SPÉCIALE MP* : DEVOIR SURVEILLÉ

Vu les commentaires des jurys des concours, on demande dans ce devoir de faire

- un effort de présentation :
  - écrire lisiblement,
  - mettre en évidence les résultats (les souligner ou les encadrer, les dégager),
- un effort de rédaction :
  - bien justifier les théorèmes utilisés,
  - bien structurer les arguments (revenir à la ligne pour chacun d'entre eux),
- et aussi un effort de concision.

Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On appellera $\mathbb{K}$-*algèbre* commutative tout ensemble A espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ muni d'une multiplication interne (notée xy) associative, commutative, distributive par rapport à l'addition et possédant par rapport à la multiplication externe la propriété suivante :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall (x,y) \in A^2, \quad \lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y).$$

$\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et on le munit d'une structure d'algèbre avec la multiplication interne définie par

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)(y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1y_1, x_2y_2, \dots, x_ny_n).$$

On appelle e_i le $i^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique $\mathcal{E}$ de $\mathbb{K}^n$ et on note

$$\varepsilon = e_1 + e_2 + \cdots + e_n = (1, 1, \dots, 1)$$

qui est manifestement l'élément unité de l'algèbre.

Partie I

I.1. On dit que la forme linéaire φ définie sur $\mathbb{K}^n$ est multiplicative si :

$$\forall x \in \mathbb{K}^n,\ \forall y \in \mathbb{K}^n, \quad \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y).$$

Établir que les seules formes multiplicatives φ de $\mathbb{K}^n$ sont la forme nulle et les formes c_1, c_2,... c_n où c_i désigne la $i^{\text{ème}}$ forme coordonnée dans la base canonique $\mathcal{E}$ (on pourra calculer $\varphi(e_ie_i)$ et $\varphi(e_ie_j)$ pour $i \neq j$).

I.2. **a.** Soit f un automorphisme d'algèbre de $\mathbb{K}^n$: f est une bijection de $\mathbb{K}^n$ vers $\mathbb{K}^n$ compatible avec les trois lois, c'est à dire f est linéaire et, de plus

$$\forall x \in \mathbb{K}^n,\ \forall y \in \mathbb{K}^n, \quad f(xy) = f(x)f(y).$$

Si φ est une forme linéaire multiplicative de $\mathbb{K}^n$ autre que la forme nulle montrer que $\varphi \circ f$ est aussi une forme linéaire multiplicative non nulle.

b. En déduire tous les automorphismes d'algèbre de $\mathbb{K}^n$. Quel est leur nombre ?

Dans ce problème, on appellera sous-algèbre de $\mathbb{K}^n$ tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ contenant l'élément unité ε et stable par la multiplication interne.
La sous-algèbre engendrée par une partie P de $\mathbb{K}^n$ est l'intersection de toutes les sous-algèbres la contenant, on admettra que c'est encore une sous-algèbre.

I.3. **a.** Soit a un élément de $\mathbb{K}^n$, on suppose que les coordonnées (a_i) de a dans la base $\mathcal{E}$ sont toutes distinctes. Calculer $(a - a_1\varepsilon)(a - a_2\varepsilon)(\dots)(a - a_{n-1}\varepsilon)$.

b. On note $\mathcal{A}$ la sous-algèbre engendrée par a et $\mathbb{K}[a]$ l'ensemble $\{P(a),\ P \in \mathbb{K}[X]\}$. Montrer par double inclusion que

$$\mathcal{A} = \mathbb{K}[a] = \{\alpha_0\varepsilon + \alpha_1 a + \cdots + \alpha_p a^p, \alpha_i \in \mathbb{K}\}.$$

c. En déduire l'équivalence suivante :
La sous-algèbre engendrée par a est $\mathbb{K}^n$ si et seulement si les coordonnées de a dans la base $\mathcal{E}$ sont toutes distinctes.

I.4. Soit A une sous-algèbre de $\mathbb{K}^n$; on note $\bar{c}_1$, $\bar{c}_2$,... $\bar{c}_n$ les restrictions de c_1, c_2,... c_n à A (voir définition des c_i en **I.1**).

On suppose ici qu'il existe k tel que $\bar{c}_1$, $\bar{c}_2$,... $\bar{c}_k$ soient distinctes, et que, pour tout $i > k$, il existe $j \leqslant k$ vérifiant $\bar{c}_i = \bar{c}_j$.

a. Établir que $\bar{c}_1$, $\bar{c}_2$,... $\bar{c}_n$ sont toutes non nulles (utiliser ε).

b. Montrer que, pour tout couple i, j d'entiers tels que

$$i \neq j,\ 1 \leqslant i \leqslant k,\ 1 \leqslant j \leqslant k,$$

il existe $u_{ij} \in A$ tel que $c_i(u_{ij}) = 1$, $c_j(u_{ij}) = 0$. En donner une expression (s'inspirer du **I.3.a.**).

c. En déduire l'existence, pour tout entier l allant de 1 à k, d'un $w_l \in A$ tel que

$$\begin{cases} c_l(w_l) & = 1 \\ c_j(w_l) & = 0 \text{ pour tout } j \text{ vérifiant } j \neq l \text{ et } 1 \leqslant j \leqslant k \end{cases}$$

(exprimer w_l en fonction des u_{lj}).

d. Les vecteurs w_1, w_2,... w_k sont-ils liés ? Quel est leur somme ? Quel est le sous-espace vectoriel qu'ils engendrent ?

I.5. **a.** Donner la liste des sous-algèbres (autres que $\mathbb{K}^n$ elle-même) de $\mathbb{K}^n$ dans les cas $n = 2, 3$. Il est signalé que, par exemple, l'ensemble des (α, α, β) où (α, β) décrit $\mathbb{K}^2$ est une sous-algèbre de dimension 2 de $\mathbb{K}^3$.
On demande, pour chacune des sous-algèbres de $\mathbb{K}^n$ de donner un mode de génération analogue à celui-là.

b. Combien $\mathbb{K}^n$ a-t-elle de sous-algèbres de dimension 2, de dimension $n - 1$?

Partie II

On rappelle que la trace d'une matrice est égale à la somme des coefficients de la diagonale :

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

où $A = (a_{ij})$. On a alors la propriété suivante $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ ce qui permet de définir la trace d'un endomorphisme $\mathrm{Tr}(u) = \mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(P^{-1}AP)$ où A est la matrice de u dans une base quelconque.

II.1. Soit a un élément de $\mathbb{K}^n$, on définit μ_a l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ qui à tout x associe ax. Calculer la trace de μ_a en fonction des $c_i(a)$ où $c_i(a)$ désigne la $i^{\text{ème}}$ coordonnée de a dans la base $\mathcal{E}$. Ce nombre sera dit trace de a et sera noté $\mathrm{Tr}(a)$.

On étudie dans toute la suite du problème les bases $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ de $\mathbb{K}^n$ ayant la propriété suivante :

$$\forall (i,j) \in [1,n]^2,\ \exists k \in [1,n] \mid v_i v_j = v_k.$$

Une telle base sera dite base stable de $\mathbb{K}^n$.

II.2. **a.** Établir que, si n vecteurs forment une base stable de $\mathbb{K}^n$, leurs images par tout automorphisme d'algèbre de $\mathbb{K}^n$ forment une base stable.

b. Montrer que, si une matrice M carrée d'ordre n sur $\mathbb{K}$ est la matrice de passage de $\mathcal{E}$ à une base stable, il en est de même de toute matrice déduite de M par permutation des lignes ou par permutation des colonnes.

II.3. **a.** Soit $\mathcal{B}$ une base stable de $\mathbb{K}^n$, prouver que la forme linéaire qui prend la valeur 1 pour chacun des vecteurs de $\mathcal{B}$ est multiplicative (cf **I.1**).

b. Étant donné une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^n$, on appellera matrice de $\mathcal{B}$ et on notera $M_{\mathcal{B}}$ la matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{B}$, c'est à dire la matrice dont le terme situé dans la ligne i et la colonne j est la $i^{\text{ème}}$ coordonnée dans $\mathcal{E}$ du $j^{\text{ème}}$ vecteur de $\mathcal{B}$.
Montrer que, si $\mathcal{B}$ est stable, $M_{\mathcal{B}}$ comporte une ligne et une seule dont tous les termes sont égaux à 1.

II.4. Donner les matrices de toutes les bases stables de $\mathbb{K}^2$.

II.5. Soit $\mathcal{B}$ une base stable, a un élément de $\mathcal{B}$.

a. Établir l'existence d'un entier $p > 0$ tel que $a^{p+1} = a$. On aura intérêt à se servir de la suite a, a^2, a^3, ...

b. Dans le cas de l'algèbre $\mathbb{R}^n$, trouver une valeur p indépendante de $\mathcal{B}$ et de a.

II.6. Montrer que le nombre de bases stables de $\mathbb{K}^n$ est fini.

II.7. Soit $\mathcal{B}$ une base stable de $\mathbb{K}^n$, a un élément de $\mathcal{B}$. En utilisant l'application μ_a définie au **II.1** et sa matrice dans une base convenable, établir que la trace de a est un entier compris au sens large entre 0 et n.

A quelle condition a-t-on $\mathrm{Tr}(a) = n$?

II.8. **a.** Soit $\mathcal{B}$ une base stable de $\mathbb{K}^n$, établir que $M_{\mathcal{B}}$ comporte au moins $2n-1$ coefficients non nuls.

b. On suppose que $M_{\mathcal{B}}$ comporte exactement $2n-1$ coefficients non nuls.
Établir que $M_{\mathcal{B}}$ se déduit par permutation de lignes et de colonnes de la matrice N dont tous les éléments sont nuls sauf ceux de la première ligne et de la diagonale qui, eux, sont égaux à 1.

c. Montrer que N est bien la matrice d'une base stable.

Partie III

On étudie désormais les bases stables de $\mathbb{K}^n$ dont tout élément a est inversible (c'est à dire qu'il existe $b \in \mathbb{K}^n$ tel que $ab = \varepsilon$). Ces bases seront dites bases stables inversibles.

III.1. **a.** Montrer que, si $\mathcal{B}$ est une base stable inversible, alors l'un des vecteurs de $\mathcal{B}$ est ε.

b. Montrer que les coefficients de la matrice $M_{\mathcal{B}}$ d'une base stable inversible sont tous de module 1.

III.2. En raisonnant comme en **II.7**, établir que, pour tout élément a d'une base stable inversible tel que $a \neq \varepsilon$, on a

$$\mathrm{Tr}(a) = 0.$$

III.3. Soit $\mathcal{B}$ une base stable inversible, $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, et s la somme de ses vecteurs. Calculer $\mathrm{Tr}(s)$; calculer sv_i pour i allant de 1 à n, puis s^2. En déduire que s est le produit par n d'un vecteur de $\mathcal{E}$.

III.4. Montrer que la matrice $M_{\mathcal{B}}$ de toute base inversible $\mathcal{B}$ de $\mathbb{C}^3$ se déduit par permutations de lignes et de colonnes d'une matrice que l'on donnera.

III.5. **a.** Montrer que l'ensemble des vecteurs d'une base stable inversible de $\mathbb{K}^n$ est un groupe multiplicatif.

b. Montrer que, si $\mathcal{B}$ est une telle base, alors
$$M_{\mathcal{B}}^{\mathrm{T}}.\overline{M}_{\mathcal{B}} = nI_n.$$
(On distinguera les deux cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.)

c. En déduire le module du déterminant de $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$.

III.6. On prend ici $\mathbb{K} = \mathbb{C}$; on appelle P_z la matrice carrée d'ordre n dont le terme général (ligne j, colonne k) est $z^{(j-1)(k-1)}$. Établir que P_z est la matrice d'une base stable inversible de $\mathbb{C}^n$ si et seulement si z engendre $\mathbb{U}_n$ groupe des racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité.

Donner une valeur de z possédant ces propriétés.

III.7. On suppose ici que $\mathbb{R}^n$ a au moins une base stable inversible $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$. Une partie $(v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_p})$ sera dite partie génératrice de $\mathcal{B}$ si tout élément de $\mathcal{B}$ peut s'écrire sous la forme d'un produit
$$v_{i_1}^{m_1} v_{i_2}^{m_2} \ldots v_{i_p}^{m_p}$$
où m_1, m_2,... m_p sont des entiers relatifs (on pose, pour tout élément a non nul de $\mathbb{R}^n$, $a^0 = \varepsilon$).

a. Montrer que $\mathcal{B}$ possède une partie génératrice et que tout élément de $\mathcal{B}$ a pour carré ε.

b. Soit $\mathcal{G} = (v_{j_1}, v_{j_2}, \ldots, v_{j_k})$ une partie génératrice de $\mathcal{B}$ dont le nombre d'éléments k est le plus petit possible.
Établir que tout élément de $\mathcal{B}$ peut s'écrire, et de façon unique, sous la forme
$$v_{j_1}^{r_1} v_{j_2}^{r_2} \ldots v_{j_k}^{r_k}$$
où chacun des exposants r_1, r_2,... r_k vaut 0 ou 1.

c. Quelle relation existe-t-il entre n et k ?

III.8. **a.** On recherche les bases stables inversibles de $\mathbb{R}^4$. Montrer qu'il y en a une et une seule, $\mathcal{B}_0$, dont la matrice M_0 a sa première ligne formée de quatre 1, a une trace égale à 4 et est symétrique.

b. Les matrices des autres bases stables inversibles de $\mathbb{R}^4$ se déduisent-elles de M_0 par permutation des lignes et des colonnes ?

III.9. **a.** Soit A la matrice d'une base stable inversible de $\mathbb{R}^n$. Que dire de la matrice carrée réelle d'ordre $2n$ définie par
$$M = \begin{pmatrix} A & A \\ A & -A \end{pmatrix} \quad ?$$

b. Pour quels n l'algèbre $\mathbb{R}^n$ a-t-elle au moins une base stable inversible ?