \geqslant \sum\limits_{p=0}^{n_0} \lambda_{n,p} \geqslant M$ pour $n \geqslant n_1$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{p=0}^{n} \lambda_{n,p} = +\infty$.
On se ramène ensuite en 0 (en remplaçant x_n par $x_n - l$).
On a alors, pour tout $\varepsilon > 0$, l'existence de N tel que $|x_n| \leqslant \varepsilon/2$ pour $n \geqslant N$ d'où

$$\left|\sum_{p=0}^{n} \lambda_{n,p} x_p\right| \leqslant \sum_{p=0}^{N} \lambda_{n,p}|x_p| + \frac{\varepsilon}{2}\sum_{p=0}^{n} \lambda_{n,p}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{p=0}^{N}\lambda_{n,p}|x_p| = \sum\limits_{p=0}^{N}\lambda_p|x_p|$ qui est fini, donc, on peut trouver un N' tel que $\sum\limits_{p=0}^{N}\lambda_{n,p}|x_p| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\sum\limits_{p=0}^{n}\lambda_{n,p}$ ce qui permet d'avoir le résultat

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum\limits_{p=0}^{n}\lambda_{n,p}x_p}{\sum\limits_{p=0}^{n}\lambda_{n,p}} = 0. \qquad \boxed{6}$$

Remarque : on n'a pas $\sum\limits_{p=0}^{n}\lambda_{n,p} \sim \sum\limits_{p=0}^{n}\lambda_p$. Il suffit de prendre $\lambda_{n,p} = \left(1-\frac{1}{n}\right)^p$, $\lambda_{n,0} = 1$.

- $\lim\limits_{n\to+\infty}\lambda_{n,p} = 1$,
- $\sum\limits_{p=0}^{n}\lambda_{n,p} = \dfrac{1-(1-1/n)^{n+1}}{1-(1-1/n)} \sim n\left(1-\dfrac{1}{e}\right)$,
- $\sum\limits_{p=0}^{n}\lambda_p = n+1 \sim n$.

Partie II $\boxed{14}$

II.1. a. C'est une conséquence immédiate de la convergence au sens de Césaro. .... $\boxed{1}$

b. On procède par récurrence sur n :

- pour $n = 0$, c'est immédiat.
- On suppose la propriété vraie à l'ordre n, en multipliant par $n+1$ on a donc la relation

$$\sum_{p=0}^{n}s_p^0(a) - (n+1)\sum_{p=0}^{+\infty}a_p = -(n+1)\sum_{p\geqslant n+1}a_p - \sum_{p=0}^{n}pa_p$$

et donc

$$\sum_{p=0}^{n+1}s_p^0(a) - (n+2)\sum_{p=0}^{+\infty}a_p = -(n+1)\sum_{p\geqslant n+1}a_p - \underbrace{\sum_{p=0}^{n}pa_p + s_{n+1}^0(a) - \sum_{p=0}^{+\infty}a_p}_{=-\sum\limits_{p=n+2}^{+\infty}a_p}$$

$$= -(n+2)\sum_{p\geqslant n+2}a_p - \sum_{p=0}^{n}pa_p - (n+1)a_{n+1}$$

ce qui achève la récurrence. .... $\boxed{2}$

Pour conclure, on écrit

$$\frac{1}{n+1}\sum_{p=0}^{n}pa_p = \left(\sum_{p=0}^{+\infty}a_p - s_n^1(a)\right) - \sum_{p=n+1}^{+\infty}a_p$$

somme de suites tendant vers 0 et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}\sum\limits_{p=0}^{n}pa_p = 0$ .... $\boxed{1}$

II.2. a. On fait une récurrence sur k :

On pose par convention : $\sigma_{-1} = 0$ et $s_{-1}^k(a) = 0$.

- Si $k = 0$, on définit (a_n) par $a_n = s_n^0(a) - s_{n-1}^0(a) = \sigma_n - \sigma_{n-1}$

- Passage de l'ordre k à l'ordre $k+1$: on utilise la formule

$$s_n^k(a) = (n+1)s_n^{k+1}(a) - n s_{n-1}^{k+1}(a).$$

En effet, on pose $\sigma'_n = (n+1)\sigma_n - n\sigma_{n-1}$ alors, d'après l'hypothèse de récurrence, on sait qu'il existe une suite $a = (a_n)$ telle que $s_n^k(a) = \sigma'_n$.

On a alors $(n+1)(s_n^{k+1}(a) - \sigma_n) = n(s_{n-1}^{k+1}(a) - \sigma_{n-1}) = 0$ car $\sigma_{-1} = s_{-1}^k(a) = 0$. 4

b. L'inclusion : $\mathcal{S}_k \subset S_{k+1}$ est immédiate.
Montrons que les inclusions sont strictes :
il suffit pour cela de prouver que l'inclusion $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}_1$ est stricte vu ce qui a été fait à la question précédente.
Soit $a_n = (-1)^n$ alors $s_n^0(a) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ 1 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$. Et comme $s_{2n}^1(a) = \dfrac{n+1}{2n+1}$ et $s_{2n+1}^1(a) = \dfrac{1}{2}$ on peut affirmer que $a \in \mathcal{S}_1$ mais que $a \notin \mathcal{S}_0$.
Conclusion : l'inclusion est bien stricte. 3
Si a possède une somme d'indice k_0 alors, pour $k \geqslant k_0$, toutes les sommes d'indice k de a existent et sont égales. 1

II.3. On utilise une récurrence avec Césaro généralisé (résultat du I.1) 2

Partie III $\boxed{24}$

III.1. On a : $t_n^1(a) = s_n^1(a)$ car $\dbinom{1+n}{n} = n+1$ et $\dbinom{p}{p} = 1$! Donc $\mathcal{S}_1 = \mathcal{T}_1$.
Lorsqu'elles existent, les sommes d'indice 1 et d'ordre 1 sont évidemment égales. ... 2

III.2. C'est une formule classique qui se démontre par récurrence à partir de la formule

$$\binom{k+1+n}{n} = \binom{k+n}{n-1} + \binom{k+n}{n}$$

donc $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{k+p}{p} = \binom{k+1+n}{n}$. 2

En prenant $\lambda_p = \dbinom{k+p}{p}$ alors

- $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \lambda_p = \binom{k+1+n}{n} \geqslant k+1+n \to +\infty$,
- $\lambda_p > 0$

et en utilisant le résultat du I.2.a, on peut affirmer que si $a \in \mathcal{T}_k$ alors $t_n^{k+1}(a)$ a une limite quand $n \to +\infty$ et donc que $a \in \mathcal{T}_{k+1}$ i.e.

$$\mathcal{T}_k \subset \mathcal{T}_{k+1}.$$ 2

On a alors le même résultat qu'au I.2.b. : si $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $a \in \mathcal{T}_{k_0}$ alors $\forall k \geqslant k_0$, $a \in \mathcal{T}_k$ et les sommes d'indice $k \geqslant k_0$ sont toutes égales. 1

III.3. a. Comme la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x_0^n$ converge, la suite $(c_n x_0^n)$ a une limite nulle en $+\infty$, elle est donc bornée par un nombre $M(x_0)$. 2

Soit x tel que : $|x| < 1$ et $x_0 \in]|x|, 1[$ alors $|c_n x^n| = |c_n x_0^n| . \left|\dfrac{x}{x_0}\right|^n \leqslant M(x_0) \left|\dfrac{x}{x_0}\right|^n$. La

série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |c_n x^n|$ est majorée par le terme général d'une série géométrique convergente, elle est donc convergente.
Conclusion : la série $c(x)$ est absolument convergente pour $x \in]-1,1[$ (cf séries entières) . . . . $\boxed{3}$

b. Pour $|x_0| \leqslant 1$ et $n \geqslant p$, on a $|x_0|^n \leqslant |x_0|^p$ donc

$$|d_n x_0^n| \leqslant \sum_{p=0}^{n} |c_p x_0^n| \leqslant \sum_{p=0}^{n} |c_p||x_0|^p \leqslant \sum_{p=0}^{+\infty} |c_p||x_0|^p$$

(grâce au a).
Les réels $|d_n x_0^n|$ admettent un majorant réel indépendant de n. . . . . $\boxed{2}$
Avec le même argument qu'au a, on en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} d_n x^n = 0 \qquad \boxed{2}$$

pour $x \in]-1,+1[$.

c. On utilise la relation $c_p = d_p - d_{p-1}$ ($d_{-1} = 0$), alors

$$\sum_{p=0}^{n} c_p x^p = \sum_{p=0}^{n} d_p x^p - \sum_{p=0}^{n-1} d_p x^{p+1} = d_n x^n + \sum_{p=0}^{n-1} d_p(x^p - x^{p+1}). \qquad \boxed{2}$$

$d_n x^n \to 0$ et la série $\sum c_p x^p$ converge donc la série $\sum d_p(x^p - x^{p+1})$ converge et en passant à la limite lorsque $n \to +\infty$ on trouve :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} d_n x^n. \qquad \boxed{1}$$

d. On établit le résultat par récurrence sur k en utilisant le c.

- Pour $k = 0$, cela a été fait au c.
- Le passage de k à $k+1$ se fait en remplaçant c_n par $\binom{k+n}{n} t_n^k(c)$, alors d_n est remplacé par $\binom{k+1+n}{n} t_n^{k+1}(c)$ (on utilise la relation de récurrence définissant les t_n^k) et on exploite à nouveau le résultat du c. . . . . $\boxed{5}$

Remarque : Il faut justifier le fait que la série $\sum \binom{k+n}{n} t_n^k(c) x^n$ converge (c'est contenu implicitement dans la récurrence). $\boxed{-2}$ si oubli.

Partie IV $\boxed{29}$

IV.1. a. La relation donnant $T_n^{k+1}(a)$ en fonction des $T_p^k(a)$ s'écrit :

$$T_n^{k+1}(a) = \sum_{q=0}^{n} T_q^k(a) \qquad \boxed{1}$$

On procède alors par récurrence :

- la relation proposée est vraie pour $k = 0$,
- si $T_q^k(a) = \sum\limits_{p=0}^{q} \binom{k+q-p}{q-p} a_p$ alors

$$T_n^{k+1}(a) = \sum_{q=0}^{n}\left(\sum_{p=0}^{q} \binom{k+q-p}{q-p} a_p\right) = \sum_{p=0}^{n}\left(\sum_{q=p}^{n} \binom{k+q-p}{q-p}\right) a_p = \sum_{p=0}^{n} \binom{k+1+n-p}{n-p} a_p$$

car $\sum_{q=p}^{n}\binom{k+q-p}{q-p}=\sum_{h=0}^{n-p}\binom{k+h}{h}=\binom{k+1+n-p}{n-p}$ (relation du III.2).

On a bien la relation demandée à l'ordre $k+1$ et achève la récurrence .... $\boxed{3}$

b. On remplace a_p par $s_p(a)-s_{p-1}(a)$ alors

$$\begin{aligned}T_n^k(a)&=\sum_{p=0}^{n}\binom{k+n-p}{n-p}[s_p(a)-s_{p-1}(a)]\\&=\sum_{p=0}^{n}\binom{k+n-p}{n-p}s_p(a)-\sum_{p=0}^{n-1}\binom{k+n-p-1}{n-p-1}s_p(a)\end{aligned}$$

On remarque alors que, pour $p=n$, $\binom{k+n-p}{n-p}=\binom{k}{0}=\binom{k-1}{0}$ et que $\binom{k+n-p}{n-p}-\binom{k+n-p-1}{n-p-1}=\binom{k+n-p-1}{n-p}$, d'où la relation. .... $\boxed{2}$

Pour $k\geqslant 2$, on procède de même en remarquant que : $s_n(a)=(n+1)s_n^1(a)-ns_{n-1}(a)$. On a alors

$$\begin{aligned}T_n^k(a)&=\sum_{p=0}^{n}\binom{k+n-p-1}{n-p}\left[(p+1)s_p^1(a)-ps_{p-1}^1(a)\right]\\&=\sum_{p=0}^{n}\binom{k+n-p-1}{n-p}(p+1)s_p^1(a)-\sum_{p=0}^{n-1}\binom{k+n-p-2}{n-p-1}(p+1)s_p^1(a)\end{aligned}$$

et, toujours avec les mêmes remarques, on arrive à

$$T_n^k(a)=\sum_{p=0}^{n}\binom{k+n-p-2}{n-p}(p+1)s_p^1(a).$$ $\boxed{3}$

IV.2. a. On a $s_p(F(a))=s_p^1(a)$, alors, pour $\underline{k\geqslant 1}$, on utilise les 2 égalités du 1.b. ; il suffit donc de prouver que

$$\sum_{p=0}^{n}\binom{k+n-p-2}{n-p}(p+1)s_p^1(a)=(n+k)\sum_{p=0}^{n}\binom{k+n-p-2}{n-p}s_p^1(a)-(k-1)\sum_{p=0}^{n}\binom{k+n-p-1}{n-p}s_p^1(a)$$

ce qui est une conséquence de

$$(n+k)\binom{k+n-p-2}{n-p}-(k-1)\binom{k+n-p-1}{n-p}=(p+1)\binom{k+n-p-2}{n-p},$$

et, en posant $h=n+k-p-1$ et $m=n-p$, cette dernière relation s'écrit : $h\binom{h-1}{m}=(h-m)\binom{h}{m}$ (pour $k\geqslant 2$) ce qui est un résultat classique .... $\boxed{3}$

On remplace ensuite les T_n^k en fonction des t_n^k et, en utilisant l'identité classique $(n+k)\binom{k+n-1}{n}=k\binom{k+n}{n}$ on en déduit la dernière relation

$$t_n^k(a)=kt_n^{k-1}(F(a))-(k-1)t_n^k(F(a))$$ $\boxed{2}$

b. La première égalité est en fait équivalente à $(n+k)t_n^k(a') - nt_{n-1}^k(a') = kt_n^{k-1}(a')$ (où on a posé $a' = F(a)$).

Or $\dfrac{n+k}{\binom{n+k}{n}} = \dfrac{n}{\binom{k+n-1}{n-1}}$ donc

$$(n+k)t_n^k(a') - nt_{n-1}^k(a') = \frac{n}{\binom{k+n-1}{n-1}}.\binom{n+k-1}{n}t^{k-1}(a') = kt_n^{k-1}(a')$$

ce qui est la relation demandée .... $\boxed{2}$

On additionne ensuite toutes les égalités que l'on peut écrire avec $p \leqslant n$ d'où

$$t_n^k(F(a)) = \frac{1}{n+1}\sum_{p=0}^{n} t_p^k(a). \qquad \boxed{2}$$

IV.3. a. Si $F(a) \in \mathcal{T}_{k-1}$ alors $F(a) \in \mathcal{T}_k$, donc $t_n^{k-1}(F(a))$ et $t_n^k(F(a))$ convergent ; comme $t_n^k(a) = kt_n^{k-1}(F(a)) - (k-1)t_n^k(F(a))$, $t_n^k(a)$ converge, $a \in \mathcal{T}_k$. .... $\boxed{2}$

Enfin, comme $t^{k-1}(F(a)) = t^k(F(a))$, on en déduit que $t^k(a) = t^{k-1}(F(a))$. ...... $\boxed{1}$

Réciproque : si $a \in \mathcal{T}_k$ alors la dernière relation du 2.b. nous permet d'affirmer que $F(a) \in \mathcal{T}^k$ et la relation rappelée ci-dessus nous assure alors que $F(a) \in \mathcal{T}^{k-1}$ on a donc l'équivalence :

$$a \in \mathcal{T}^k \Leftrightarrow F(a) \in \mathcal{T}^{k-1}. \qquad \boxed{3}$$

b. Si on note F^k la $k^{\text{ième}}$ itérée de F, on aura $a \in \mathcal{T}^k \Leftrightarrow F^k(a) \in \mathcal{T}_0 = \mathcal{S}_0$.

Comme $s_n^k(F(a)) = s_n^{k+1}(a)$ alors $s_n^0(F^k(a)) = s_n^k(a)$ donc $F^k(a) \in \mathcal{S}_0 \Leftrightarrow a \in \mathcal{S}_k$.

Conclusion : on a $\underline{\mathcal{S}_k = \mathcal{T}_k}$ .... $\boxed{3}$

Pour terminer, $t^k(a) = t^{k-1}(F(a)) = t^0(F^k(a)) = s^0(F^k(a)) = s^k(a)$ donc, lorsqu'elles existent, les sommes d'ordre k et les sommes d'indice k sont égales. .... $\boxed{2}$