SPÉCIALE MP* : LES THÉORÈMES IMPORTANTS

À l'écrit, lorsqu'on utilise un théorème, il faut citer les hypothèses clairement pour en utiliser la conclusion.

1. Première année

1.1. Chapitre 1 : nombres complexes et géométrie.

(1) Connaître les formules de trigonométrie (cf. page 15).
(2) Connaître la résolution de l'équation du second degré sur $\mathbb{C}$ (cf.page 16).
(3) Proposition1.1.9 **Résolution de l'équation $e^z = \alpha$**
On obtient $z = \ln|\alpha| + i\operatorname{Arg}(\alpha) + 2ik\pi$.
(4) Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ admettent a et b comme affixe alors $\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{v} = \operatorname{Re}(\overline{a}b)$ (cf. page 20).
(5) Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ont a et b comme affixe alors $\det(\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{v}) = \operatorname{Im}(\overline{a}b)$ (cf. page 21).

1.2. Chapitre 2 : fonctions usuelles et équations différentielles linéaires.

(1) Bien connaître les propriétés :
$$(a^x)^{x'} = a^{xx'},\ a^x b^x = (ab)^x,\ a^{-x} = \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x\ (a > 0) \text{ (cf. page 30).}$$
(2) Revoir les fonctions hyperboliques directes et inverses (cf. pages 33 et 34), de même avec les fonctions circulaires (pages 35 et 36).
(3) Savoir résoudre une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants (cf. page 40) et connaître notamment la
Proposition 2.2.6 **Recherche d'une solution particulière**
On cherche une solution sous la forme $y = e^{\alpha x}Q$ où Q est un polynôme.
- Si $T(\alpha) \neq 0$ alors Q est de même degré que P. Les coefficients de Q se trouvent alors par la résolution d'un système triangulaire.
- Si $T(\alpha) = 0$ alors Q vérifie $P = (b + 2a\alpha)Q' + aQ''$.
  - Si α n'est pas racine double on cherche alors Q' (on a là aussi un système triangulaire) et on intègre.
  - Si α est racine double, on a directement Q'' que l'on intègre deux fois.

(4) Revoir les coniques (cf. pages 44 et 45). Notamment, avant chaque épreuve susceptible de porter sur les coniques (écrit Centrale Maths 2, oral Centrale Maths 1) regarder les formules :
Recherche des éléments caractéristiques :
(i) Ellipse et hyperbole : $\dfrac{x^2}{a^2} + \varepsilon\dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b$.
On pose $c = \sqrt{a^2 - \varepsilon b^2}$, $e = \dfrac{c}{a}$, $p = \dfrac{b^2}{a}$, $h = \dfrac{b^2}{c}$.
Les foyers ont pour coordonnées $(c, 0)$ et $(-c, 0)$, les directrices ont pour équation $x = \pm\dfrac{a^2}{c}$.
En polaires $a = \dfrac{p}{|1 - e^2|}$, $b = \dfrac{p}{\sqrt{|1 - e^2|}}$ $(e \neq 1)$, $c = \dfrac{ep}{|1 - e^2|}$.
(ii) Parabole $y^2 = 2px$, foyer $F(p/2, 0)$, directrice $x = -p/2$.
En polaires $p = h$, $c = -\dfrac{h}{2}$.

1.3. Chapitre 3 : nombres réels, suites et fonctions.

(1) Connaître la
PROPOSITION 3.1.2 **Caractérisation de la borne supérieure**
Soit $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$ alors
$M = \sup E$ ($M = \sup\limits_{x \in E} x$) ssi
(i) $\forall x \in E,\ x \leqslant M$,
(ii) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in E,\ x \geqslant M - \varepsilon$.

(2) Les suites adjacentes
COROLLAIRE 3.12 **Suites adjacentes**
$$\begin{pmatrix} (u_n) \nearrow \quad (v_n) \searrow \\ \lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l \\ \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ v_p \geqslant l \geqslant u_q \end{pmatrix}$$

1.4. Chapitre 4 : calcul différentiel et intégral.

(1) La formule de Leibniz
THÉORÈME 4.4. Si f et g sont deux fonctions de $\mathcal{C}^n(I)$ alors :
$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$$
utile si f est un polynôme de degré faible : exemple $(x \sin x)^{(n)}$.

(2) Ne pas oublier d'utiliser le
THÉORÈME 4.10. **Théorème du prolongement dérivable**
Si f est continue sur $[a,b]$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a,b]$ et si f' a une limite finie en a alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$.

(3) Revoir les fonctions convexes (cf. page 72).

(4) Ne pas oublier que les fonctions à valeurs complexes se dérivent comme les fonctions à valeurs réelles et qu'on a aussi la formule de Leibniz.

(5) Savoir utiliser l'inégalité de la moyenne (pour les intégrales).

(6) Penser aux sommes de Riemann : savoir les reconnaître et utiliser la propriété $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{b-a}{n}[f(x_1) + \cdots + f(b)] = \int_{[a,b]} f$ (même si f est à valeurs complexes).

(7) Penser à l'intégration par parties qui sert souvent.

(8) Connaître absolument la formule de Taylor avec reste intégral :
Si f est de classe C^n sur $[a,b]$ alors
$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \cdots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{1}{(n-1)!} \int_a^b (b-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

(9) Connaître les développements limités (cf. page 87) qui se transforment en développement en séries entières...

1.5. Chapitre 5 : fonctions de deux variables.

Chapitre repris en deuxième année.

1.6. Chapitre 6 : géométrie différentielle.

(1) Connaître le repère de Frenet et l'abscisse curviligne.

(2) Les formules :
Formules de Frenet
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}s} = \gamma \overrightarrow{N}, \quad \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{N}}{\mathrm{d}s} = -\gamma \overrightarrow{T}.} \qquad \boxed{\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}\alpha} = \overrightarrow{N}, \quad \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{N}}{\mathrm{d}\alpha} = -\overrightarrow{T}}$$

Vitesse et accélération dans le repère de Frenet

On pose $v = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ on a alors

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t} = v\overrightarrow{T} = ve^{i\alpha}} \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{T} + \frac{v^2}{R}\overrightarrow{N} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}e^{i\alpha} + \frac{v^2}{R}e^{i(\alpha+\pi/2)}}$$

1.7. Chapitre 7 : nombres et structures algébriques usuelles.

(1) Bien retenir la

Définition 7.1.8 **Réunion et intersection d'une famille d'ensembles**

Soit I un ensemble non vide, $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-ensembles d'un même ensemble E, on pose alors les définitions suivantes :

$$(i)\ \bigcap_{i\in I} F_i = \{x \in E \mid \forall i \in I, x \in F_i\}, \quad (ii)\ \bigcup_{i\in I} F_i = \{x \in E \mid \exists i \in I, x \in F_i\}.$$

(2) Faire attention à la relation $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ (cf. proposition 7.1.2 page 114).

(3) Ne pas oublier que $\begin{array}{ccc} (g \circ f \text{ surjective }) & \Rightarrow & (g \text{ surjective }) \\ (g \circ f \text{ injective }) & \Rightarrow & (f \text{ injective }) \end{array}.$

(4) Une récurrence bien ordonnée commence par la propriété à l'ordre 0 et faire attention, lorsqu'on utilise une récurrence double, à bien vérifier la propriété aux ordres 0 et 1.

(5) Connaître (ou retrouver rapidement) les relations sur les coefficients binomiaux :

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p},\ \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p},\ \binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \cdots + \binom{p-1}{p-1},$$

$$2^n = \binom{n}{0} + \cdots + \binom{n}{n},\ \binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1} = \frac{n-p+1}{p}\binom{n}{p-1}.$$

(6) Savoir utiliser les théorèmes de Bézout et de Gauss :

Théorème de Gauss

Si $a \wedge b = 1$ et si $a|bc$ alors $a|c$.

(7) Ne pas se planter dans la formule du binôme :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

(8) Connaître la somme des termes d'une suite géométrique :

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_0 \frac{u_0 - u_n}{u_0 - u_1} = u_0 \frac{1-q^n}{1-q}.$$

1.8. Chapitre 8 : algèbre linéaire et polynômes.

(1) Connaître l'expression du barycentre :

Définition 8.1.7. **Barycentre**

Soit $(\alpha_i)_{i\in[\![1,m]\!]}$ une famille de réels de somme non nulle, on dit que $G \in E$ est barycentre des points A_i affectés des coefficients α_i pour $i \in [\![1, m]\!]$ ssi$_{\text{déf}}$

$$G = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i A_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \text{ soit } \overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i}}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}$$

(plus commodément, on écrit G barycentre des $(A_i, \alpha_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$).

(2) Un grand oublié parmi les théorèmes sur les bases :

Corollaire 8.9 **Théorème d'échange**

Si L est une partie libre de E, si $\mathcal{B}$ est une base de E alors on peut choisir H sous-ensemble de $\mathcal{B}$ tel que $L \cup H$ soit une base.

(3) Les relations sur les dimensions sont en général bien connues, notamment $\dim(E_1+E_2)$ et la formule du rang.

(4) À ne pas oublier aussi, la caractérisation d'une racine d'ordre m :
THÉORÈME 8.26
α est racine d'ordre m de P ssi $P(\alpha) = \ldots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(m)}(\alpha) \neq 0$.

(5) Revoir les relations entre coefficients et racines :
Avec $\sigma_1 = \alpha_1 + \cdots + \alpha_p$(noté $\sum \alpha_1$), $\sigma_2 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \cdots + \alpha_{p-1}\alpha_p$ (noté $\sum \alpha_1\alpha_2$), ..., $\sigma_k = \sum \alpha_1 \ldots \alpha_k$, $\sigma_n = \alpha_1 \ldots \alpha_p$, on a $\sigma_k = (-1)^k \dfrac{a_{p-k}}{a_p}$.

(6) J'ai aussi remarqué que, si l'on se souvient de la décomposition d'un polynôme sur $\mathbb{C}$, on ne sait pas toujours bien comment ça se passe sur $\mathbb{R}$:
THÉORÈME 8.29 **Décomposition d'un polynôme sur $\mathbb{R}$**
Tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ se décompose sous la forme

$$\boxed{P = \lambda \prod_{i=1}^{s} (X - x_i)^{\alpha_i} \prod_{j=1}^{r} [(X - u_j)^2 + v_j^2]^{\beta_j}}$$

(7) Savoir décomposer la fraction rationnelle (et toutes ses copines) $\dfrac{1}{X^n + 1}$ sans calcul.

(8) Ne pas confondre matrice scalaire $M = aI_n$ et matrice diagonale $M = \mathrm{Diag}(\lambda_i)$.

(9) Choisir clairement la notation de la transposée d'une matrice : soit ${}^tA$, soit A^{T}.

(10) $X = PX'$ doit vous rappeler quelque chose...

(11) Si A et B sont deux matrices carrées d'ordre n qui vérifient $AB = I_n$ alors $B = A^{-1}$.

(12) Concernant les opérations sur les matrices, se rappeler que
PROPOSITION 8.4.7 Les opérations que l'on peut faire sur les lignes se traduisent par une multiplication à gauche par une matrice carrée L (gauche $\to$ left $\to$ ligne).

(13) Un théorème important qui est bien connu en général mais souvent oublié dans les démonstrations :
THÉORÈME 8.42
$\mathrm{Rg}(A) = r \Leftrightarrow A = U \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V$ où U et V sont des matrices carrées inversibles.

(14) Une formule importante :
Si A' est la matrice des cofacteurs de A, matrice carrée, alors $AA'^{\mathrm{T}} = \det A . I_n$.

1.9. Chapitre 9 : espaces vectoriels euclidiens et géométrie euclidienne.

(1) Vous souvenez-vous des cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité triangulaire :
$(x|y)^2 = \|x\|^2.\|y\|^2$ ssi x et y sont liés et $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ ssi x et y sont positivement liés.

(2) L'algorithme de Schmidt peut rendre de nombreux services :
Algorithme de Schmidt.
Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base quelconque d'un e.v. euclidien E, on cherche à construire une base orthonormale (ε_i) à partir de E vérifiant les propriétés suivantes :
(i) $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\varepsilon_i \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_i)$,
(ii) $\varepsilon_i.e_i > 0$.

(3) Qu'est-ce qu'une application affine ?
DÉFINITION 9.2.2. **Application affine**
E désigne le plan ou l'espace.
$f : E \to E$ est une application affine ssi$_{\text{déf}}$ $\exists \overrightarrow{f} \in \mathcal{L}(E)$ telle que

$$\forall (A, B) \in E^2, f(B) = f(A) + \overrightarrow{f}(B - A) = f(A) + \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{AB}\right).$$

(4) Et se rappeler qu'une application affine conserve les barycentres (THÉORÈME 9.5).
(5) Un théorème et son petit frère :
THÉORÈME 9.6
Si u est une isométrie de E telle que $u(O) = O$ alors u est une application linéaire.
COROLLAIRE 9.7
Toute isométrie est une application affine

2. Deuxième année

2.1. Chapitre 1 : algèbre générale.

(1) Les sous-groupes de $\mathbb{Z}$ sont de la forme $a\mathbb{Z}$.
Les sous-groupes de $\mathbb{R}$ sont de la forme $a\mathbb{Z}$ ou sont denses dans $\mathbb{R}$.
(2) $\bar{a}$ engendre le groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ ssi $a \wedge n = 1$ (THÉORÈME 1.2).
(3) On a vu une version plus générale du théorème suivant :
THÉORÈME 1.6 **Factorisation du morphisme de $\mathbb{Z}$ dans A**
Si φ est le morphisme canonique de $\mathbb{Z}$ dans un anneau A, $\operatorname{Ker}\varphi = n\mathbb{Z}$ son noyau alors il existe un unique isomorphisme $\overline{\varphi}$ de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans $\varphi(\mathbb{Z}) \subset A$ telle que $\overline{\varphi}(\bar{a}) = \varphi(a)$.
(4) Enfin, dans ce court chapitre, ne pas oublier le
THÉORÈME 1.8. **Théorème Chinois**
Soient p et q deux entiers premiers entre eux et $(y, z) \in \mathbb{Z}^2$ alors il existe un entier x dans $\mathbb{Z}$ tel que $\begin{cases} x \equiv y \mod p \\ x \equiv z \mod q \end{cases}$.
Toutes les solutions de ce système sont congrues modulo pq.

2.2. Chapitre 2 : algèbre linéaire et géométrie affine.

Des répétitions dans ce chapitre.

(1) Bien savoir ce qu'est une algèbre et il est souvent plus simple de vérifier qu'un ensemble est une sous-algèbre :
C'est un sous-anneau (stable par $+$, $\times$) et un sous-espace vectoriel (stable par .).
(2) Ne pas perdre de vue ce qu'on appelle fonction polynomiale (sans ˆ sur le o) :
$f \in \mathcal{P}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$ s'écrit $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{N}^n} \lambda_{\alpha_1,\dots,\alpha_n} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$.
En analyse, une fonction polynomiale est continue (utile pour les déterminants par exemple).
(3) Synthèse sur les sommes directes d'espaces vectoriels :
$\sum_{i\in I} E_i$ est directe ssi
- la décomposition d'un vecteur est unique, c'est la définition (cf. DÉFINITION 2.1.4),
- $\left(0 = \sum_{i\in I} x_i \Rightarrow \forall i \in I,\ x_i = 0\right)$ (cf. PROPOSITION 2.1.2.),
- $\dim \sum_{i\in I} E_i = \sum_{i\in I} \dim E_i$ (COROLLAIRE 2.3).

(4) Les polynômes de Lagrange font (ou refont) leur apparition $L_i = \prod_{j\neq i} \dfrac{X - a_j}{a_i - a_j}$.
(5) La dualité commence à faire des victimes avec
Si $\psi \in E^*$ et si ψ s'annule sur $\operatorname{Ker}\varphi$ alors ψ est colinéaire à φ (cf. THÉORÈME 2.9).
(6) Les théorèmes 2.11 et 2.12 sont intéressants :
$\dim\{\varphi \in E^* \mid \forall x \in F,\ \varphi(x) = 0\} = \dim F^o = \dim E - \dim F$,
$\dim \bigcap_{i=1}^{q} H_i = \dim E - q$.
(7) La trace d'un projecteur est égale à son rang (cf. PROPOSITION 2.1.8).

2.3. **Chapitre 3 : réduction des endomorphismes.**
Voilà un chapitre d'algèbre important.

(1) Dans une base adaptée à une décomposition en somme directe de sous-espaces stables, la matrice de u s'écrit $\begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_p \end{pmatrix}$.
(2) Le lemme des noyaux est l'un des résultats les plus importants :
si $P \wedge Q = 1$ alors $\operatorname{Ker}(PQ)(u) = \operatorname{Ker} P(u) \oplus \operatorname{Ker} Q(u)$.
(3) Le polynôme caractéristique est bien connu mais attention car dans certains énoncés on le définit par $\det(x \operatorname{Id}_E - u)$. En dimension 2, il vaut $x^2 - \operatorname{Tr}(u)x + \det u$.
Le théorème de Cayley-Hamilton est un grand classique.
(4) u est diagonalisable ssi (par définition) E est somme directe de ses sous-espaces propres (cf. Définition 3.2.5.) et dans ce cas $u = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)} \lambda p_\lambda$.
(5) Le théorème le plus important :
Théorème 3.7 u est diagonalisable ssi il existe un polynôme annulateur scindé sur $\mathbb{K}$ dont toutes les racines sont simples.
(6) Tout endomorphisme est trigonalisable sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$.

2.4. **Chapitre 4 : espaces euclidiens et hermitiens.**
Là aussi il y a quelques répétitions.

(1) Retenir l'expression analytique $B(x, y) = X^{\mathrm{T}} M Y$ pour une forme bilinéaire symétrique.
(2) Il est souvent utile de connaître l'expression de la projection orthogonale dans une base orthonormée :
$$P_F(x) = \sum_{i=1}^{n} (e_i|x) e_i \text{ où } F = \operatorname{Vect}(e_i).$$
(3) Une propriété qui passe souvent inaperçue :
Proposition 4.2.1 Si $(e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est une base orthonormale de E et si $u \in \mathcal{L}(E)$ alors $\operatorname{Tr}(u) = \sum\limits_{i=1}^{n} (e_i|u(e_i))$.
(4) Si F est de dimension finie alors $F^{\perp\perp} = F$ (cf. Théorème 4.2) mais ce n'est plus valable si F est de dimension infinie.
(5) En dimension finie, tout endomorphisme u admet un adjoint u^* qui vérifie
$u(F) \subset F \Leftrightarrow u^*(F^\perp) \subset F^\perp$, $\operatorname{Ker} u^* = (\operatorname{Im} u)^\perp$ et $\operatorname{Im} u^* = (\operatorname{Ker} u)^\perp$.
(6) Le théorème fondamental du coin :
Théorème 4.7 **Théorème fondamental**
Si u est un endomorphisme autoadjoint de E espace vectoriel euclidien alors
$$E = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)} E_\lambda$$
et les E_λ sont orthogonaux.
(7) Il faut avoir bien assimilé la réduction d'une forme quadratique dans le groupe orthogonal :
Théorème 4.9 Il existe une base orthonormale dans laquelle $Q(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$ où les λ_i sont les valeurs propres de u.
(8) Il n'est pas nécessaire pour l'écrit de s'exciter sur les coniques ni sur les quadriques, à part ce qui a été vu en révision (OUF de soulagement général !).

Il ne reste plus qu'un embryon de programme sur les espaces préhilbertiens complexes.

(9) Le produit scalaire hermitien est linéaire à droite, semi-linéaire à gauche. On retrouve les mêmes propriétés qu'avec les espaces euclidiens (notamment l'expression de la projection) sauf la formule de restitution avec le fameux truc pour draguer :
Dans l'identité de polarisation, le coefficient devant la norme multiplié par le coefficient de y vaut toujours 1.

2.5. **Chapitre 5 : suites et fonctions.**
Ceci est le plus gros chapitre du programme, il y a deux volets : d'une part la topologie des espaces vectoriels normés, d'autre part les théorèmes sur les séries numériques et sur les séries de fonctions.

a) La topologie

(1) Topologie des espaces produits : si $(E_i, N_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ est une famille finie d'e.v.n. alors $E = E_1\times\ldots\times E_p$ est muni **par définition** de la norme $N(x) = \sup\limits_{i\in[\![1,p]\!]} N_i(x_i)$.
(2) Ne pas se tromper lorsqu'on parle de suite extraite d'une suite extraite.
(3) La version édulcorée du théorème du point fixe est à connaître :
THÉORÈME 5.5 **Théorème du point fixe**
Soit $f : A \to \mathbb{K}$ où $A \subset \mathbb{K}$ et $f(A) \subset A$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ admettant un point fixe $a \in A$.
Si f est contractante sur A (i.e. $\exists k < 1$, $\forall(x, y) \in A^2, |f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|$) alors a est l'unique point fixe de f.
Si on pose $x_0 = b \in A$, $x_{n+1} = f(x_n)$ et si $f(A) \subset A$ alors la suite (x_n) converge vers a, de plus on a $|x_n - a| \leqslant k^n|b - a|$.
(4) Un voisinage d'un point est un ensemble qui contient une boule ouverte et une propriété vraie au voisinage d'un point est une propriété qui est vraie sur une boule ouverte. Cette terminologie est parfaitement définie.
(5) Les ouverts supportent mal l'intersection sauf si elle est finie, la réunion ne leur pose pas de problème.
Pour les fermés, c'est le contraire.
(6) Comment montrer qu'un ensemble est un fermé :
- par la caractérisation séquentielle (cf. THÉORÈME 5.9), c'est la méthode préférée des taupins (mais pas toujours la mieux adaptée),
- en montrant que c'est l'image réciproque d'un fermé par une application continue.

(7) Tant qu'on parle d'application continue, pour montrer qu'une application linéaire u est continue, inutile de déballer les ε, il "suffit" de majorer $\|u(x)\|$ par $C\|x\|$ (cf. THÉORÈME 5.13).
(8) Les suites de Cauchy font un malheur, c'est une notion en général bien assimilée mais je rappelle deux choses :
PROPOSITION 5.1.6 Si E est un espace de Banach et si $A \subset E$, $A \neq \emptyset$, on a équivalence entre A complet $\Leftrightarrow$ A fermé.
et le
THÉORÈME 5.20 **Critère de Cauchy pour les fonctions**
On suppose que $f\ : A \subset E \to F$ où E et F sont des e.v.n., F complet, on a alors l'équivalence

$$\lim_{x\to a} f(x) \text{ existe ssi } \forall\varepsilon > 0,\ \exists\eta > 0,\ \forall(x, y) \in [A \cap \overline{B}(a, \eta)]^2,\ \|f(x) - f(y)\| \leqslant \varepsilon.$$

(9) On a généralisé les théorème de Heine au cas des applications continues sur $A \subset E$ dans F :
- L'image d'un compact est un compact,
- une application continue sur un compact est uniformément continue,
- l'image continue d'un connexe par arcs est un connexe par arcs.

(10) Une somme **finie** d'applications continues est continue, c'est une propriété élémentaire mais elle est souvent oubliée au profit d'une bagarre sans merci avec les ε.

b) Les séries

(1) Je le rappelle souvent mais il faut se méfier comme de la peste de la notation $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ qui représente une limite pour une **topologie donnée**.

(2) La passerelle qui existe entre les suites et les séries (série télescopique, série au différences), est indispensable.

(3) Pour le théorème des séries alternées, il y a trois hypothèses **S.D.N.** : signe, décroissance, limite nulle. Ne pas oublier dans l'euphorie qu'il y a deux conclusions : **C.E.** : convergence, encadrement.

(4) La règle de d'Alembert est très utile même si elle est assez grossière, vous pouvez par contre vous passer de la règle de Duhamel (qui est, ne l'oublions pas) hors programme.

(5) Le théorème 5.36 et son cousin, le 5.37 servent rarement mais ils sont parfois indispensables.
Le premier donne l'équivalent du reste d'une série convergente à termes positifs et le second permet de faire le même genre de choses avec une série à termes complexes.
Il en va de même pour les sommes partielles des séries divergentes (dans le cas positif seulement).

(6) Le théorème de comparaison d'une série à une intégrale rend des services inestimables mais sa valeur n'est pas souvent reconnue, aussi ayez une petite pensée émue pour ce théorème, il vous le rendra.

On arrive maintenant aux séries dans les espaces de Banach

(7) Une série A.C. n'est pas une série qui vérifie $\left\| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right\| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|$. Il faut commencer par vérifier que la série $\sum \|u_n\|$ converge puis justifier l'implication A.C. $\Rightarrow$ C.

(8) Pour inverser un élément dans une algèbre normée, penser au
THÉORÈME 5.44 **Convergence des séries géométriques**
Étant donné une algèbre normée $\mathcal{A}$ de dimension finie ayant e pour élément unité et u un élément de $\mathcal{A}$ tel que $\|u\| < 1$, la série $\sum u^n$ est absolument convergente, $e-u$ est inversible dans $\mathcal{A}$ et $(e-u)^{-1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u^n$.

(9) Le théorème d'interversion des sommations est mal connu car il sert peu souvent aussi je le rappelle ici
THÉORÈME 5.47 **Interversion de sommations, Théorème de Fubini**
Soit $u = (u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ une suite double de réels ou de complexes. Si

- $\forall q \in \mathbb{N}$, $\sum_{p=0}^{+\infty} |u_{p,q}|$ est convergente,
- $\sum_q \left(\sum_p |u_{p,q}| \right)$ converge

alors

- $\sum_p u_{p,q}$, $\sum_q u_{p,q}$ convergent et
- $\sum_{q=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} \right) = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q} \right)$.

i.e. on peut intervertir les sommations.

(10) Le T.D.L. (théorème de double limite) et son corollaire sont en général bien assimilés (ce qui peut surprendre), par contre, les théorèmes qui en découlent sont souvent maltraités.

(11) Arrive en tête de vos victimes le
THÉORÈME 5.58 **Dérivation de la limite d'une suite de fonctions**
Soit (f_n) une suite d'applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

$$\text{Si } \begin{pmatrix} f_n \xrightarrow[I]{C.S.} f \\ f'_n \xrightarrow[tt\ segment]{C.U.} h \end{pmatrix} \text{ alors } \begin{pmatrix} f_n \xrightarrow[tt\ segment]{C.U.} f \\ f \in \mathcal{C}^1(I) \\ f' = h. \end{pmatrix}$$

(12) Et pour finir ce chapitre extraordinairement long, les théorème de Weierstrass :
THÉORÈME 5.63 **Théorème de Weierstrass n ° 1**
Approximation polynomiale uniforme des fonctions continues sur un segment.
Soit $f \in \mathcal{C}([a,b])$ alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme P tel que

$$N_\infty(f - P) \leqslant \varepsilon.$$

THÉORÈME 5.64**Théorème de Weierstrass n ° 2**
Soit $f \in \mathcal{C}(T)$ ensemble des fonctions continues 2π-périodiques (T désigne le cercle unité sur $\mathbb{C}$ ou le tore–d'où le nom–). Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme trigonométrique P tel que

$$N_\infty(f - P) \leqslant \varepsilon.$$

Le front de lutte contre la maltraitance des théorèmes continue son action dans les pages qui suivent

2.6. Chapitre 6 : fonctions vectorielles, dérivation et intégration.

(1) Sur les fonctions vectorielles, il n'y a qu'une chose à bien retenir (le reste est du baratin) :
THÉORÈME 6.3 **Inégalité des accroissements finis**
Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ alors on a

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant (b-a) \sup_{t\in[a,b]} \|f'(t)\|$$

(2) L'intégrabilité des fonctions ne pose pas de problème majeurs, garder en tête un exemple de fonction intégrable sur $[0, +\infty[$ non bornée au voisinage de $+\infty$:
soit une fonction nulle sauf sur $]n - 1/n^3, n + 1/n^3[$, continue, affine par morceaux telle que $f(n) = n$ si $n \in \mathbb{N}^*$,
soit $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^5 \sin^2 x}$ (il est ici plus difficile de prouver que f est intégrable).

(3) Le théorème de changement de variable est au programme mais son usage est risqué aussi à n'utiliser qu'avec précaution :
THÉORÈME 6.18 **Changement de variable**
Si $f \in \mathrm{L}^1(I)$ et φ une bijection de l'intervalle I' sur I de classe $\mathcal{C}^1$ alors

$$\int_I f = \int_{I'} f \circ \varphi . |\varphi'|.$$

(4) Ne pas confondre les deux notions d'intégrales généralisées :
la première concerne les fonctions intégrables sur un intervalle quelconque,
la deuxième est donné en
DÉFINITION 6.2.4 **Intégrale impropre, intégrale généralisée**
Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ et f une fonction continue par morceaux sur $[a,b[$, si la fonction $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite en b on note encore $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ cette limite.
Dans ce cas on dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'intégrale impropre (ou généralisée) de f entre a et b. On dit aussi que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Viennent ensuite les théorèmes de Lebesgue, à bien connaître !

(5) Le T.C.D. : ce qui est essentiel, c'est l'hypothèse de domination, à bien justifier.

(6) Le deuxième théorème permet d'intégrer terme à terme et je cite les deux théorèmes qui le permettent, l'un sans hypothèse de domination, l'autre avec :

THÉORÈME 5.55 Intégration terme à terme d'une série d'applications
Soit (f_n) une suite d'applications continues sur $[a,b]$. Si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$ la série des intégrales est convergente et

$$\int_{[a,b]} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{[a,b]} f_n.$$

THÉORÈME 6.23 **Intégration terme à terme d'une série de fonctions**
Soit (f_n) une suite de fonctions à valeurs réelles ou complexes telle que l'on ait les hypothèses
• la série $\sum \int_I |f_n|$ converge, •$f_n \in \mathrm{L}^1(I)$, •$\sum f_n \xrightarrow[I]{C.S.} f \in \mathcal{CM}(I)$,
alors
•$f \in \mathrm{L}^1(I)$, •$N_1\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\Big) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} N_1(f_n)$, •$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$.
Ce qui est important de retenir dans ce théorème très puissant, c'est la première hypothèse
la série $\sum \int_I |f_n|$ converge.

(7) La continuité sous le signe intégral est souvent utile, de même que la dérivabilité. Là encore, l'hypothèse essentielle est la domination mais il ne faut pas être trop gourmand, il suffit de l'avoir localement. C'est l'objet de la
Remarque 6.2.6. La continuité étant une notion locale, l'hypothèse de domination n'a pas besoin d'être valable sur A en entier mais au voisinage de chaque point de A (et on peut prendre un voisinage compact) i.e.
$\forall x_0 \in A$, $\exists V_{x_0}$, $\exists \varphi_{x_0}$ *intégrable sur* I *telle que* $\forall x \in V_{x_0}$, $\forall t \in I$, $|f(x,t)| \leqslant \varphi_{x_0}(t)$.

Que faut-il savoir sur les intégrales doubles ?
Jusqu'à présent, les sujets d'écrit ont fait une impasse remarquable là-dessus (excepté l'épreuve Mines Maths 1 2008) mais est-ce que la trêve va se poursuivre ?

(8) La première chose à retenir concerne les critères d'intégrabilité :
   - Si J et J' sont des segments contenus dans I et I', il suffit de majorer, indépendamment de J et J', $\iint_{J\times J'} |f|$,
   - Si $f(x,.)$ est intégrable sur I' et si $x \mapsto \int_{I'} |f(x,y)|\,\mathrm{d}y$ est intégrable sur I alors f est intégrable sur $I \times I'$ et on a la moitié de Fub*ini* :

$$\iint_{I\times I'} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_I \left(\int_{I'} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$$

   Ce que je viens d'exposer est une synthèse des définitions 6.3.2, 6.3.3 et des théorèmes 6.29, 6.34 (le théorème 6.34 a des hypothèses un peu plus larges mais est-il bien utile comme cela ?).

(9) Dernier point épineux, la notion d'intégrale sur des parties élémentaires et des parties (trop) simples :
je ne vous conseille qu'une seule chose : le système D, en effet il vaut mieux se débrouiller avec des idées assez élémentaires plutôt que de retenir les résultats et les démonstrations.

(10) Enfin, pour terminer ce passage douloureux, le théorème de changement de variable est très peu employé, pensez au jacobien et faite votre prière...

(11) Je ne terminerai pas ce chapitre sans le :
THÉORÈME 6.40 **Théorème du relèvement**
Soit $f \in \mathcal{C}^1(I)$ telle que $f(I) \subset \mathbb{U}$ alors il existe $g \in \mathcal{C}^1(I)$ à valeurs réelles et telle que $f = e^{ig}$.
Si f est de classe $\mathcal{C}^k$ pour $k \geqslant 2$ alors g est aussi de classe $\mathcal{C}^k$.

2.7. **Chapitre 7 : séries entières, séries de Fourier.** Tout commence par les séries entières.

(1) L'argument massue ici est le rayon de convergence. Une fois apprivoisée, une série entière se laisse manipuler sans problème, on peut
- la dériver terme à terme,
- l'intégrer de même,
- la multiplier par une copine.

Pour déterminer le rayon de convergence donc comment faire ?
- THÉORÈME 7.4 Si $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lambda$ alors $R = \dfrac{1}{\lambda}$.
  Ce théorème n'est pas la panacée, lorsqu'il sert, il ne rapporte pas beaucoup de points.
- Si la série entière est lacunaire (i.e. les a_n sont parfois nuls) alors revenir à d'Alembert en exprimant le rapport de deux termes consécutifs (avec x).
- Utiliser la
  Remarque 7.1.3, notamment si $|a_n| \leqslant |b_n|$, $a_n \sim b_n$ et utiliser quelques remarques de bon sens.

(2) Pour montrer qu'une fonction est égale à sa série de Taylor, penser à majorer le reste.

(3) Ah, il reste pour terminer ce tableau idyllique à connaître les D.S.E. À part le D.S.E. de $\operatorname{Arcsin} t$ qui n'est pas censé être connu, les autres se retrouvent facilement.

Passons aux séries de Fourier.

(4) Je pense que vous connaissez l'expression des coefficients de Fourier (merci Régine !). Rappelez-vous du petit truc mnémotechnique qui consiste à écrire que f est égale à sa série de Fourier et de faire toutes les opérations possibles sur f et sa somme pour retrouver des relations utiles.

(5) Ne pas perdre de vue ce qu'on appelle convergence d'une série de Fourier :
- soit c'est la convergence de $S_p(f)$ *suite* des sommes partielles,
- soit c'est la convergence de la *série* $\sum a_n(f)\cos nx + b_n(f)\sin nx$.

(6) La formule de Parseval (attention à l'orthographe) est bien assimilée, pensez à l'identité de polarisation.

(7) La convergence normale (f continue, $\mathcal{C}^1$ par morceaux) et la convergence simple (f $\mathcal{C}^1$ par morceaux) font partie maintenant de l'I.C. (inconscient collectif). Il faut absolument citer les hypothèses et la conclusion de ces importants théorèmes.

Aie ! Les équa-diffs sont de retour.

2.8. **Chapitre 8 : équations différentielles.**

Après un petit topo sur l'intégration des fonctions vectorielles (histoire d'avoir la conscience tranquille), on va se coltiner les divers théorèmes de Cauchy-Lipschitz.

(1) Il y a trois versions du théorème de Cauchy-Lipschitz :
- Le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire : si $x' = a(t).x + b(t)$ est une équation différentielle linéaire, a et b étant des fonctions continues sur un intervalle I alors, pour toute condition initiale $t_0 \in I$, $x_0 \in F$, il existe une *unique* solution définie sur *I en entier*.
  Dans le cas linéaire donc, il n'y a pas de restriction sur x_0 et la solution est définie sur tout l'intervalle.
- Le théorème de Cauchy-Lipschitz dans le cas général : si $x' = f(t,x)$ est une équation différentielle (là le programme se limite au cas où x est une fonction à valeurs réelles), f étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, alors, pour toute condition initiale $(t_0, x_0) \in U$, il existe une *unique solution maximale* définie sur un intervalle ouvert. Ici on ne connaît pas à priori l'intervalle maximal aussi faut-il "bricoler" les solutions que l'ont trouve pour mettre la main sur ce fameux intervalle. Ensuite, il y a une restriction sur les conditions initiales.

- Le théorème de Cauchy-Lipschitz dans le cas des équations autonomes : $x' = f(x, y)$, $y' = g(x, y)$, x et y étant des fonctions à valeurs réelles, de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$. Ce théorème dit alors que pour toute condition initiale $t_0 \in \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in U$ il existe une unique solution maximale définie sur un intervalle ouvert et que pour $t_0' = t_0 + a$, $x_0' = x_0$, $y_0' = y_0$ la solution maximale se déduit de la précédente par translation du paramétre.

Revenons à nos chères équations différentielles linéaires.

(2) La notion de système fondamental de solutions sert très rarement (jamais ?) dans les concours, il est formateur de retenir la méthode de variations des constantes :
Méthode de variation des constantes
Si on connaît un système fondamental de solutions de (4), on va chercher une solution particulière de (1) sous la forme :
$x(t) = \lambda_1(t)x_1(t) + \lambda_2(t)x_2(t) + \cdots + \lambda_n(t)x_n(t)$. On trouvera alors la condition $b(t) = \lambda_1'(t)x_1(t) + \lambda_2'(t)x_2(t) + \cdots + \lambda_n'(t)x_n(t)$ i.e.

$$\begin{cases} b_1(t) = \lambda_1'(t)x_{11}(t) + \lambda_2'(t)x_{12}(t) + \cdots \lambda_n'(t)x_{1n}(t) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_n(t) = \lambda_1'(t)x_{n1}(t) + \lambda_2'(t)x_{n2}(t) + \cdots \lambda_n'(t)x_{nn}(t) \end{cases}$$

(3) Ensuite, il est important de connaître ou de retrouver rapidement l'expression de la solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants :
Théorème 8.6 **Étude de l'équation avec second membre**
L'ensemble des solutions de l'équation (1) $x' = a.x + b(t)$ s'écrit sous la forme

$$x(t) = e^{ta} \int_{t_0}^{t} e^{-ua}.b(u)\,\mathrm{d}u + e^{(t-t_0)a}.x_0$$

Nous voilà arrivés aux équations différentielles linéaires du second ordre.

(4) Penser dès le début à préciser sur quels intervalles le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique (regarder les valeurs qui annulent le coefficient de y''), ce qui permet d'écrire que, sur chacun de ces intervalles, l'ensemble des solutions est un espace affine de dimension 2.

(5) Mis à part quelques équations différentielles bien particulières (équations à coefficients constants, équations d'Euler), on ne connaît pas directement des solutions de l'équation homogène aussi
- l'énoncé a peut-être fourni directement (ou de manière plus cachée) une solution, soyez sur vos gardes !
- une recherche de solutions D.S.E. peut s'avérer indispensable alors il ne faut pas trop hésiter.

(6) La recherche d'une solution particulière peut se révéler un vrai parcours du combattant :
- attention ! il peut y avoir des solutions évidentes...
- sinon, faire les calculs de manière littérale c'est à dire en ne donnant pas explicitement la ou les solutions de l'équation homogène (garder des expressions de la forme y_1 et y_2),
- si l'énoncé est particulièrement coquin, on vous a là aussi donné peut-être une solution cachée.

(7) Les équations différentielles non linéaires peuvent donner des questions extrêmement difficiles aussi sauve qui peut ! De toutes façons, tout le monde est logé à la même enseigne donc faites le dos rond et prenez votre mal en patience, l'objectif dans ces cas là est de faire du mieux que l'on peut et d'avoir la conscience tranquille. Vous pouvez vous raccrocher aux branches en invoquant la bonne version du théorème de Cauchy-Lipschitz...

2.9. **Chapitre 9 : fonctions de plusieurs variables réelles.**
Il y a peu de problèmes qui portent sur les fonctions de plusieurs variables, en général on se limite à deux variables (et on s'en sert en particulier pour les fonctions définies par une intégrale). Il y a eu une mode pendant un certain temps où il y avait un problème d'E.N.S. difficile sur cette partie du programme (en 2000 et avant).

(1) La notion de différentielle est très abstraite, si vous l'avez bien comprise, félicitations, sinon, ne vous prenez pas la tête avec ça, pensez en terme de matrice jacobienne et de gradient.
(2) La règle de la chaîne est très importante dans les changements de variables, c'est une conséquence du théorème 9.2 sur la différentielle du composé de deux fonctions :
Remarque 9.1.7. Si $h = g \circ f$ ce qui donne en écriture développée
$h(x_1, ..., x_p) = [g_1\{f_1(x_1, ..., x_p), ..., f_n(x_1, ..., x_p)\}, ..., g_m\{f_1(x_1, ..., x_p), ..., f_n(x_1, ..., x_p)\}]$ alors
$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial g}{\partial y_1}(f(x))\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x) + \cdots + \frac{\partial g}{\partial y_n}(f(x))\frac{\partial f_n}{\partial x_i}(x)$$
pour $i \in [\![1, p]\!]$ et où $x = (x_1, \ldots, x_p)$, $f = (f_1, \ldots, f_n)$.
En pratique, on l'utilise surtout pour de faibles valeurs de n, m et p.
(3) Le théorème d'inversion globale peut ne servir qu'une seule fois dans toute une vie, il suffit que ce soit la bonne !
THÉORÈME 9.6. **Théorème d'inversion globale**
Soit $f \in \mathcal{C}^1(U, E)$ une application injective de U **ouvert** $U \subset E$ alors
f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur $f(U)$ ssi le jacobien de f ne s'annule pas sur U.
La suite concerne les fonctions à valeurs réelles.
(4) La notion de gradient est très commode, elle rend par exemple le théorème qui suit particulièrement simple :
THÉORÈME 9.8. **Inégalité des accroissements finis**
Si U est un ouvert con**v**exe et si $\operatorname{grad} f$ est une fonction bornée sur U alors
$$\forall (a, b) \in U^2,\ |f(b) - f(a)| \leqslant \|b - a\| \sup_{x \in U} \|\operatorname{grad} f(x)\|.$$
(5) Le théorème de Schwarz n'a plus de secret pour vous, vous pouvez (je le pense et je l'espère) faire l'impasse sur la formule de Taylor reste intégral et la remplacer avantageusement par
COROLLAIRE 9.13. Soit $f \in \mathcal{C}^2(U)$, U ouvert de $\mathbb{R}^2$ alors, au voisinage de $(a, b) \in U$, on a
$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + hp + kq + \frac{1}{2}(h^2r + 2hks + k^2t) + (h^2 + k^2)\varepsilon(h, k)$$
en prenant les notations de Monge :
$p = \dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b)$, $q = \dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b)$, $r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)$, $s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)$, $t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)$.
(6) Je n'ai pas vu le théorème 9.14 sur l'existence d'un extremum local servir vraiment, on peut toujours le retrouver à l'aide du corollaire précédent en cas.
(7) Le programme est tellement évasif sur les surfaces que les donneurs de sujet d'écrit ont jusqu'à présent évité de poser des questions là dessus. Vous risquez de voir apparaître des quadriques (mais comme aucune connaissance sur ces dernières n'est exigée, on vous fournira tout ce qui est nécessaire). Je vous recommande de connaître deux choses
  - la notion de surface paramétrée ainsi que l'équation du plan tangent en un point :
    DÉFINITION 9.1.15 **Plan tangent, normale**
    Si $O + g(u, v)\overrightarrow{i} + h(u, v)\overrightarrow{j} + l(u, v)\overrightarrow{k}$ est la paramétrisation de la surface alors

l'équation du plan tangent au point régulier de paramètre (u_0, v_0) est donnée par

$$\begin{vmatrix} x - g(u_0, v_0) & \dfrac{\partial g}{\partial u}(u_0, v_0) & \dfrac{\partial g}{\partial v}(u_0, v_0) \\ y - h(u_0, v_0) & \dfrac{\partial h}{\partial u}(u_0, v_0) & \dfrac{\partial h}{\partial v}(u_0, v_0) \\ z - l(u_0, v_0) & \dfrac{\partial l}{\partial u}(u_0, v_0) & \dfrac{\partial l}{\partial v}(u_0, v_0) \end{vmatrix} = 0$$

et le vecteur normal est le vecteur $\dfrac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) \wedge \dfrac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0)$.

- La définition d'une surface cartésienne $F(x, y, z) = 0$ où $F \in \mathcal{C}^1(V)$, V étant un ouvert de $\mathbb{R}^3$ et de son plan tangent
  Théorème 9.16 Le plan tangent à une surface $F(x, y, z) = 0$ en un point régulier $M_0 = (a, b, c)$ a pour équation
  $$(x-a)\frac{\partial F}{\partial x}(a,b,c) + (y-b)\frac{\partial F}{\partial y}(a,b,c) + (z-c)\frac{\partial F}{\partial z}(a,b,c) = 0$$
  et $\operatorname{grad} F(a, b, c)$ est un vecteur normal à cette surface en M_0.
- Ne vous inquiétez pas si vous ne connaissez pas le théorème des fonctions implicites, de toutes façons, il n'est pas au programme aussi, si on en a besoin, on vous le rappellera.

Et pour terminer, les intégrales curvilignes.

(8) Savoir la différence entre une forme différentielle exacte (c'est exactement la différentielle d'une fonction) et une forme différentielle fermée (caractérisée par les dérivées partielles).

(9) Le théorème de Poincaré est important mais je n'ai pas le souvenir de l'avoir vu dans un écrit...

(10) La formule de Green-Riemann est par contre beaucoup plus sollicitée
Théorème 9.18 **Théorème de Green-Riemann**
Si A est une partie connexe par arcs qui se décompose, au moyen de droites parallèles aux axes, en une réunion d'un nombre fini de parties élémentaires d'intérieurs disjoints, définies par des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux,
si P et Q sont des applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U contenant A alors
$$\iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\partial A} (P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y)$$
où $\alpha = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ et ∂A est la frontière de A parcourue dans le sens direct (i.e. on laisse l'intérieur de A à gauche comme pour le cercle trigonométrique).

Je pense que vous pouvez laisser tomber la définition tordue de A et la remplacer par A partie élémentaire (ou presque).