SPÉCIALE MP* : ORAL 2007

1. Sujets posés aux Écoles Normales Supérieures à l'oral 2007

1.1. **Oral Maths Ulm.**

Exercice 1.1.1.

(1) Soit f de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que pour tout x, $f(2x) + f(x) = 0$. Que dire de f ? (c'est pourtant math ULM).
(2) Soit f de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle qu'il existe trois réels distincts a, b, c non nuls tels que pour tout x, $f(ax) + f(bx) + f(cx) = 0$. Que dire de f ?
(3) Soit M appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle qu'il existe P inversible vérifiant pour tout λ, $P - \lambda M$ inversible. Caractériser M.
(4) Soit u de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ linéaire telle que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ soit stable. Montrer que $u^{-1}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 1.1.2.

(1) Soit $P \in \mathbb{R}[X, Y]$ (polynôme à deux variables) de degrés m en X et n en Y.
Montrer que le nombre de racines de $f\ : x \mapsto P(x, \mathrm{e}^x)$ est majoré par $mn + m + n$.
(2) Soient (P_i) n points de coordonnées $(t_i, t_i^2, ..., t_i^n)$ où les t_i sont des réels distincts. Montrer qu'il existe un unique hyperplan affine de $\mathbb{R}^n$ qui contient les (P_i).

1.2. **Oral Maths Ulm-Lyon-Cachan.**

Exercice 1.2.1.

(1) Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif et $H = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit pour tout $A \in H$ la forme linéaire f_A de H^* qui à X associe $\mathrm{Tr}(AX)$. Soit ϕ de H dans H^* telle que $\phi(A) = f_A$, montrer que ϕ est un isomorphisme.
(2) Déterminer l'ensemble des $f \in H^*$ vérifiant $f(XY) = f(YX)$ pour tout X, Y dans H.
(3) Soit $E = \{Z \in H | Z = XY - YX \text{ où } X, Y \in H\}$, déterminer l'espace vectoriel engendré par E.

Exercice 1.2.2.
Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, soit A de déterminant 1 telle que $\exists n \in \mathbb{N}^* | A^n = I_2$.

(1) Montrer qu'il existe $p \in \{1, .., 6\}$ tel que $A^p = I_2$.
(2) Trouver une matrice dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ d'ordre 4. En trouver une infinité.

Exercice 1.2.3.
Soit Φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}^n$ qui à M associe $(\mathrm{Tr}(M), \mathrm{Tr}(M^2), \ldots, \mathrm{Tr}(M^n))$.
Calculer la différentielle de Φ.

Exercice 1.2.4.
Soit E un espace vectoriel et $f\ : E \to E$. Si V est un sev de E, on dit que V est hypostable par f ssi il existe W de codimension 1 dans V tel que $f(W) \subset V$. On désire montrer quelques propositions :

(1) Si V est hypostable mais pas stable, W est unique.
(2) V est hypostable mais pas stable alors V est de codimension 1 dans $V + f(V)$. Étudier la réciproque.
(3) Si V est hypostable, $V \neq E$ alors il existe X hypostable tel que V soit de codimension 1 dans X.
(4) Montrer qu'il existe une base de E telle que, si (a_{ij}) est la matrice de f dans cette base, alors $a_{ij} = 0$ si $i - j \geqslant 2$.

Exercice 1.2.5.
Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$, on pose

$$A_f\ :\ \begin{array}{lcl} \mathcal{L}(E) & \to & \mathcal{L}(E) \\ g & \mapsto & fg - gf. \end{array}$$

(1) Montrer que f diagonalisable $\Rightarrow A_f$ diagonalisable.
(2) Montrer que A_f diagonalisable $\Rightarrow f$ diagonalisable.

Exercice 1.2.6.

(1) Montrer que l'ensembles des matrices diagonalisables dans $\mathbb{C}$ est dense dans $\mathbb{C}$
(2) Soit A une matrice réelle. On pose $f_A\ :\ \begin{smallmatrix} M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R}) \\ M \longrightarrow AM - MA \end{smallmatrix}$
   a) On suppose A diagonalisable. Calculer $\operatorname{Ker} f_A$
   b) On pose $E_p = \{A \mid \operatorname{Rg} A > p\}$ (où p est un entier fixé). Montrer que E_p est un ouvert

---

Exercice 1.2.7.
Soit E un $\mathbb{R}$-ev, $(e_1, ..., e_n)$ une base de E, $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ on pose : $f_\sigma \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f_\sigma(e_i) = e_\sigma(i)$, et $p = (1/n!) \sum\limits_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} f_\sigma$.

(1) Caractériser p.
(2) Montrer que si $x \in E \setminus \operatorname{Im} p$, la famille des $x - f_\sigma(x)$, pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, est génératrice de $\operatorname{Ker} p$.
(3) Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, quels sont les sous-espaces stables par f_σ ?

Exercice 1.2.8.
Soit $u(n)$ une suite réelle et $p \in [0, 1]$.
Étudier sa convergence en sachant que $u(n+2) \leqslant pu(n+1) + (1-p)u(n)$.

Exercice 1.2.9.

(1) Soit E un espace vectoriel euclidien, soit x appartenant à E et soit u un endomorphisme symétrique défini positif (ESDP) de E on pose : $f\ : y \in E \mapsto 2(x|y) - (u(y)|y) \in \mathbb{R}$.

a) Déterminer $\sup\{f(y),\ y \in E\}$.
b) Soient u et v deux ESDP tels que $u - v$ est un ESDP, montrer que $v^{-1} - u^{-1}$ est un ESDP.

(2) Soit (f_n) une suite de fonctions à valeurs réelles toutes k lipschitziennes, k fixé, qui converge simplement sur $[a, b]$ vers f. Montrer que la convergence est uniforme

(3) Questions bonus :
a) Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
b) L'ensemble des matrices $\mathbb{C}$-diagonalisables est il dense dans $M_n(\mathbb{C})$?

1.3. **Oral Maths Lyon.**

Exercice 1.3.1.
Pour $(z_i) \in \mathbb{C}^n$ on définit (z_i') par $z_i' = \frac{z_{i-1}+z_{i+1}}{2}$ (avec la convention $z_0 = z_n$ et $z_{n+1} = z_1$).
Trouver les n-uplets (z_i) tels qu'il existe une similitude φ du plan complexe vérifiant $\forall i \in \{1, ..., n\}, \varphi(z_i) = z_i'$?

Exercice 1.3.2.
Soit K un compact de $\mathbb{R}^2$ muni d'une norme quelconque. On dit que $A \subset K$ est ε -bornée ssi ; $\forall\, x, y \in A,\ \|x - y\| \leqslant \varepsilon \Rightarrow x = y$.
Montrer qu'il existe n (dépendant d'ε) tel que $\forall A\, \varepsilon$-bornée $\subset K$, $\mathrm{Card}\, A \leqslant n$ et vérifiant $\exists A_0\, \varepsilon$-bornée telle que $\mathrm{Card}\, A = n$.

Exercice 1.3.3.
Soit l'équation différentielle $y' = \alpha\sqrt{y} - x$ avec la condition initiale $y(x_0) = y_0$.

(1) Discuter l'existence de la solution
(2) Condition nécessaire et suffisante sur α pour qu'il existe a tel que $y = ax^2$ soit solution.
(3) Pour certaines valeurs de α, il y a 2 valeurs de a possibles ($a_1 < a_2$). Si y solution de l'équation sur $]0, t[$, montrer que l'on est dans l'un des trois cas suivants :
   - pour tout x, $y(x)/x^2 < a_1$,
   - pour tout x, $y(x)/x^2 > a_1$,
   - pour tout x, $a_1 \leqslant y(x)/x^2 \leqslant a_2$.
(4) Si y est solution de l'équation sur $[0, t[$ est telle que pour tout $x > 0$, $y(x)/x^2 > a_2$, montrer que $y(0) > 0$.

Exercice 1.3.4.
Soit $(.|.)_0$ le produit scalaire standard de $\mathbb{R}^n$, on considère S la matrice diagonale dont le premier coefficient vaut -1, tous les autres valant 1 (c'est donc une symétrie). On note $(.|.)$ la forme bilinéaire symétrique ainsi définie : $(x|y) = (Sx|y)_0$ et Q la forme quadratique associée. On notera pour A partie de $\mathbb{R}^n$ "l'orthogonal" $A^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall y \in A,\ (x|y) = 0\}$.

(1) Montrer que s'il existe un vecteur v tq $Q(v) < 0$, alors $Q_{|\,\mathrm{Vect}(v)^\circ}$ est DP.
(2) Montrer que s'il existe un vecteur v tq $Q(v) = 0$, alors pour tout supplémentaire F de $\mathrm{Vect}(v)$ dans $\mathrm{Vect}(v)^\circ$, $Q_{|F}$ est DP.
(3) Montrer que tout sous espace de dimension au moins 2 contient un vecteur u tq $Q(u) > 0$.

1.4. **Oral Maths Cachan.**

Exercice 1.4.1.

(1) Soit $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, montrer que, s'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a $t\varphi(t) \leqslant C + \int_0^t \varphi(s)\mathrm{d}s$ alors φ est bornée.
(2) Montrer que si f vérifie $f'' + qf = 0$ alors f est bornée.

Exercice 1.4.2.
Soit E un espace vectoriel et K un convexe fermé inclus dans E, non vide. Soit f définie sur K à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle qu'il existe x_0, $r > 0$, $m > 0$ tels que pour tout x tel que $\|x - x_0\| \leqslant r$, $f(x) \leqslant m$.

(1) Montrer que pour tout x tel que $\|x - x_0\| < r$, $|f(x) - f(x_0)| \leqslant \dfrac{m - f(x_0)}{r}\|x - x_0\|$.
Que dire de f ?
(2) Montrer que f est majorée sur l'intérieur de K. (i.e. que pour tout $x_1 \in K$ tel qu'il existe r_1 tel que $B(x_1, r_1) \subset K$, f est majorée sur $B(x_1, r_1)$.

Exercice 1.4.3.

(1) Soit A une matrice telle que
$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, |a_{i,i}| > \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|.$$
Montrer que A est inversible.
(2) Soit A une matrice réelle à coefficients positifs telles que
$$\forall i, \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1.$$
a) Montrer que $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}\, A, |\lambda| \leqslant 1$. Montrer que 1 est valeur propre.
b) Montrer que si λ est valeur propre de module 1 et X est un vecteur propre associé de norme sup égale à 1, alors si l'un des coefficients de la matrice AX est de module 1, alors il est également coefficient de X.
c) Avec les hypothèses du (b) : montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda^p = 1$.

Exercice 1.4.4.
Soit H la matrice dont le coefficient i, j vaut $1/(1 + i + j)$.

(1) Montrer que H est définie positive.
(2) Montrer que si P est un polynôme réel, on a :
$$\int_{-1}^{1} P(t)\,\mathrm{d}t = -i \int_0^{\pi} \exp(it)P(\exp(it))\,\mathrm{d}t.$$
(3) En déduire que le sup des modules des valeurs propres de H est $\leqslant 1$.

EXERCICE 1.4.5.
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.
Posons $u_n = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\sum_1^n f(i/n)$.
Chercher une CNS sur f pour que $\sum u_n$ converge.

EXERCICE 1.4.6.
Soit A matrice symétrique réelle définie positive, x un vecteur de $\mathbb{R}^n$ muni de la structure euclidienne.
Montrer que
$$N(x)^4 \leqslant (Ax|x)(A^{-1}x|x) \leqslant \frac{1}{4}((a/b)^{1/2} + (b/a)^{1/2})N(x)^4.$$

EXERCICE 1.4.7.
Soit f $\mathcal{C}^\infty$, 2π périodique, de moyenne nulle, on pose $g = f + f''$. Montrer que g s'annule au moins 4 fois sur une période.

1.5. **Oral Info.**

EXERCICE 1.5.1.

(1) On a un tableau T d'entiers indicés de 1 à n, on appelle maximum local un t_i vérifiant $t_i \geqslant t_{i-1}$ et $t_i \geqslant t_{i+1}$ – sur les bords, on ne considère que les inégalités ayant un sens. Donner un algorithme pour trouver un maximum local.
(2) Essayer de faire mieux.
(3) On dispose maintenant d'un tableau à deux dimensions, même questions (un maximum local est ici défini par quatre inégalités, en haut, en bas, à gauche et à droite).

EXERCICE 1.5.2.
On prend T un tableau indicé de 1 à n, $x \in \mathbb{N}$.
On veut voir si x appartient à T, et dans le cas d'une réponse positive, on veut savoir à quelle position il se trouve.
On dispose des opérations suivantes /, \, =, !. (oui factorielle ne sert à rien)
En fait, on cherche à chaque fois un meilleur algorithme de recherche en terme de complexité dans le pire des cas, selon différents contextes.

(1) T quelconque. Algorithme, complexité ? (*)
    T est dorénavant trié dans l'ordre chronologique croissant.
(2) Algorithme, complexité ? (à un près a-t-il insisté) (*)
(3) Arbre binaire de recherche ? Particularité ? (*)
    On suppose maintenant que lire une case requiert un coût qui dépend de la case.
(4) Le coût pour lire une case est la distance entre cette case et la case précédemment lue. (On part de la case fantôme 0) A, C ? (**)
(5) Le coût de la ième case est $C_i = 2^i$. A,C ? (***) (Question cruciale)
(6) Les coûts C_i sont quelconques. Algorithme pour le meilleur algorithme de recherche ? (***) (En fait, complètement trivial si on a compris la question précédente)

J'ai fait un gradient de notes :
(*) Débile, niveau SI (:p)
(**) Minimum syndical de réflexion
(***) Trois étoiles.

---

2. Spéciales MP* : sujets posés à l'école Polytechnique à l'oral 2007

2.1. **Mr Grigis.**

Exercice 2.1.1.
Soit f continue sur $[0,1]$, $f>0$.

(1) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $\exists a_0, ..., a_n \in [0,1]$ tels que

$$\forall i \in \{0,...,n-1\}, \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$$

(2) Étudier $u_n = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} a_{i,n}$ (les a_i dépendent de n) : la moyenne des a_i.
(3) Que dire quand on a seulement $f \geqslant 0$?

Exercice 2.1.2.

(1) Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie n, $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que f^2 soit diagonalisable. Montrer que f est diagonalisable ssi $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$.
(2) On cherche $f\ :]1;+\infty[\to \mathbb{R}$, continue, telle que $f(x)^x = x^{f(x)}$, $f(e)=e$ et pour tout $x \neq$ e, $f(x) \neq x$.
Existence, puis unicité de f.
(3) Soit P un polynôme sur $\mathbb{R}$, scindé à racines simples.
Est-ce que P peut avoir deux coefficients consécutifs nuls.

Exercice 2.1.3.

(1) Soit $f\ : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue en 0, bornée, continue par morceaux, on définit la fonction $F(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} \frac{xf(t)}{x^2+t^2}\mathrm{d}t$ pour $x>0$.
Définition de F, limite de F en 0 ?
(2) f est maintenant définie sur $\mathbb{R}$ continue en x, bornée.
On pose $G(x,y) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{yf(t)}{(t-x)^2+y^2}\mathrm{d}t$ pour y différent de 0.
Définition de G, limite de G quand $y \to 0$.
Montrer que G est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus D$.

2.2. **Mr Henry.**

Exercice 2.2.1.

(1) Soit $f \in \mathcal{F}([0,1],\mathbb{R})$ tq $f(0) \geqslant 0$ et $f(1) \leqslant 0$, $g \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ tq $f+g$ croissante.
Montrer qu'il existe $x_0 \in [0,1]$ tq $f(x_0)=0$.
(2) Soit F un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ stable par produit, montrer que I_n appartient à F.

EXERCICE 2.2.2.

(1) Soit F de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, bornée, telle que il existe $a > 0$ tel que $f'' \geqslant a^2 f$.
   a) Montrer que $f' \to 0$ puis que f est décroissante.
   b) Montrer que $f \to 0$.
   c) Montrer que $f(x) \leqslant f(0)\exp(-ax)$.

(2) Soit E un e.v.n., ϕ une forme linéaire continue sur E non nulle.
   Montrer que pour tout x de E, $\mathrm{d}(x, \operatorname{Ker}\phi) = \dfrac{|\phi(x)|}{\|\phi\|}$.

2.3. **Mr Langevin.**

EXERCICE 2.3.1.

Soit $P = \prod_{k=0}^{4} \tan(x + k\pi/5)$, $S = \sum_{k=0}^{4} \tan(x + k\pi/5)$.
Calculer P/S.

EXERCICE 2.3.2.

(1) Soit (u_n) et (v_n) deux suites qui vérifient une relation de récurrence linéaire. Est-ce que $(u_n + v_n)$ vérifie une relation de récurrence linéaire ?

(2) a) Soient A, B, C trois points du plan (et oui géométrie quand tu nous tiens) montrer qu'il existe un point tel que $(\overrightarrow{MA}|\overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{MA}|\overrightarrow{MC}) = (\overrightarrow{MB}|\overrightarrow{MC})$.
   b) On note D ce point (Langevin est prisonnier des notations et m'a fait tout un topo sur la notation historique H qui est débile à cause de l'associativité des orthocentres...), trouver a, b, c tels que $a\overrightarrow{DA} + b\overrightarrow{DB} + c\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{0}$.

EXERCICE 2.3.3.

Soit P un polynôme a coefficients complexes, $P = R + iS$ avec R et S à coefficients réels, tel que les racines de P soient toutes à partie imaginaire positive ou nulle.

(1) Montrer que R et S sont à racines réelles.

(2) Montrer que, pour a et b réels quelconques, $aR + bS$ est à racines réelles.

2.4. **Mr Rosso.**

EXERCICE 2.4.1.

(1) Soit $f \in \mathcal{C}^1([0, a], \mathbb{C})$ telle que $f(0) = 0$. Montrer que :
$$2\int_0^a |f'(t)f(t)|\mathrm{d}x \leqslant a\int_0^a |f'(t)|^2\mathrm{d}x.$$
   Étudier le cas d'égalité.

(2) Existe-t-il une norme telle que $N(PAP^{-1}) = N(A)$ pour tous $A \in M_n(\mathbb{C})$ et pour tous $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$?

Exercice 2.4.2.

(1) Soit $x\ :\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^2$, décroissante, convexe et minorée. Calculer $\lim\limits_{t\to+\infty} tx'(t)$.

(2) Soit maintenant Q une application continue et strictement positive. On considère l'équation différentielle $x''=Qx$.
Soit x une solution décroissante et positive. Montrer l'équivalence
$x\to 0$ quand $t\to+\infty \Leftrightarrow \displaystyle\int_0^{+\infty} tQ(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

Exercice 2.4.3.
Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension n finie et f dans $\mathcal{L}(E)$ telle qu'il existe p dans $\mathcal{L}(E)$ non-nulle telle que pour tout u de $\mathrm{GL}(E)$:

$$u\circ f\circ u^{-1}\circ p=p\circ f,$$

que dire de f ?

---

3. Spéciales MP* : sujets posés aux Écoles des Mines à l'oral 2007

3.1.

Exercice 3.1.1.

(1) Déterminer P et Q inversibles telles que

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&0&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}Q$$

(2)
- Soit $f\in\mathcal{C}^\infty(]-b,b[,\mathbb{R})$ telle que : $\forall n\in\mathbb{N}, f^{(n)}\geqslant 0$. Soit $t>0$, montrer que $\sum_{n\geqslant 0}\frac{f^{(n)}(t)}{n!}t^n$ converge. On pose $\rho_n(t)=\int_0^t\frac{(t-x)^n}{n!}f^{(n+1)}(x)dx$, montrer que pour tout $t\in[0,b[$, $(\rho_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Montrer que pour $t'>t$, $\frac{\rho_n(t)}{t^n}\leqslant\frac{\rho_n(t')}{t'^n}$ et en déduire que la limite précédente est nulle.
- Montrer que f est développable en série entière sur $]-b,b[$.
- Montrer que tan est développable en série entière sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 3.1.2.

(1) Rayon de convergence de $\sum a_nx^n$ où $a_0>0$ et $a_{n+1}=\ln(1+a_n)$.

(2) Montrer que $\mathbb{K}=\mathrm{Vect}(1,\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{6})$ est un corps.
Indications :
a. Montrer que la famille est libre.
b. Montrer que pour a non nul $\varphi_a\ :x\mapsto ax$ est une application linéaire.
Question complémentaire : comment calculer effectivement l'inverse de a ?

(3) Soit $u_n=\sin(\pi\sqrt{1+n^2})$.
Nature de la série $\sum u_n$.

(4) Soit A antisymétrique et orthogonale. Que dire de A ? Calculer A^n et e^A (expression explicite).

(5) Soit un cercle C de centre O, une droite D passant par O et A un point du plan. Construire le projeté orthogonal de A sur D à la règle uniquement.

Exercice 3.1.3.

(1) Calculer
$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1}.$$
(2) a) Résoudre $AA^TA = I_n$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ puis $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
   b) Calculer $\exp(A)$ si A est solution.
(3) On donne un cercle, une droite D passant par le centre C du cercle et un point A hors du cercle. Trouver le projeté de A sur D avec le seul recours d'une règle (infiniment longue).

Exercice 3.1.4.

(1) Dire si 2 matrices 3x3 sont semblables (l'une était la réduite de Jordan de l'autre mais je ne me souviens pas les coefficients de la première matrice, la réduite était $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
(2) Existence et calcul de $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-xt) \sin t/t \, \mathrm{d}t$.
(3) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique et orthogonale. Que dire de A ? (Léo a eu le même sauf qu'il est allé plus loin)

Exercice 3.1.5.

(1) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \exists P_n \in \mathbb{R}[X] \mid P_n(\cos x) = \cos nx$.
   b) Calculer le degré et le coefficient dominant de P_n.
   c) Soit $E_n = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \exists Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \mid P = 2^{n-1}X^n + Q\}$.
   On pose $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $\|P\| = \sup\{|P(x)|, x \in [-1, 1]\}$.
   Montrer que $\|P_n\| = 1 = \inf\{\|P\|, P \in E_n\}$.
(2) On pose $C_\lambda \ : x^2 + 2\lambda xy + y^2 + 2x + 2y = 0$
   a) Déterminer les points M tels que $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $M \in C_\lambda$.
   b) Déterminer la nature de la conique C_λ en fonction de λ .
   c) Lorsque C_λ est une conique centrée, déterminer son centre.
(3) Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x^{3/2}} dt$.

Exercice 3.1.6.

(1) DSE de $\ln(x^2 - 5x + 6)$.
(2) Soient a, b, c les racines de $X^3 + pX + q$.
   a) Trouver un polynôme de degré trois qui a pour racines a^2, b^2, c^2.
   b) Idem avec $1/a^2$, $1/b^2$, $1/c^2$.

(3) Que dire de la matrice (diagonalisation si possible). $A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & 0 & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ (c'est la matrice avec que des 1 sur les bords, et que des zéros au centre).
A noter que de nombreuses questions sont rajoutés après au cours de la discussion sur la matrice.

(4) Si $\exp(ix) + \exp(iy) + \exp(iz) = 0$, trouver la relation entre x, y et z.

Exercice 3.1.7.

(1) Soit $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Montrer que $\exp(A)$ est la matrice d'une similitude. Préciser son rapport et son angle.

(2) Calculer $I = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n/(3n+1)$.

Exercice 3.1.8.

(1) Soient A et B deux matrices diagonalisables réelles.
 a) Montrer qu'il existe P polynôme tel que $P(\exp(A)) = A$.
 b) Montrer que si $\exp(A) = \exp(B)$ alors $A = B$.

(2) Soit I un segment inclus dans $]0, 1[$ et $\phi\ : x \mapsto 2x(1-x)$.
Convergence de ϕ^n (n-ième itérée).

Exercice 3.1.9.

(1) (15mins de préparation)
Si a est un endomorphisme qui vérifie $a^p = \mathrm{Id}$, montrer que

$$\dim(\mathrm{Ker}(a - \mathrm{Id})) = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \mathrm{Tr}(a^k).$$

(2) Un truc assez compliqué sur des fonctions développables en série entière en utilisant Taylor intégrale et un changement de variable.

(3) Si E désigne l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$, A sous espace de E tel que tous ses éléments s'annulent en 0.
Montrer que A est soit fermé soit dense dans E.

Exercice 3.1.10.

(1) Trouver des matrices P et Q inversibles telles que l'on ait $A = PJ_rQ$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } J_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(]-b, b[, \mathbb{R})$ telle que pour tout entier n, $f^{(n)} \geqslant 0$.
Soit $\rho_n(t) = \int_0^t \frac{(t-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)\,\mathrm{d}x$ (le reste intégral de Taylor).

a) Soit t dans $[0,b[$, montrer que $\sum f^{(n)}(0)/n!t^n$ (la série de Taylor de f) converge. En déduire $\rho_n(t)$ converge.
Soit $t' > t$, montrer que $\rho_n(t)/t^n \leqslant \rho_n(t')/t'^n$ et en déduire que $\rho_n(t)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
b) Montrer que f est D.S.E. sur $]-b,b[$.
c) Montrer que tan est D.S.E. sur $]-\pi/2,\pi/2[$. Rayon de convergence ?

Exercice 3.1.11.

(1) Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. Calculer $f'(x)$, en déduire $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$.
(2) Soit A appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Montrer que A nilpotente équivaut à $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(A^2) = \ldots = \mathrm{Tr}(A^n) = 0$.

Exercice 3.1.12.

(1) (10 min de préparation)
Soit (P_k) une suite de polynômes à coefficients réels de degrés respectifs (d_k) et soit (a_k) une suite de réels deux à deux distincts. On définit

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} P_k(x)\exp(a_k x).$$

Montrer que le nombre de zéros : N_n de f_n est fini puis le majorer en fonction de $d_1,\ldots,d_n$ et $a_1,\ldots,a_n$.
(2) On définit sur les polynômes à coefficients réels le produit scalaire :

$$(P|Q) = \int_{-1}^{1} P(t).Q(t).\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

a) Montrer qu'il existe une unique famille (P_n) de polynômes de coefficient dominant 1 qui soit orthogonale et telle que pour tout n, $\deg P_n = n$.
b) Montrer qu'il existe une unique famille (Q_n) telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin((n+1)x) = \sin(x).Q_n(\cos x).$$

c) Montrer que les P_n sont scindés à racines simples dans $]-1,1[$.

Exercice 3.1.13.

(1) Soit $E = \mathbb{R}^3[X]$, $a \in]0,1[$, on définit les formes linéaires suivantes

$$g_1(P) = P(-a),\ g_2(P) = P'(-a),\ g_3(P) = P(a),\ g_4(P) = P'(a).$$

Montrer que la famille (g_i) est une base de E^*. En chercher la base antéduale.
Montrer qu'il existe a_1, a_2, a_3, a_4 tel que

$$\int_{-1}^{1} tP(t)\,\mathrm{d}t = a_1P(a) + a_2P'(a) + a_3P(-a) + a_4P'(-a)$$

et calculer les. (!)

(2) Un exo dénombrement avec série génératrice au menu...
Soit $d_n = \mathrm{Card}\{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \forall i \in [\![1, n]\!],\ \sigma_i \neq i\}$.
Calculer d_n.
(Indication : montrer que $n! = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k$, inverser le système, en déduire d_n).
Nature et convergence de la série entière $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{d_n}{n!} x^n$.

Exercice 3.1.14.

(1) Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est inclus dans aucun hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
(2) Soit H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $H \setminus \{0\} \not\subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
(3) Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \cap H \neq \emptyset$.
(4) Cas particuliers pour $n = 2$ (trou de mémoire...)
(5) Questions en fin d'oral :
Si P est un polynôme réel à racines simples, montrer qu'il en est de même de P'.
Quels sont les espaces caractéristiques d'une symétrie. Comment montrer qu'elle est diagonalisable ?

Exercice 3.1.15.

(1) Soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$.
a) Calcul.
b) Montrer que $I_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t$.
c) Équivalent de I_n.
(2) Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $f, g \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer que $\mathrm{Rg}(f+g) = \mathrm{Rg}(f) + \mathrm{Rg}(g) \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Ker}\, g = E \\ \mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Im}\, g = \{0\} \end{cases}$.

---

4. Spéciales MP* : sujets posés aux Écoles Centrales à l'oral 2007

4.1. Math 1.

Exercice 4.1.1.

(1) Soit A matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficients 0 et 1 tq pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $a_{i,i} = 0$ et pour $i \neq j$, $a_{i,j} + a_{j,i} = 1$ et soit H l'hyperplan $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 0$ (on se place dans la base canonique).
Calculer $\mathrm{Ker}(A) \cap H$.
Indication : considérer J la matrice avec des 1 partout. $A + A^{\mathrm{T}} =?$
(2) Montrer que $\mathrm{Rg}\, A \geqslant n - 1$.
(3) Trouver tous les $n \geqslant 2$ tels que si A vérifie ces conditions alors $\mathrm{Rg}\, A = n - 1$.

Exercice 4.1.2.

Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie et u un endomorphisme de E. Pour P polynôme de $\mathbb{R}[X]$, on note $N_P = \mathrm{Ker}(P(u))$, $I_P = \mathrm{Im}(P(u))$. Soit $\varphi\ : P \mapsto P(u)$.

(1) Nature algébrique de φ ?

(2) Si $Q|P$, quelles relations a-t-on entre N_P, N_Q, I_P, I_Q ?
(3) Si $D = PGCD(P,Q)$ montrer que $N_D = N_P \cap N_Q$, et $I_D = I_P + I_Q$.
(4) Soit $P = \prod_{i=1}^{p} Q_i^{a_i}$ la décomposition de P en produit de polynômes irréductibles. Montrer que $N_P = \bigoplus_{i=1}^{p} N_{Q_i^{a_i}}$.
(5) Soit $I = \{P | P(u) = 0\}$, exprimer I à l'aide du polynôme minimal Π.
(6) Soit P qui divise Π tel que $P(u)$ inversible, montrer que $\deg P = 0$.
(7) Montrer l'équivalence $PGCD(P, \Pi) = 1 \Leftrightarrow P(u)$ inversible.
(8) Soit P un polynôme annulateur, $P = QR$, Q et R premiers entre eux. Montrer que $E = N_Q \oplus N_R = I_Q \oplus I_R$ puis montrer que $N_Q = I_R$ et $N_R = I_Q$.

Exercice 4.1.3.
On considère A, B symétriques réelles positives. On note $\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ et $\mu_1 \leqslant \ldots \leqslant \mu_n$ les valeurs propres respectives de A et B. On veut montrer que :

$$\max\{\mathrm{Tr}(A'B'), A' \text{ et } B' \text{ orthogonalement semblables respectivement à } A \text{ et } B\} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i.$$

(1) Montrer qu'on peut se ramener au cas où $A' = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.
(2) Traiter le cas $n = 3$.
(3) a) Montrer que $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_{\sigma_i} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i$.
b) On définit $f : O \in \mathrm{O}(n) \mapsto \mathrm{Tr}(AOBO^{\mathrm{T}}) \in \mathbb{R}$. Montrer que si f admet un maximum en P_0 alors $P_0 B P_0^{\mathrm{T}}$ est diagonale.
c) Conclure.

Exercice 4.1.4.
(1) Montrer qu'il n'existe pas de norme N sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $N(AB) = N(BA)$ pour toutes A, B.
(2) On veut trouver N application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{R}_+$ telle que

$$N(\lambda A) = |\lambda| N(A),\ N(A+B) \leqslant N(A) + N(B),\ N(AB) = N(BA).$$

a) Montrer que $|\mathrm{Tr}|$ est solution.
b) Montrer que si N est solution et $N(B) = 0$ alors $\forall A, N(A+B) = N(A)$.
c) Trouver toutes les solutions.
(3) Soient $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $f : t \mapsto \max\{\mathrm{Sp}(A + tB)\}$.
Montrer que f est convexe sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4.1.5.
(1) Soit $P = X^p - X^{p-1} - \ldots - 1$.
a) Montrer que P admet une unique racine $\alpha > 0$.
b) Montrer que les racines de P dans $\mathbb{C} \setminus \{\alpha\}$ sont simples et de module < 1.
(2) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ telle que $\det(M - XI) = P(X)Q(X)$ avec P irréductible sur $\mathbb{Q}$. Est-ce que P divise le polynôme minimal de M ?

Exercice 4.1.6.

(1) Soient A, B deux matrices symétriques positives.
Montrer que $\det(A+B) \geqslant \det(A)+\det(B)$ (avec quelques étapes intermédiaires ce qui fait l'exo complètement débile).
(2) Si P et Q sont deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et premiers entre eux dans $\mathbb{C}$, montrer qu'ils sont premiers entre eux dans $\mathbb{Q}$.

Exercice 4.1.7.
Soit la courbe C d'équation : $0 = x^2 - 2ax - y$.

(1) Reconnaître C.
(2) Soit M de coordonnées polaires (r, θ). Calculer l'équation cartésienne de la droite passant par M perpendiculaire au vecteur OM.
(3) Calculer Le lieu des H où H est le projeté orthogonal de O sur les tangentes à C.
(4) Trouver des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ symétriques non diagonalisables (5min avant la fin).

Exercice 4.1.8.

(1) Soit f de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tt A, B, $f(AB) = f(A)f(B)$.
  a) Que vaut $f(I_n)$?
  b) Montrer que deux matrices semblables ont même image par f.
  c) Montrer que $f(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$ inversible.
  d) Cela implique t-il f proportionnelle à det ?
  e) f peut elle être en outre linéaire ?
(2) Montrer que quelque soit p premier > 4, 24 divise $p^2 - 1$.
(3) Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ équivalente à $2A$. Montrer que A nilpotente.

Exercice 4.1.9.

(1) Le même que celui de ROLAND (exo 4.1.2). a propos du lemme de noyau , du cours...... (c'est bien d'avoir ça comme exo)
(2) Chercher les triangles équilatéraux dont les sommets sont sur la parabole $y = x^2$.

Exercice 4.1.10.
Soit $A_n = \begin{pmatrix} 0 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_n \\ a_1 & a_2 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ où les a_p sont distincts deux à deux et > 0.

(1) Calculer $\det A_n$.
(2) Montrer que $\lambda \in \mathrm{Sp}(A_n) \Leftrightarrow \sum_{p=1}^{n} \dfrac{a_p}{\lambda + a_p} = 1$.
(3) Quelles sont les matrices qui commutent avec A_n ?
(4) A_n est-elle diagonalisable ?

4.2. Math 2.

Exercice 4.2.1.

(1) Existence puis calcul de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n+3}{(2n+1)^2(2n+2)^2}$ (ça fait pi carre sur DOUZE !)

(2) Existence et calcul de $\iint_{[0,1]^2} \frac{-x\ln(xy)}{1-x^2y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ (c'est extrêmement malsain).

Exercice 4.2.2.

Soit $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\exp(\sqrt{t}-1)}$.

(1) Mq que f est définie pour $x > 0$.

(2) Montrer que $f(x) \sim 2/\sqrt(x)$ en 0.

(3) Montrer que $f(x) \sim 2\exp(-\sqrt(x))/x$ en $+\infty$.

(4) Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\exp(\sqrt{t}-1)}$.

(5) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ existe et la calculer.

Exercice 4.2.3.

On considère l'équation différentielle $x'' + 2x^3 = 0$ avec les conditions $x(0) = x'(0) = 1$ et f la solution maximale définie sur I.

(1) Justifier la définition de f (existence/unicité).

(2) a) Tracer f en Maple avec l'outil DePlot, librairie DeTools. Que peut-on conjecturer ?
   b) Etudier $u = f^4 + f'^2$, montrer que f, f' et f'' sont bornées. En déduire que $I = \mathbb{R}$.

(3) a) Montrer qu'il existe ρ, θ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $\rho > 0$ et $f = \rho\cos\theta$, $f' = \rho\sin\theta$.
   b) Exprimer θ' en fonction de ρ et θ et en déduire que $\theta' \leqslant -\sin^2\theta - \rho^2\cos^4\theta$.
   c) Montrer que θ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme (sur des ensembles à préciser).
   d) Montrer que f est périodique.

Exercice 4.2.4.

Étude du comportement asymptotique de $S_n = \sum_{n=0}^{n} k^n$.

(1) Avec Maple, vérifier numériquement qu'il existe $L \in \mathbb{R}$ tel que $S_n \sim Ln^n$ à l'infini.

(2) Montrer que pour $n \geqslant 2$,
$$S_n \leqslant \frac{e}{e-1}n^n.$$
(On pourra utiliser la suite $u_n = \sum_{k=0}^{n}(1-\frac{k}{n})^n$.)

(3) En utilisant l'intégrale $I_n = \int_0^n (1-\frac{\mathrm{E}(x)}{n})^n\,\mathrm{d}x$, déterminer L.

Exercice 4.2.5.

Soit $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \cos x \neq \cos y\}$ et $Q_n(x,y) = \dfrac{\cos(nx)-\cos(ny)}{\cos x - \cos y}$ définie sur U, $n \geqslant 0$.

(1) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ il existe un unique polynôme T_n tel que $T_n(\cos x) = \cos(nx)$.
   b) Calculer T_n pour $0 \leqslant n \leqslant 10$ avec Maple (!).

(2) Montrer que pour tout n, Q_n se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.

(3) Représenter les surfaces $z = Q_n(x, y)$, $(x, y) \in [-\pi, \pi]^2$, $2 \leqslant n \leqslant 6$.
Conjecturer quelque chose sur $M_n = \sup\limits_{(x,y)\in[-\pi,\pi]^2} Q_n(x, y)$ (toujours sous Maple...).

(4) a) Montrer que $Q_n(x, y) = \int_0^1 (T_n'((1 - t)\cos x + t\cos y)\,\mathrm{d}t$.
b) En déduire M_n.

EXERCICE 4.2.6.
Soit l'équation différentielle $A(t)y'' + B(t)y' + C(t)y = 0$.

(1) Si $z(u) = y(1/u)$,trouver l'équation différentielle vérifiée par z.
(2) Un exemple concret pour trouver A, B, C en donnant les deux solutions.
(3) Trouver A, B, C pour que $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ soit solution.
Trouver l'autre solution. Tester la transformation d'inverse (?)

EXERCICE 4.2.7.
Soit $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.
Résoudre $x^2r + 2xys + y^2t = 0$ (en notations de Monge) :

(1) en passant par les polaires (faire tous les calculs),
(2) en posant $u = x$, $v = y/x$,
(3) exposer précisément le changement de variable domaine de définition, caractère (il faut parler de $\mathbb{L}$, de $\mathcal{C}^\infty$ difféomorphisme).

EXERCICE 4.2.8.
Soit le système $\begin{cases} x' &= xy \\ y' &= y^2 - x \end{cases}$

(1) Existence et unicité d'une solution maximale passant par un point donné.
(2) Expliciter les solutions. Traiter quelques cas intéressants (???)
(Indic : "Il peut être intéressant de tracer les vecteurs vitesse avec Maple")

EXERCICE 4.2.9.

(1) Soit $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ et $A \subset E_n$ un fermé.
Montrer que $\forall P \in E_n$, $\exists Q \in A \mid \mathrm{d}(P, A) = \|P - Q\|$.
(2) On prend $n \geqslant 4$, $P = X^4 - 3X^2$, $A = \mathbb{R}_0[X]$. Y-a-t-il existence et unicité de Q avec $\|f\| = \sup\limits_{x\in[0,2]} |f(x)|$?
(3) On prend $n \geqslant 2$, $P = X^2$, $A = \mathbb{R}_1[x]$. Y-a-t-il existence et unicité de Q avec $\|f\| = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$?

EXERCICE 4.2.10.
Soit $f(x, y) = \dfrac{\cos x - \cos y}{x - y}$ pour $x \neq y$.

(1) Montrer qu'il existe $\tilde{f}$ définie sur $\mathbb{R}^2$ coïncidant avec f sur $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$ et continue.
(2) Expliciter $\tilde{f}(x, x)$.
(3) Montrer que $\tilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Solution 1.1.1 (R. Casalis) Note : ?
Examinateur : c'est l'examinateur de la salle W. je ne l'ai pas beaucoup entendu. Il m'a bien laissé fougéré sur la deuxième question, mais il est sympa et m'a donné une piste suffisamment vague et au bon moment...

(1) Tout d'abord, avec $x = 0$, on a $f(0) = 0$ puis, par une récurrence immédiate, $f(x) = (-1)^n f(x/2^n) \to 0$ i.e. $f = 0$.

(2) On a, là encore $f(0) = 0$ mais c'est un peu plus compliqué par la suite.

- On suppose ici que $|a| > |b|$ et $|a| > |c|$ et on pose $\alpha_1 = \dfrac{b}{a}$, $\alpha_2 = \dfrac{c}{a}$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $|\alpha_1^n + \alpha_2^n| < 1$. Soit $g(x) = f^{(n)}(x)$, g vérifie $a^n g(ax) + b^n g(bx) + c^n g(cx) = 0$ et $a^n + b^n + c^n \neq 0$ (car $|\alpha_1^n + \alpha_2^n| < 1$) donc $g(0) = 0$. On a donc $g(x) = -\alpha_1^n g(\alpha_1 x) - \alpha_2^n g(\alpha_2 x)$.
  Soit m un entier tel que $|\alpha_1|^m + |\alpha_2|^m < 1$, on pose $M_\alpha = \sup_{|x|\leqslant\alpha} |f^{(m)}(x)|$ pour $\alpha > 0$ on a alors
  $$M_\alpha \leqslant (|\alpha_1|^m + |\alpha_2|^m)\, M_\alpha$$
  donc M_α est nulle et ceci pour tout α. f est un polynôme de degré $\leqslant m$: $f(x) = \sum_{k=0}^{n} t_k x^k$ et les seuls termes éventuellement non nuls sont ceux qui vérifient $a^p + b^p + c^p = 0$ (exemple $p = 1$ si $a + b + c = 0$).
- Si $|a| = |b| > |c|$ alors $b = -a$, comme $c \neq 0$ alors $f(x) + f(-x) = -f(\frac{c}{a}x)$ donc f est paire d'où $f(x) = -\frac{1}{2} f(\frac{c}{a}x) = (-\frac{1}{2})^n f(\frac{c^n}{a^n}x) \to 0$, f est nulle.

Remarque : si on suppose de plus $a, b, c > 0$ (comme dans l'énoncé de la R.M.S.) alors on peut conclure dans tous les cas que f est identiquement nulle...

(3) On a $I_n - \lambda P^{-1}M$ inversible donc, pour $\lambda \neq 0$, $\dfrac{1}{\lambda} I_n - P^{-1}M$ inversible ce qui est équivalent à dire que $P^{-1}M$ n'admet que 0 comme valeur propre soit $P^{-1}M$ nilpotente. Par conséquent M est non inversible.
Réciproque : si M est non inversible alors M est **équivalente** à $K_r = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où $r = \mathrm{Rg}(M)$. On a ainsi $M = RK_rQ$ et $\det(RQ - \lambda M) = \det R(I_n - \lambda K_r)Q = \det R \det Q \det(I_n - \lambda K_r) \neq 0$.

(4) Soit par contraposée, il suffit de prouver que si $M \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ alors $u(M) \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. On utilise la question précédente :
M n'étant pas inversible, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $P - \lambda M$ soit inversible pour tout λ. On sait alors que $u(P - \lambda M)$ est inversible et comme u est linéaire, $u(P) - \lambda u(M)$ est aussi inversible. $u(P) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, on en déduit que $u(M)$ n'est pas inversible c.q.f.d.

Solution 1.1.2 (B. Charron) Note : 7.5
Examinateur : je cours des Halles à Ulm, j'arrive au 4ème étage en nage, haletant, avec 5 minutes de retard et là, le gars me dit de reprendre mon souffle et me propose même du jus d'ananas... En clair, le gars était plutôt sympa. Dommage que je foire ma planche après, surtout que les exos étaient pas vraiment niveau Ulm. J'ai passé beaucoup de temps sur le premier à faire le cas $n = 1$. Pour le deuxième, quand j'ai vu hyperplan affine je suis parti sur de l'algèbre et j'ai même pas pensé à l'équation cartésienne d'un hyperplan affine.

(1) D'abord un petit lemme : si $g^{(k)}$ a au plus r racines alors g a au plus $k + r$ racines. Ceci se démontre par récurrence par l'absurde en utilisant le théorème de la Rolle.
On montre alors par récurrence sur n : $P(n) =$ "Pour tout m et tout $n' \leqslant n$ on a la majoration".

- Pour $n = 1$, soit m quelconque. f est de la forme $f(x) = A(x) + B(x)e^x$ avec A et B des polynômes de degrés inférieurs à m. Alors $f^{(m+1)}(x) = C(x)e^x$ où C est un polynôme de degré inférieur à m. Donc $f^{(m+1)}$ a au plus m racines. Avec le lemme, f a ainsi au plus $m+m$ racines d'où P(1).

- Pour n tel que $P(n)$ est vraie, soit m quelconque. Au rang $n+1$, f est de la forme $f(x) = A(x) + B(x, e^x)e^x$ où A est un polynôme de degrés inférieur à m et B un polynôme de degrés inférieur à m en X et inférieur à n en Y. Donc $f^{(m+1)}(x) = C(x, e^x)e^x$ où C est comme B pour les degrés. Ainsi, les racines de $f^{(m+1)}$ sont celles de C, qui en a au plus $mn+m+n$ d'après $P(n)$. Donc f a au plus $(mn+n+m)+(m+1) = m(n+1)+(n+1)+m$, d'où $P(n+1)$.

(2) L'existence est évidente : soit $P(x) = \prod_{i=1}^{n}(x-t_i) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ alors l'hyperplan d'équation $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = -a_0$ contient les P_i.
Montrons l'unicité : soient deux hyperplans qui contiennent les (P_i). Ils s'écrivent $\sum_{k=1}^n a_k x_k = d$ et $\sum_{k=1}^n a'_k x_k = d'$.
Supposons $d = 0$. Avec $Q(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, les t_i et 0 sont racines de Q. Si les t_i sont tous non nuls, Q aurait $n+1$ racines donc $d \neq 0$ et de même $d' \neq 0$. Sinon, on a $d = d' = 0$. On peut donc dans tous les cas supposer $d = d'$.
Et on a la relation :

$$M \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a'_1 \\ \vdots \\ a'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ \vdots \\ d \end{pmatrix}$$

où M est composée des $(M)_{i,j} = t_i^j$. Or, M est inversible car les t_i sont distincts (variante de Vandermonde sans les 1 devant). Donc $a_k = a'_k$ et les hyperplans affines sont confondus.

Solution 1.2.1 (P. Roux) Note : 7
Examinateur : celui de la salle R, vous arrête rapidement quand vous êtes en train de faire n'importe quoi, sinon aide un peu et fait les 100 pas dans la salle.

(1) On voit rapidement que ϕ est linéaire puis on s'attaque à l'injectivité : Soit A telle que $\phi(A) = 0$, en notant E_{ij} la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la ligne i et colonne j qui vaut 1, on a $f_A(E_{ij}) = 0$ donc $a_{ji} = 0$ en notant $A = (a_{ij})$ d'où le résultat. On conclut ensuite par un argument de dimension. (Ne pas raconter comme moi que $X, Y \mapsto \mathrm{Tr}(X^{\mathrm{T}}Y)$ est un produit scalaire.)

(2) Soit f une telle forme linéaire, d'après ce qui précède il existe A dans H telle que $f = f_A$ et :

$$\begin{aligned} f(XY) = f(YX) \quad &\Rightarrow \quad \mathrm{Tr}(AXY) = \mathrm{Tr}(AYX) \\ &\Rightarrow \quad \mathrm{Tr}(YAX) = \mathrm{Tr}(XAY) \end{aligned}$$

d'où en choisissant $X = E_{ik}$ et $Y = E_{kj}$, $a_{ji} = 0$ pour $i \neq j$ et $a_{ii} = a_{jj}$ avec $X = E_{ij}$ et $Y = E_{ji}$ soit $A = \lambda I_n$. Ainsi $f = \lambda \mathrm{Tr}$ et la réciproque est évidente.

(3) On a assez clairement $\mathrm{Vect}(E)$ inclus dans E' ensemble des matrices de trace nulle, montrons qu'il y a en fait égalité. Soit ψ de H^* dans $\mathrm{Vect}(E)^*$ qui à f associe f restreinte à $\mathrm{Vect}(E)$, ψ est linéaire et on vient de montrer que son noyau est une droite vectorielle d'où : $\dim \mathrm{Vect}(E) = \dim H^* - 1 = \dim H - 1 = \dim E'$ — puisque E' est noyau d'une forme linéaire non nulle — et ainsi $\mathrm{Vect}(E)$ est l'ensemble des matrices de trace nulle. (Je n'ai pas eu le temps de traiter cette question à l'oral, d'où la note.)

Solution 1.2.2 (B. Charron) Note : 15

Examinateur : très sympa, il pose plein de questions à la fin : X/ENS ? 3/2 ? comment ce sont passé les maths spécifiques ? etc... Pour ce qui est de l'exo, j'avais déjà fait le (1) en préparation (ça aide) mais j'ai eu du mal à l'expliquer. Le (2) a donné lieu à pas mal d'erreurs de calculs (produits de matrice 2x2...).

(1) A a un polynôme annulateur scindé à racines simples donc est diagonalisable et ses valeurs propres λ et μ sont racines n-ièmes de l'unité. De plus $det(A) = \lambda\mu = 1$ donc $\mu = \overline{\lambda}$.

Soit $t = \mathrm{tr}(A)$. On a $|t| = |\lambda + \mu| = |2\mathrm{Re}(\lambda)| \leqslant 2$ et t entier donc on va disjoncter :
- Si $t = 0$, $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$ donc $\lambda = i$ et $\mu = -i$ (ou l'inverse). Dans ce cas $A^4 = I_2$.
- Si $t = 1$, $\mathrm{Re}(\lambda) = 1/2$ donc $\lambda = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou son conjugué. Dans ce cas, $A^6 = I_2$.
- Si $t = 2$, $\mathrm{Re}(\lambda) = 1$ donc $\lambda = 1$ et $\mu = 1$. Dans ce cas, $A = I_2$.
- Si $t < 0$, c'est pareil.

(2)
- Pour en trouver une on prend la rotation d'angle $\pi/2$: $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- Pour en trouver une infinité, on cherche d'abord des matrices entières inversibles et d'inverses entières. On sait que l'inverse de A est $\frac{1}{det(A)}(tr(A)I_2 - A)$. Il suffit donc de prendre des matrices de déterminant 1. Par exemple : $\begin{pmatrix} a & a-1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ où a parcourt $\mathbb{Z}$.
  On a alors une infinité de matrices d'ordre 4 en prenant les matrices semblables à la rotation pour les matrices inversibles précédentes. Après calcul :
  $$\begin{pmatrix} -a^2 + a - 1 & -2 + 2a - a^2 \\ a^2 + 1 & 1 + a^2 - a \end{pmatrix}.$$

Solution 1.2.3 (C. Birman) Note : ?

Examinateur : ?

Indication donnée (tardivement) : calculer la différentielle de f_k qui à M associe M^k.

On remarque que $(M+H)^k = M^k + M^{k-1}H + M^{k-2}HM + \cdots + M^{k-p}HM^{p-1} + \cdots + HM^{k-1} + O(H^2)$ puis que $\mathrm{Tr}(M^{k-p}HM^{p-1}) = \mathrm{Tr}(M^{k-1}H)$ d'où
$$\Phi'(M)(H) = (\mathrm{Tr}(H), 2\,\mathrm{Tr}(MH), \ldots, n\,\mathrm{Tr}(M^{n-1}H).$$

Solution 1.2.4 (R. Casalis) Note : ?

Commentaires : voici la colle que j'ai eu à l'ENS. Il s'agit de l'épreuve de math U/L/C mais il a fallu quotienter... comme quoi, le hors programme ça ne sert pas qu'à l'UUUUUULM

(1) On raisonne par l'absurde.
Si W et W' sont deux hyperplans de V tels que $f(W) \subset V$ et $f(W') \subset V$ et $W \neq W'$ alors $V = W + W'$ et $f(V) = f(W) + f(W') \subset V + V \subset V$ contradiction.

(2) L'implication directe est encore facile : si $V = W + \mathbb{K}a$ est hypostable $f(V) = f(W) + \mathbb{K}.f(a) \subset V + \mathbb{K}.f(a)$ donc $V + f(V) \subset V + \mathbb{K}.f(a)$ d'où $\mathrm{codim}\, V \leqslant 1$ dans $V + f(V)$. $\mathrm{codim}\, V = 0$ est impossible (sinon V serait stable) donc $\mathrm{codim}\, V = 1$.
La réciproque est sordide.
- V n'est pas stable sinon on a $f(V) \subset V$ d'où $V = V + f(V)$ ce qui est impossible.
- Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de V que l'on complète par $f(a)$ un vecteur de $f(V)$ $(a \in V)$. Pour tout i, $f(e_i) = \varepsilon_i + \alpha_i f(a)$ où $\varepsilon_i \in V$. Ainsi $f(e_i - \alpha_i a) \in V$.

- La famille $(e_i - \alpha_i a)_{i\in[\![1,p]\!]}$ est de rang $\geqslant p-1$: si $\sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i(e_i - \alpha_i a) = 0$ alors

$$\left(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i\right) a = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i.$$

  Si $a = \sum\limits_{i=1}^{p} x_i e_i$ est la décomposition de a dans la base des (e_i) alors $\lambda_i = \left(\sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i\right) x_i = Ax_i$. Les (λ_i) forment un sous-espace vectoriel de dimension $\leqslant 1$.
  Soit $g : (\mu_1, \ldots, \mu_p) \in \mathbb{K}^p \mapsto \sum\limits_{i=1}^{p} \mu_i(e_i - \alpha_i a) \in V$, on vient de voir que $\dim \operatorname{Ker} g \leqslant 1$ donc $\operatorname{Rg}(g) \geqslant p-1$ et $\operatorname{Rg}(g) = \dim \operatorname{Vect}(e_i - \alpha_i a) \geqslant p-1$ ce qui achève cette démonstration.
- On peut alors extraire de la famille $(e_i - \alpha_i a)$ une famille libre de $p-1$ vecteurs. Il suffira alors de prendre pour W l'espace vectoriel engendré. W est un hyperplan de V qui vérifie $f(W) \subset V$.

(3) Si V est stable alors pour tout vecteur $a \notin V$, $X = V \oplus \mathbb{K}a$ convient (avec V comme hyperplan).
Si V n'est pas stable alors on prend $X = V + f(V)$ et on a vu au 2 que V est de codimension 1 dans X.

(4) On procède par récurrence :
- Soit $a \in E \setminus \{0\}$, on pose $V_1 = \mathbb{K}a$ ce qui initialise la récurrence.
- Supposons construit la suite $V_1, \ldots, V_k$ telle que
  - V_i soit un hyperplan de V_{i+1},
  - $f(V_i) \subset V_{i+1}$.

  Pour construire V_{k+1} on utilise la question précédente.

On aura $V_n = E$ et si on prend une base (e_i) de E telle que $V_k = \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$ alors la matrice de f a bien la forme voulue.

Solution 1.2.5 (J. Courtiel) Note : ?
Examinateur : J'ai eu le gars de la salle U\V (qui n'était pourtant pas très bronzé!) qui à mon grand désespoir était monoexpressif, comme la grande majorité des examinateurs de l'ENS. À la fin, après la sacro-sainte question "Qu'est-ce que vous aimerez avoir comme école?", il m'a souhaité "Bonne chance" et même que je lui ai répondu "C'est gentil". (toujours manucurer dans le sens du poil)
J'ai trouvé l'exo assez abstrait : à partir d'une diagonalisation d'endomorphisme, il fallait prouver la diagonalisation d'endomorphisme d'endomorphismes et vice-versa. (n^4 coefficients dans la matrice de A_f m'a fait remarqué Jiu Jiu!)

(1) On suppose f diagonalisable. Soit $F = \operatorname{Diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ sa matrice diagonale dans une base (b_i) appropriée. Le produit à gauche (resp. à droite) par F correspond alors à une multiplication des lignes (resp. des colonnes) par les λ_i, d'où :

$$FE_{i,j} - E_{i,j}F = (\lambda_i - \lambda_j)E_{i,j}$$

En définissant une base $(u_{i,j})$ de $\mathcal{L}(E)$ par $u_{i,j}(b_k) = \delta_{k,j} b_i$, on obtient

$$A_f(u_{i,j}) = (\lambda_i - \lambda_j)u_{i,j}$$

et A_f est donc bien diagonalisable.

(2) Supposons A_f diagonalisable et soit $(g_i)_{i\in[\![1,n^2]\!]}$ une base de vecteurs propres de A_f. Notre corps de base est $\mathbf{C}$, f admet donc un vecteur propre b tel que $f(b) = \mu b$, auquel

cas :

$$A_f(g_i) = \lambda_i g_i \quad \Rightarrow \quad f(g_i(b)) = (\mu + \lambda_i) g_i(b). \tag{12}$$

Comme (g_i) engendre $\mathcal{L}(E)$, en posant $g'_i = g_{i|\,\mathrm{Vect}(b)}$ la famille (g'_i) engendre $\mathcal{L}(\mathrm{Vect}(b), E)$. On en extrait $g'_{i_1}, ..., g'_{i_n}$ base de $\mathcal{L}(\mathrm{Vect}(b), E)$: l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(\mathrm{Vect}(b), E) & \to & \mathcal{L}(E) \\ g & \mapsto & g(b) \end{array}$$

est un isomorphisme, donc $(g_{i_k}(b))_{k \in [\![1,n]\!]}$ est une base de E constituée – de par (**??**) – de vecteurs propres de f. Ainsi f est diagonalisable.

Solution 1.2.6 (A. Cleynen) Note : 3

Examinateur : très désagréable (salle R) qui une fois qu'il a vu que j'étais déstabilisée à la suite d'un erreur dans le premier exercice, s'est amusé à me poser toutes les 5 minutes la question "vous êtes sûre?". Rien de tel pour perdre toute l'assurance qu'il restait.

(1) On utilise le fait que toutes les matrices de $\mathbb{C}$ sont trigonalisables, on en prend une (M) triangulaire. On prend la suite des D_p telles que D_p soit la même que M sauf que sur la diagonale on rajoute des $\frac{i}{p}$. A partir d'un certain rang, tous les coefficients de la diagonale de D_p sont distincts donc D_p est diagonalisable et tend bien vers M. D'où le résultat.

(2) a) A est diagonalisable. On cherche donc le commutant de A.
$A = PDP^{-1}$ d'où $AM = MA \Leftrightarrow DN = ND$ où $N = P^{-1}MP$. On ordonne les valeurs propres de A de telle façon que D s'écrit $D = \mathrm{Diag}(\lambda_i I_{n_i})$ où les λ_i sont tous distincts. On a alors $DN = ND \Leftrightarrow N = \mathrm{Diag}(N_i)$ où $N_i \in \mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{R})$ (on peut aussi raisonner avec les sous-espaces propres).

On en déduit que $\mathrm{Ker}\, f_A = \{M \mid M = P\,\mathrm{Diag}(N_i)P^{-1}\}$ et $\dim \mathrm{Ker}\, f_A = \sum_{i=1}^{k} n_i^2$.

b) Il s'agit de trouver une fonction continue telle que E_p soit l'image réciproque d'un ouvert. On ne peut pas prendre $f\ : A \longrightarrow \mathrm{Rg}\, f_A$ puisque cette fonction est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et donc n'est pas continue. En fait on va utiliser le fait qu'une matrice est de rang superieur ou égal à $p+1$ si tous ses mineurs d'ordre $p+1$ sont non nuls. On choisit donc la fonction $f\ : A \longrightarrow \prod \hat{A}$ où $\hat{A}$ est le déterminant d'un mineur d'ordre $p+1$ de A. Si f est continue, alors E_p est l'image réciproque de $(]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[)$ qui est un ouvert, donc E_p est un ouvert.
Reste donc à montrer que f est continue. Pour cela il faut connaître le lien entre A et la matrice de f_A. Pour cela, on calcule $f_A(E_{i,j})$, on montre (calcul un rien pénible) que la matrice est une combinaison linéaire des coefficients de A et donc cette fonction est bien continue.

Solution 1.2.7 (S. Hurand) Note : ?

Examinateur : Avec mon sens physique aigu, j'ai tout de suite fait remarquer qu'avec un nom pareil, p est sûrement un projecteur : ça amuse l'examinateur mais il en attend un peu plus.

(1) On calcule p sur la la base des $(e_i =$, on trouve $p(e_i) = (1/n) * \sum_{j=1}^{n} e_j$ en comptant les permutations. En effet, il y a $(n-1)!$ permutations qui envoie i sur chaque $j \in [\![1, n]\!]$. Donc $M = Mat(p, (e_i)) = (1/n) * J$ où J est la matrice ne contenant que des 1. Comme $J^2 = n * J$, on en déduit que $M^2 = M$ i.e. p est bien un projecteur, conformément à l'intuition (!). Il faut donc en déterminer le noyau et l'image.

En notant v le vecteur $(1, ..., 1)$, on voit que $x \in \operatorname{Ker} p \Leftrightarrow (x|v) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$. On vérifie que $p(v) = v$ (avec la matrice) et que la famille des $\hat{e}_i = (1, 0, ..., 0, -1, 0..., 0)$, avec le -1 en i-ème position, forme une base de $\operatorname{Ker} p$. Donc $\operatorname{Im} p = \operatorname{Vect}(v)$ et $\operatorname{Ker} p = \operatorname{Vect}(\hat{e}_2, ..., \hat{e}_n)$.

(2) Un peu subtil, il faut faire des changements d'indice adéquats. Tout d'abord, on vérifie que si $\hat{u} \in \mathfrak{S}_n$, $x - f_{\hat{u}}(x) \in \operatorname{Ker} p$:

On a $x - f_{\hat{u}}(x) = (x_1 - x_{\hat{u}^{-1}(1)}, ..., x_n - x_{\hat{u}^{-1}(n)})$ donc

$$p(x - f_{\hat{u}}(x)) = (1/n!) \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - x_{\hat{u}^{-1}(i)}) e_\sigma(i) \right),$$

car $f_\sigma(e_i) = e_\sigma(i) = (1/n!) \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left[\sum_{i=1}^{n} x_i e_\sigma(i) - \sum_{j=1}^{n} x_j e_\sigma(\hat{u}(j)) \right]$, en faisant le changement d'indice $j = \hat{u}^{-1}(i)$ dans la 2e somme, soit

$$\sigma(i) = \sigma(\hat{u}(j)) = (1/n!) \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} x_i * e_\sigma(i) - \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} x_i * e_\sigma(\hat{u}(i)) \right]$$

car l'indice j est muet, donc on peut le remplacer par i, et on intervertit les sommes. Or quand σ décrit $\mathfrak{S}_n$, $\sigma' = \sigma \circ \hat{u}$ décrit également $\mathfrak{S}_n$ (là il m'a demandé de justifier pourquoi et je n'ai pas su répondre... heureusement il est passé à la suite parce que on allait pas y passer la nuit quand même). On fait donc le changement d'indice $\sigma' = \sigma \circ \hat{u}$ dans la 2e somme, et on re-intervertit les sommes :

$$\sigma(i) = (1/n!) \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} x_i * e_\sigma(i) - \sum_{\sigma' \in \mathfrak{S}_n} x_i * e'_\sigma(i) \right] = 0$$

donc $x - f_{\hat{u}}(x) \in \operatorname{Ker} p$.

Ensuite, on va montrer que l'on peut construire les $\hat{e}_i$ à partir des $x - f_\sigma(x)$, pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. x n'appartient pas à $\operatorname{Im} p$ donc x n'est pas colinéaire à $v = (1, ..., 1)$. En particulier, toutes les coordonnées de x ne sont pas identiques. On pourra supposer $x_1 \neq x_2$. Construisons $\hat{e}_i = e_1 - e_i$:

Si $x_i \neq x_1$, l'idée est de prendre $\sigma = (1i)$ (c'est la transposition qui échange 1 et i) :

$$\begin{aligned} x - f_\sigma(x) &= (x_1 - x_{\sigma_1(1)}, ..., x_n - x_{\sigma_1(n)}) \\ &= (x_1 - x_i, 0, ..., 0, x_i - x_1, 0, .., 0) = (x_1 - x_i) \times (1, 0, ..., 0, -1, 0..., 0) = (x_1 - x_i) * \hat{e}_i \end{aligned}$$

donc $\hat{e}_i = (1/(x_1 - x_i)) * (x - f_\sigma(x))$

Si $x_i = x_1$, on va faire la même manipulation, mais en passant par x_2. On pose $\sigma = (12i)$:

$$x - f_\sigma(x) = (x_1 - x_i, x_2 - x_1, 0, \dots, 0, x_i - x_2, 0, \dots, 0) = (0, x_2 - x_1, 0, \dots, x_1 - x_2, 0, \dots, 0)$$

car $x_1 = x_i$. Donc $x - f_\sigma(x) = (x_2 - x_1) \times a$ où $a = (0, 1, 0, ...0, -1, 0..., 0)$. Or $\hat{e}_2 = (x - f_{\hat{u}}(x))/(x_2 - x_1)$ avec $\hat{u} = (12)$ car $x_1 \neq x_2$ donc $\hat{e}_i = a + \hat{e}_2 = (x - f_{\hat{u}}(x))/(x_2 - x_1) + (x - f_\sigma(x))/(x_2 - x_1)$ Donc $(x - f_\sigma(x)), \sigma \in \mathfrak{S}_n$ engendre une base de $\operatorname{Ker} p$, donc $\operatorname{Ker} p$.

(3) On montre que les sous-espaces suivants sont stables, mais je n'ai pas eu le temps de montrer que ce sont les seuls (le type avant moi avait eu le temps de le faire, je l'avais entendu par la porte, donc l'examinateur avait l'air dépité qu'avec moi l'exo s'arrête là) :

Je lui sort "ben 0 est sable par f_σ", et là voulant jouer au plus con avec moi (le pire c'est qu'il a gagné!), il me rétorque "et c'est tout?" Je lui répond que je n'en vois pas d'autre, il me fait "et E ?" (je vous l'avais dit qu'il jouait au plus con...).

Blague à part il y a aussi $\operatorname{Im} p$ (car $f_\sigma(v) = v$) et $\operatorname{Ker} p$ (montrer cela revient à montrer que $x - f_\sigma(x) \in \operatorname{Ker} p$, ce qui a déjà été fait), et il m'a assuré qu'il n'y en a pas d'autres, mais faudrait le montrer...

Solution 1.2.8 (Y. Yang) Note : ?

Examinateur : Exo ouvert et examinateur fermé. Il était presque muet pendant la planche. J'ai bricolé sur le dessin et trouvé la réponse sans vraiment montrer. À la fin, il m'a dit que c'était pas mal.

Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \max(u_{n+1}, u_n)$. (v_n) est décroissante donc elle converge dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors il en est de même pour (u_n).

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = a$ alors montrons que $u_n \to a$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &\leqslant \max[pu_{n+1} + (1-p)u_n, u_{n+1}] \\ &\leqslant pu_{n+1} + \max[(1-p)u_n, (1-p)u_{n+1}] \\ &\leqslant pu_{n+1} + (1-p)\max[u_n, u_{n+1}] = pu_{n+1} + (1-p)v_n. \end{aligned}$$

On obtient alors l'encadrement suivant : $\dfrac{1}{p}v_n + (1 - \dfrac{1}{p})v_{n-1} \leqslant u_n \leqslant v_n$ et, par le théorème d'encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$.

Solution 1.2.9 (M. Moreno) Note : ?

Examinateur : ?

(1) a) On se place dans une base diagonalisante pour u, d'où, si on appelle λ_i les valeurs propres de u, on a

$$\begin{aligned} f(y) &= 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 \\ &= -\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(y_i - \frac{x_i}{\lambda_i}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{\lambda_i}. \end{aligned}$$

On en déduit que $\sup f(y) = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{x_i^2}{\lambda_i}$ (atteint lorsque $y_i = \dfrac{x_i}{\lambda_i}$).

En bonus, on remarque que $\forall (x,y) \in E^2$, $(x|y) - (u(y)|y) \leqslant (u^{-1}(x)|x) - (x|y)$.

b) On utilise l'inégalité "bonus" avec v^{-1} d'où

$$\begin{aligned} (u(x)|x) - (x|y) > (v(x)|x) - (x|y) &\geqslant (x|y) - (v^{-1}(y)|y) \\ &> (x - v^{-1}(y)|y) \end{aligned}$$

et on remplace x par $u^{-1}(x)$

$$(x - y|u^{-1}(x)) > (u^{-1}(x) - v^{-1}(y)|y)$$

et, avec $y = x$, on obtient

$$0 > ((u^{-1} - v^{-1})(x)|x)$$

ce qui se traduit par le fait que $u^{-1} - v^{-1}$ est un ESDP.

(2) Question classique.
- On montre tout d'abord que f est aussi k-lipschitzienne (par passage à la limite simple);
- On pose $x_{i,p} = a + i\dfrac{b-a}{p}$, on a $|f_n(x_{i+1,p}) - f_n(x_{i,p})| \leqslant k\dfrac{b-a}{p}$ et on prend p assez grand pour que $k\dfrac{b-a}{p} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3}$.
- p étant fixé, on sait qu'il existe N tel que $n \geqslant N$ entraîne $\max_i |f(x_{i,p}) - f_n(x_{i,p})| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3}$.

On conclut alors avec l'inégalité
$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant |f(x) - f(x_{i,p})| + |f(x_{i,p}) - f_n(x_{i,p})| + |f_n(x_{i,p}) - f_n(x)|$$
où $x \in [x_{i,p}, x_{i+1,p}]$.

(3) a) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$ puis penser à prendre $A + \varepsilon I_n$.
b) Toute matrice sur $\mathbb{C}$ est trigonalisable : $M = PTP^{-1}$, on pose $T_p = T + \mathrm{Diag}(i/p)$. Les valeurs propres de T_p se lisent sur la diagonale et, sauf pour un nombre fini de p, elles sont toutes distinctes ce qui signifie que T_p est diagonalisable et $T_p \to T$. On peut alors conclure : $M_p = PT_pP^{-1}$ est diagonalisable et tend vers M.

Solution 1.3.1 (B. Charron) Note : 17

Examinateur : très jeune (pour un examinateur : genre 22 ans) et il regardait tout le temps son ordi portable pendant que j'étais au tableau. A la fin il me demande si je préfère l'X ou l'ENS et par sécurité je lui réponds que je sais pas encore... Pour ce qui est de la solution je n'avais pas fini au tableau et vu que je suis passé en mode vacance j'y arrive plus, désolé (il fallait bidouiller sur $z_{i+2} = 2az_{i+1} - z_i$).

- Tout d'abord, si $g = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} z_i$ et $g' = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} z'_i$ alors $g = g'$ donc, quitte à faire un changement d'origine, on peut supposer que φ est une similitude qui conserve l'origine.
- Soit donc $\varphi(z) = az$ l'écriture complexe de cette similitude (avec $a \neq 0$), les relations $az_i = z'_i$ sont donc équivalentes à $2az_i = z_{i-1} + z_{i+1}$. Récurrence double que l'on peut résoudre en posant δ tel que $\delta^2 = a^2 - 1$. On trouve (si $\delta \neq 0$)

$$\text{(E)} \qquad z_i = \frac{1}{2\delta}\left(\left[(a-\delta)^{i-1} - (a+\delta)^{i-1}\right] z_0 + \left[(a+\delta)^i - (a-\delta)^i\right]\right).$$

- On veut aussi avoir $z_{n+i} = z_n$ ce qui (pour $\delta \neq 0$) est équivalent à

$$\text{(R)} \quad \left[(a-\delta)^{i-1} - (a+\delta)^{i-1}\right] z_0 + \left[(a+\delta)^i - (a-\delta)^i\right] = \left[(a-\delta)^{i-1} - (a+\delta)^{n+i-1}\right] z_0 + \left[(a+\delta)^{n+i} - (a-\delta)^i\right].$$

- Si $\delta = 0$ alors
  - $a = 1$, φ est l'identité, chaque z_i est milieu de z_{i-1} et z_{i+1}. Les z_i sont alignés, le seul cas possible correspond à la situation $z_i = z_0$ pour tout i.
  - $a = -1$ alors, en résolvant la récurrence,
  $$z_{n+i} = z_n \Leftrightarrow (-1)^{n+i}[z_0 - (n+i)(z_0 + z_1)] = (-1)^i[z_0 - i(z_0 + z_1)]$$
  ce qui s'écrit
  $$z_0[1 - (-1)^n] = (z_0 + z_1)(-1)^{n+1}n + i(z_0 + z_1)[1 - (-1)^n].$$
  On distingue à nouveau 2 cas :
    - $*$ n pair alors la relation obtenue est équivalente à $z_0 + z_1 = 0$ et on aura $z_i = (-1)^i z_0$.
    - $*$ n impair alors on a toujours $z_0 + z_1 = 0$ puis $z_0 = 0$ et finalement $z_i = 0$.

– Si $\delta \neq 0$ alors il suffit d'avoir $(a+\delta)^n = (a-\delta)^n = 1$ pour que la relation (R) soit vérifié (y-a-t-il équivalence ?).
  * On a ainsi $\dfrac{a+\delta}{a-\delta} = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$. $k \equiv 0[n]$ est écarté ($\delta = 0$). $k \equiv \frac{n}{2}[n]$ donne $a = 0$ écarté aussi. On a donc $\delta = ia\tan\frac{k\pi}{n}$.
  * $\delta^2 = a^2 - 1$ donne $a = \pm\cos\frac{k\pi}{n}$ donc $\delta = \pm\sin\frac{k\pi}{n}$. La similitude est donc une homothétie, les z_i sont sur la même droite.
    Après calculs, on trouve (sans garantie)
$$z_j = \frac{(-1)^{j-1}}{\sin(k\pi/n)}\left[\sin\frac{(j-1)k\pi}{n}z_0 + \sin\frac{jk\pi}{n}z_1\right].$$

Solution 1.3.2 (A. Cleynen) Note : 11
Examinateur : assez sympa (salle Hadamard), même s'il m'a laissé sans rien dire pendant au moins dix minutes avant que je lui demande de l'aide pour poursuivre. A la fin il m'a demandé si je préférais l'X ou l'ENS, et m'a souhaité bonne chance pour la suite. J'ai pas osé lui dire que j'étais en vacances !
On commence par expliquer que deux points distincts de A sont nécessairement distants d'au moins ε. On peut donc bien parler du cardinal de A. Ensuite K est compact donc fermé et borné et il existe une boule fermée de centre O et de rayon R telle que K soit inclus dans cette boule (on se ramène à une boule centrée en O par translation...) Et donc A est également inclus dans cette boule.
On fait un petit dessin (toujours apprécié par l'examinateur) avec des points qui sont tous distant d'au moins ε. On voit bien que le cardinal de A est borné.
On "caractérise" A en fixant un point x_i de A. Alors $\forall i \neq j, x_j \in A\ B'(x_i, \varepsilon)$.
On voit donc que toute boule fermée de rayon $\varepsilon/3$ contient au plus 1 point de A. Or il y a un nombre borné de boule disjointes de rayon $\varepsilon/3$ dans la boule $B'(O,R)$. (Par exemple avec la norme infinie, on voit que $\operatorname{Card} A$ est borné par $(3R/\varepsilon)^2 + 1$. Le raisonnement est identique avec les autres normes, sauf qu'il est beaucoup plus difficile de trouver une valeur explicite de n).
Ensuite, on pose $E = \{\operatorname{Card} A \mid A \text{ est } \varepsilon\text{-bornée}\}$. E est un sous ensemble de $\mathbb{N}$ majoré, donc il atteint son sup. Ainsi, $\exists n \mid \forall A\, \varepsilon\text{-bornée} \in K, \operatorname{Card} A \leqslant n$ et vérifiant $\exists A_0 \mid \operatorname{Card} A = n$.

Solution 1.3.3 (R. Casalis) Note : ?
Examinateur : ?
Voilà, on Cauchy-Lipschitze et on bidouille, c'est pas dur... Pour la dernière question, raisonner par l'absurde et montrer qu'il existe β tel que $y(x)/x^2 < \beta$ pour tout $x > 0$.

(1) Cauchy-Lipschitz s'applique pour $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}\times]0, +\infty[$.
(2) Si $y = ax^2$ est solution alors on a $2ax = \alpha\sqrt{ax^2} - x$. On distingue deux cas
  - Si $x > 0$ alors $2a = \alpha\sqrt{a} - 1$, soit, en posant $b = \sqrt{a} \geqslant 0$, la CNS ici est que l'équation $2b^2 - \alpha b + 1 = 0$ admette une racine positive. On doit donc avoir $\Delta = \alpha^2 - 8 \geqslant 0$ et $\alpha \geqslant 0$ soit $\alpha \geqslant 2\sqrt{2}$.
  - Si $x < 0$ alors $2a = -\alpha\sqrt{a} - 1$, soit, en posant $b = \sqrt{a} \geqslant 0$, la CNS ici est que l'équation $2b^2 + \alpha b + 1 = 0$ admette une racine positive. On doit donc avoir $\Delta = \alpha^2 - 8 \geqslant 0$ et $\alpha \leqslant 0$ soit $\alpha \leqslant -2\sqrt{2}$.

(3) Je pense qu'on suppose maintenant $x \geqslant 0$ et que y solution sur $]0, t[$ est > 0. Comme a_1x^2 et a_2x^2 sont solutions sur $]0, t[$ alors, compte tenu de l'unicité de la solution avec condition initiale, on peut affirmer que $y(x) \notin \{a_1x^2, a_2x^2\}$ pour tout $x \in]0, t[$. Ceci s'écrit encore $\dfrac{y}{x^2} \notin \{a_1, a_2\}$.

(4) Question sordide...

- Comme a_2x^2 est solution, on écrit

$$(y-a_2x^2)'=\alpha\sqrt{y}-x-2a_2x=\alpha(\sqrt{y}-\sqrt{a_2}x)=\alpha\frac{y-a_2x^2}{\sqrt{y}+\sqrt{a_2}x} \tag{E}$$

Soit $z=y-a_2x^2$ alors $z'\leqslant\alpha\dfrac{z}{2\sqrt{a_2}x}=\lambda\dfrac{z}{x}$ en posant $\lambda=\dfrac{\alpha}{2\sqrt{a_2}}$.
On obtient alors $z'x^{-\lambda}-z\lambda x^{\lambda-1}\leqslant 0$ ce qui signifie que $zx^{-\lambda}$ décroît.

- Soit $u\in]0,t[$, pour tout $x\in[0,u]$, $z(x)x^{-\lambda}\leqslant\underbrace{z(u)u^{-\lambda}}_{=A>0}$ et, en revenant à l'équation (E)

$$z'=\frac{\alpha z}{\sqrt{z+a_2x^2}+\sqrt{a_2x^2}}<\frac{\alpha z}{\sqrt{Ax^\lambda}}=Bzx^{-\lambda/2}.$$

- On recommence, avec $K=\dfrac{B}{1-\lambda/2}$ on a $z'\,\mathrm{e}^{Kx^{-\lambda/2}}-Bx^{-\lambda/2}\,\mathrm{e}^{Kx^{-\lambda/2}}<0$ donc $z\,\mathrm{e}^{Kx^{1-\lambda/2}}$ décroît strictement.
- Vu que $\sqrt{a_2}=\dfrac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-8}}{4}$ on en déduit que $\lambda=\dfrac{\alpha}{2\sqrt{a_2}}=\dfrac{2\alpha}{\alpha+\sqrt{\alpha^2-8}}\in]1,2[$ puis que $1-\dfrac{\lambda}{2}\in]0,1[$. $x^{1-\lambda/2}$ tend vers 0 en 0 d'où $z(0)>z(u)\,\mathrm{e}^{Ku^{1-\lambda/2}}>0$ c.q.f.d...

Solution 1.3.4 (M. Moreno) Note : ?
Examinateur : l'examinateur est sourd comme un pot, aussi parlez bien fort. Celui là est torchable sans indication.

(1) Si $x\in\mathrm{Vect}(v)^o$, alors on a :

$$(x|x) = x^TSx=\sum_{i\geqslant 2}x_i^2-x_1^2 \tag{1}$$

$$(x|v) = \sum_{i\geqslant 2}x_iv_i-x_1v_1=0 \tag{2}$$

$$(v|v) = -v_1^2+\sum_{i\geqslant 2}v_i^2<0 \tag{3}$$

dont on déduit que, pour $x\neq 0$:

$$\begin{aligned}(x|x)v_1^2 &= \left(\sum_{i\geqslant 2}x_i^2v_1^2\right)-x_1^2v_1^2\\ &= \left(\sum_{i\geqslant 2}x_i^2v_1^2\right)-\left(\sum_{i\geqslant 2}x_iv_i\right)^2\\ &> \left(\sum_{i\geqslant 2}x_i^2\right)\left(\sum_{i\geqslant 2}v_i^2\right)-\left(\sum_{i\geqslant 2}x_iv_i\right)^2\\ &\geqslant 0\end{aligned}$$

avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Ainsi, $Q_{|\,\mathrm{Vect}(v)^o}$ est définie positive.

(2) Si $Q(v) = 0$ pour $v \neq 0$, on écrit $\text{Vect}(v)^o = \text{Vect}(v) \oplus F$ et, pour $x \in F$, on a à nouveau les relations (??) et (??) et la relation (??) devient :

$$(v|v) = 1 \Rightarrow v_1^2 = \sum_{i \geqslant 2} v_i^2. \tag{4}$$

On forme à nouveau le produit $(x|x)v_1^2$:

$$\begin{aligned}(x|x)v_1^2 &= -x_1^2 v_1^2 + \left(\sum_{i\geqslant 2} x_i^2\right)\left(\sum_{i\geqslant 2} v_i^2\right) \\ &\geqslant \left(\sum_{i\geqslant 2} x_i v_i\right)^2 - x_1^2 v_1^2 \\ &= 0\end{aligned}$$

On utilise à nouveau Cauchy-Schwarz : l'égalité correspond au cas où x et v sont colinéaires, soit $x = 0$ car $x \in F$. On en conclut que $Q_{|F}$ est définie positive.

(3) On prend deux vecteurs libres u et v de E qu'on écrit dans la base $(e_1, ..., e_n)$ telle que $Se_1 = -e_1$ et $Se_i = e_i$ pour $i \geqslant 2$:

$$\begin{aligned}u &= \lambda e_1 + u_2 \\ v &= \mu e_1 + v_2\end{aligned}$$

On pose $w = \mu u - \lambda v \in E \cap \text{Vect}(e_2, ..., e_n)$: comme $w \neq 0$ et que $S_{|\text{Vect}(e_2,...,e_n)} = \text{Id}_{|\text{Vect}(e_2,...,e_n)}$, on a *in fine* $(w|w) = (w|w)_0 > 0$.

Solution 1.4.1 (B. Charron) Note : 18

L'examinatrice semble être une habituée du concours vu les commentaires des années précédentes. Il a du y avoir une erreur informatique parce que je me serais mis 8 plutôt que 18 en sortant.

Le premier exo, je dis qu'on le voit bien sur le dessin et j'introduis plein de notations, auxquelles elle ne comprend rien, pour coller au dessin et aboutir à une contradiction (j'ai du la mystifier sinon je vois pas...).

Le deuxième apparemment il fallait utiliser le premier, mais comme j'ai pas fait le premier comme elle l'attendait, j'ai du bidouiller.

Solution 1.4.2 (C. Birman) Note : ?

Examinateur : ?

Solution 1.4.3 (A. Cleynen) Note : 20

Examinatrice : Femme sympathique (salle 103), la seule qui m'ait fait des sourires. A la fin elle demande si on préfère Ker-Lan ou Cachan, et pourquoi on est intéressé par l'ENS. A rigolé quand j'ai soupiré par ce que je venais enfin de comprendre qu'il fallait se servir du barycentre.

(1) C'est le lemme d'Hadamard. On prend un vecteur X tel que $AX = 0$.
On a donc

$$\forall i, \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\, x_j = 0.$$

Posons $|x_p| = \sup\{|x_i|\}$.
On a donc, pour $i = p$,

$$|a_{p,p}\, x_p| = |\sum_{j\neq p} a_{i,j}\, x_j|$$

soit encore

$$|a_{p,p}|\,|x_p| \leqslant \sum_{j\neq p} |a_{i,j}|\,|x_j| \leqslant |x_p| \sum_{j\neq p} |a_{i,j}|$$

et ceci n'est possible que si $|x_p| = 0$.
On en déduit donc que $X = 0$, donc que A est inversible.

(2) a) Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé.
$AX = (\alpha_i)_i$ où

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\, x_j.$$

Posons à nouveau $|x_p| = sup\{|x_i|\}$.
On a donc, pour $i = p$

$$|\alpha_p| \leqslant |x_p| \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \leqslant |x_p|.$$

Or $\alpha_p = \lambda\, x_p$. On en déduit donc que $|\lambda| \leqslant 1$.
Ensuite, le vecteur dont les composantes sont toutes égales à 1 est bien un vecteur propre associé à la valeur propre 1.

b) En multipliant par un nombre complexe bien choisi, on peut supposer que

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} x_j = 1.$$

On écrit alors : $x_j = r_j + it_j$ où $(r_j, t_j) \in \mathbb{R}^2$; si $\forall j \in [1, n]$: $r_j < 1$ alors

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} r_j < \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j}$$

ce qui est impossible et donc $\exists k \in [1, n]$: $r_k = 1$ mais comme x est de norme égale à un, $|x_k| \leqslant 1 \Rightarrow t_k = 0 \Rightarrow x_k = 1$ c.q.f.d. (ouf!).

c) Comme $Ax = \lambda x$: $\|Ax\| = \|x\| = 1$ donc le résultat ci-dessus est valable : i.e. $\lambda x_i = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} x_j = x_k$. Mais on peut recommencer avec x_k : $\lambda x_k = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{k,j} x_j$ est de module 1 donc, a nouveau, $\exists k'$: $\lambda x_k = x_{k'}$.
Au bout d'un nombre fini d'opérations, on retrouve x_i i.e.

$$\exists s \in \mathbb{N}^* \ : x_i = \lambda^s x_i \Leftrightarrow \lambda^s = 1.$$

Solution 1.4.4 (S. Hurand) Note : ?
Examinateur : ?

(1) On dit que $1/(i + j + 1) = \displaystyle\int_0^1 x^{i+j}\, \mathrm{d}x$. Dans $\mathbb{R}[X]$, H est la matrice du produit scalaire $(P|Q) = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\, \mathrm{d}t$ donc H est bien définie positive.

(2) En utilisant la linéarité de l'intégrale, il suffit de prouver l'égalité pour $P(t) = t^k$ ce qui est immédiat par le calcul.

(3) On sait d'après le cours, que $\rho(H) = \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(H)} \lambda = \sup_{\|X\|=1} X^{\mathrm{T}} H X$. Or, au (1), on vient de voir que

$$X^{\mathrm{T}} H X = \sum_{(i,j)\in [\![1,n]\!]^2} \frac{x_i x_j}{i+j+1} = \sum_{(i,j)\in [\![1,n]\!]^2} x_i x_j \int_0^1 t^{i+j}\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^1 \left(\sum_{(i,j)\in [\![1,n]\!]^2} x_i x_j t^{i+j} \right) \mathrm{d}t$$
$$= \int_0^1 P(t)^2\,\mathrm{d}t$$

où $P(t) = x_1 t + \cdots + x_n t^n$.

On prouve de même qu'au (2) que $\int_{-1}^1 P(t)\,\mathrm{d}t = -i \int_{-\pi}^0 \mathrm{e}^{it}\, P(\mathrm{e}^{it})\,\mathrm{d}t$ d'où

$$\int_0^1 P(t)^2\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{-1}^1 P(t)^2\,\mathrm{d}t = \frac{-i}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{it}\, P(\mathrm{e}^{it})^2\,\mathrm{d}t$$
$$\leqslant \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} |P(\mathrm{e}^{it})|^2\,\mathrm{d}t = \pi \sum_{i=1}^n x_i^2 = \pi$$

en utilisant Parseval.

On n'a pas la majoration attendue mais c'est déjà ça de pris.

Solution 1.4.5 (J. Xiong) Note : ?

Examinateur : une femme, pas très gentille, ne m'a rien dit alors que j'étais parti dans une mauvaise direction...

Étudier d'abord u_n :

- couper l'intégrale en n morceaux,
- utiliser Taylor avec reste intégral,
- ne rien majorer,garder tout.

On aura une condition nécessaire; $f(0) = f(1)$, et puis le temps est fini .....

Solution 1.4.6 (Y. Yang) Note : ?

Examinateur : Cool,genre Matthieu Mambrini, donne des indications quand il voit que le candidat est motivé. J'étais son dernier candidat et il était pressé de partir.

Solution 1.4.7 (M. Moreno) Note : ?

Examinateur : cet exo est franchement assez ardu. Heureusement, l'examinatrice donne quelques indications contre la solitude... Elle tient aussi beaucoup à ce que l'on cite le nom des théorèmes que l'on emploie (ex : le théorème de Rolle).

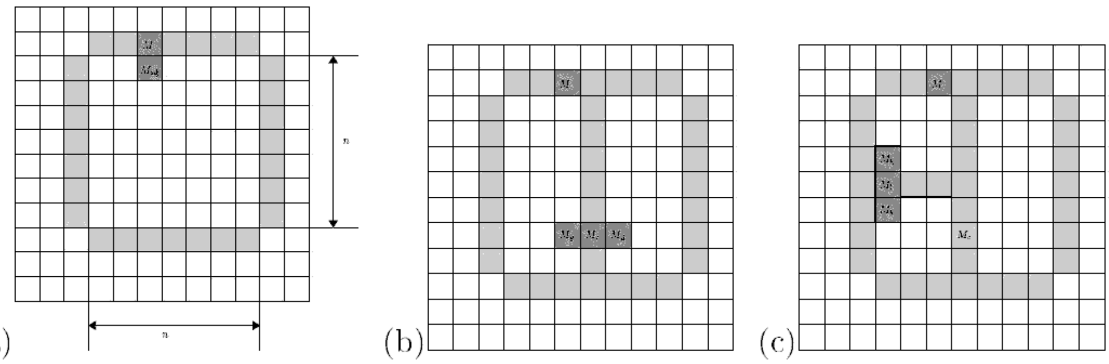
Réflexe : on développe g en série de Fourier. On travaille sous forme réelle, car f est réelle, et on s'aperçoit que les deux premiers termes de la série sont nuls.

Solitude... Dessins... Solitude encore ! L'examinatrice propose d'étudier les sous fonctions $x \mapsto a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ ce qui se fait bien en les prenant sous la forme $A_n \cos(nx + y_n)$: elles s'annulent au moins $2n$ fois sur $[0, 2\pi[$. Comme on commence à $n = 2$, on voit apparaître les 4 annulations, mais g reste quand même une somme infinie de ces fonctions, alors ? Alors l'examinatrice propose de nommer g_n l'unique n-ième primitive de g ($g_0 = g$) de moyenne nulle. On montre que si g_{n+1} s'annule au moins 4 fois sur $[0, 2\pi[$, alors c'est aussi le cas de g_n (en remarquant que $(g_{n+1})' = g_n$ et en utilisant le fameux Rolle). Ensuite on observe ce qui se passe quand on primitive k fois : la fonction $A_n \cos(nx+y_n)$ se voit affublée d'un facteur $1/n^k$: on sent donc que la fonction $A_2 \cos(2x+y_2)$ est prépondérante pour k assez grand. Il "suffit" (mais ce n'est pas encore gagné, et je n'ai pas eu le temps de le faire) alors de triturer des inégalités, d'utiliser le comportement asymptotique de $2^k(\zeta(k) - 1 - 1/2^k)$, et de conclure que pour k assez grand, g_k s'annule au moins 4 fois, donc g aussi.

Solution 1.5.1 (P. Roux) Note : 14
Examinateur : Très sympathique, encourage le candidat sans donner la réponse, donne des conseils (du genre bien cacher le tableau quand on est en train de foirer une somme de termes d'une suite géométrique), professeur au département d'informatique de Lyon je crois.

(1) On peut simplement tester un à un tous les t_i jusqu'à trouver un maximum local. La complexité est en $\mathrm{O}(n)$ (on considère pour les calculs de complexité le nombre de cases lues).
(2) Après être resté dubitatif un certain temps, on s'aperçoit qu'il existe un algorithme dichotomique en $\mathrm{O}(\log(n))$.
(3) On peut bien sûr faire ça de manière quadratique en parcourant toute la matrice mais il y a mieux.

Supposons qu'on a une sous matrice de taille n dont on sait qu'elle contient au moins un maximum local et qu'on connaît le maximum M des cotés de cette sous matrice (en gris sur la figure) qui est tel que $M < M_{adj}$ où M_{adj} est la case de la sous matrice adjacente à M.


(a) (b) (c)

Si M_c est un maximum local, c'est fini. Sinon, si $M \geqslant M_c$ on a un maximum local à gauche – dans l'exemple choisi – de la colonne (penser à l'analogie avec une montagne, en montant à partir de M on finit par arriver à un sommet et on ne peut pas traverser les parties grises qui sont trop basses). Et si $M < M_c$, alors soit $M_c < M_g$ auquel cas on a un maximum local à gauche de la colonne sinon ($M_c < M_d$) on en a un à droite. En répétant l'opération avec une ligne (cf. figure) on réduit finalement le problème d'ordre n à un problème d'ordre $\frac{n}{2}$.

On peut donc opérer ainsi récursivement.

Évaluons la complexité c_n de cet algorithme. La détermination de M_c est de complexité n et celle de M_l de complexité $\frac{n}{2}$, on a alors

$$c_n = 3\frac{n}{2} + c_{\frac{n}{2}} \leqslant 3\frac{n}{2} + 3\frac{n}{4} + \cdots = 3n$$

On a donc un algorithme linéaire (je n'avais pas trouvé tout les détails de l'algorithme avant la fin mais il a eu la gentillesse de m'expliquer avant de me souhaiter une bonne récupération et de me demander à quelles écoles j'étais admissible et si j'étais motivé pour faire de la recherche).

Solution 1.5.2 (J. Courtiel) Note : ?
Examinateur : ?

Solution 2.1.1 (B. Charron) Note : 16
Examinateur : il n'est pas totalement inerte mais tout mouvement (des jambes, des bras ou de la mâchoire) semble lui être un immense effort. Cependant, vu la nature de l'exo, un dialogue s'est difficilement établi vers la fin. Pour le (2), dans la somme de Riemman, j'avais juste sur la formule mais il m'a fait douter alors je me suis "corrigé" pour finalement revenir au point de départ. C'est con mais ça fait perdre du temps.

(1) Soit $g(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ et $b_i = \frac{i}{n}\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ pour $i \in \{0, .., n\}$.
g est strictement croissante car $g'(x) = f(x)$ (théorème fondamental du calcul différentiel) et $f > 0$ donc g est bijective. On vérifie alors que les $a_i = g^{-1}(b_i)$ conviennent.

(2) On a, avec l'expression précédente, et en notant $I = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$:

$$u_n = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} g^{-1}\left(\frac{i}{n}I\right) = \frac{1}{I}v_n.$$

Où $v_n = \frac{I}{n+1}\sum_{i=0}^{n} g^{-1}\left(\frac{i}{n}I\right)$ que l'on reconnaît être une somme de Riemann.
La limite de u_n existe et vaut donc :

$$\frac{\int_0^I g^{-1}(s)\mathrm{d}s}{\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t}.$$

Soit après le changement de variable $s = g(u)$:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{\int_0^1 uf(u)\mathrm{d}u}{\int_0^1 f(u)\mathrm{d}u}.$$

(3) Il a voulu faire ça graphiquement. Donc on dessine g et g^{-1} qui est le symétrique de g par rapport à la première bissectrice. En utilisant le première expression, on trouve alors que la limite de u_n est, dans le rectangle $[0, 1]\times[0, g(1)]$, le rapport entre l'aire au-dessus de la courbe de g et celle du rectangle total.
À partir de là, on prend des fonctions $f_p = f + 1/p$ qui sont > 0. Et puis, comme les aires considérées précédemment pour f_p convergent vers celles pour f, on peut étendre le résultat à $f \geqslant 0$.

Solution 2.1.2 (C. Birman) Note : 13
Examinateur :

(1) Sens direct : $\mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f^2$ est toujours vrai.
On note A la matrice de f alors : $A = PDP^{-1}$, avec les notations habituelles. $D = \mathrm{Diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ et $(e_1, ..., e_n)$ la base diagonalisante correspondante. On prend ensuite X appartenant à $\mathrm{Ker}\, f^2$ et on prouve qu'il appartient à $\mathrm{Ker}\, f$ en l'écrivant dans la base des (e_i).
Réciproque :
Soit $P = \prod_{i=1}^{p}(X - a_i)$ un polynôme annulateur de f^2, scindé à racines simples. On pose

b_i tel que $(b_i)^2 = a_i$. $P(f^2) = 0 = \prod_{i=1}^{p}(f - b_i \operatorname{Id})(f + b_i \operatorname{Id})$.
Si les vap de f^2 sont toutes non nulles c'est bon, sinon on utilise le lemme des noyaux :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{p} \operatorname{Ker}(f - b_i \operatorname{Id}) \oplus \operatorname{Ker}(f + b_i \operatorname{Id}) \oplus \operatorname{Ker} f,$$

en utilisant que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$, et c'est bon.

(2) $(f(x))^x = x^{f(x)} \Leftrightarrow \ln(f(x))/f(x) = \ln(x)/x$, avec $f(]1;+\infty[) \subset]0,+\infty[$. Ensuite on étudie $g\ : x \mapsto \ln(x)/x$ et on trouve que $h = g_{|]1;e[}$ et $k = g_{|]e;+\infty[}$ sont des $\mathcal{C}^1$-difféomorphismes. $f = \begin{cases} k^{-1} \circ g & \text{sur }]1;e[\\ h^{-1} \circ g & \text{sur }]e;+\infty[\end{cases}$. f est bien continue sur $]1,e[\cup]e,+\infty[$ et f est continue en e car on peut prolonger k et h en e et f vérifie bien les autres hypothèses.
Il y a unicité car g admet exactement 2 antécédents sur $]0,1/e[$.

(3) La réponse est non et on raisonne par l'absurde.
On considère $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$, tel que $a_k = a_{k+1} = 0$. En dérivant successivement on voit que x^2 divise $P^(k)$ donc 0 est racine double. D'autre part, on peut montrer avec le théorème de Rolle que toutes les dérivées de P sont scindées à racines simples. Contradiction.

Solution 2.1.3 (R. Casalis) Note : 13

Examinateur : bon, ben c'était La Grige, mais finalement je l'ai pas trouvé pire que Rosso. Peut-être parce que je n'ai pas été aussi mauvais... Fallait bien connaître le cours sur les théorèmes de Lebesgue, savoir redémontrer le théorème de continuité sous le signe intégral, car dans cet exo il fallait prouver la continuité par rapport à plusieurs variables.
Et puis fallait penser au changement de variable $t = t'x$, ça aide heureusement c'est venu assez vite... Il y avait quelques questions de cour déguisée : montrer que G est différentiable (à mon avis ça ne sert à rien, mais c'est juste pour savoir si je connaissais $C^1 \Rightarrow$ différentiable).
Pour la deuxième intégrale, j'ai dit que c'était comme la première, il me répond ah non ! là on intègre sur $\mathbb{R}$ tout entier... étonné je répond, bon, ben alors on fait le changement de variable $t' = -t$ et là, comme si c'était miraculeux, il me félicite...
Bon, c'était aussi la colle à 7h45, donc fallait être bien réveillé (si vous pouvez dormir à l'X, c'est quand même sympa...)
Sinon l'exo est pourri dès que l'on sait utiliser les théorèmes, que l'on a vu les changements de variable et que l'on a pensé à prouver la continuité en revenant à la caractérisation séquentielle.

(1) $t \mapsto \dfrac{xf(t)}{x^2+t^2} = O(\frac{1}{t^2})$ est intégrable au voisinage de $+\infty$. $F(0) = 0$ donc F est définie sur $[0,+\infty[$.
On pose $t = ux$ alors

$$F(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{f(ux)\,\mathrm{d}u}{1+u^2}.$$

$(u,x) \mapsto \dfrac{2}{\pi}\dfrac{f(ux)}{1+u^2}$ est majorée en valeur absolue par la fonction intégrable $\dfrac{2}{\pi}\dfrac{M}{1+u^2}$ où M est un majorant de $|f|$.
On peut alors utiliser le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{x\to 0} F(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{f(0)}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = f(0).$$

(2) Pour $y \neq 0$, on pose $t - x = uy$.

- Si $y > 0$ alors si $t \to \varepsilon\infty$, $u \to \varepsilon\infty$ donc $G(x,y) = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{f(x+uy)\,\mathrm{d}u}{1+u^2}$ et, grâce au T.C.D., $\lim\limits_{y\to 0^+} G(x,y) = f(x)$.
- Si $y < 0$ alors $t \to \varepsilon\infty$, $u \to -\varepsilon\infty$ donc $G(x,y) = -\dfrac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{f(x+uy)\,\mathrm{d}u}{1+u^2}$ et, grâce au T.C.D., $\lim\limits_{y\to 0^-} G(x,y) = -f(x)$.

Montrons maintenant que G est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}\times\{0\}$ (on suppose $y > 0$) :

- Soit $g(x,y,t) = \dfrac{yf(t)}{(x-t)^2+y^2}$.

  $$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,t) = -\frac{2(x-t)yf(t)}{[(x-t)^2+y^2]^2} \text{ et } \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,t) = \frac{[(x-t)^2-y^2]f(t)}{[(x-t)^2+y^2]^2}.$$

  On applique le théorème de dérivation sous le signe intégral car f est bornée (et implicitement f est continue par morceaux) et pour $(x,y) \in [a,b]\times[c,+\infty[$ et $c > 0$, $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}\right| \leqslant \dfrac{M}{(t-x)^2+y^2} \leqslant \dfrac{M}{\min[(t-a)^2, t-b)^2]+c^2}$ (fonction intégrable).
  G admet donc des dérivées partielles continues par rapport à x et y donc G est $\mathcal{C}^1$.
- On montre ensuite par récurrence sur $p+q$ que

  $$\frac{\partial g}{\partial x^p \partial y^q}(x,y,t) = \frac{P_{p+q}(x-t,y)}{[(x-t)^2+y^2]^{p+q+1}} f(t)$$

  où P_{p+q} est un polynôme de degré total inférieur à $p+q+1$.
  Là encore, le théorème de dérivation s'applique sur tout ensemble $[a,b]\times[c,+\infty[$ et on peut conclure que G est de classe $\mathcal{C}^{p+q}$.

Solution 2.2.1 (F. Escriva) Note : 14

(1) On suppose $f(0)$ et $f(1)$ non nuls, on prend $A = \{x \in [0,1] \mid f(x) \geqslant 0\}$ et a sa borne supérieure :

- Par caractérisation de la borne supérieure, il existe une suite croissante (a_n) qui tend vers a. On a $f(a_n) \geqslant 0$ puis, comme $f+g$ est croissante

  $$f(a_n) + g(a_n) \leqslant f(a) + g(a)$$

  puis, vu que $f(a_n) \geqslant 0$

  $$g(a_n) \leqslant f(a) + g(a)$$

  on passe alors à la limite en exploitant la continuité de g

  $$g(a) \leqslant f(a) + g(a)$$

  soit $f(a) \geqslant 0$.
- Soit $x > a$ (possible car $f(0) > 0$ et $f(1) < 0$) alors

  $$f(a) + g(a) \leqslant f(x) + g(x) < g(x)$$

  car $f(x) < 0$, on fait tendre x vers a, on en déduit que $f(a) \leqslant 0$.

Conclusion : par double inégalité on a obtenu $f(a) = 0$.

(2) Si I_n n'est pas dans F alors $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la somme directe de F et des matrices scalaires. Soit $M = aI_n + N$ où $N \in F$, si $M^2 \in F$ alors $M^2 = a^2 I_n + 2aN + N^2$. Comme $2aN + N^2 \in F$, on en déduit que $a^2 I_n \in F$ soit $a = 0$ et par conséquent M est dans F. On considère ensuite la base canonique des $E_{i,j}$.

Si $i \neq j$ alors $E_{i,j}$ appartient à F ($E_{i,j}^2 = 0$), donc il existe un indice i tq $E_{i,i}$ n'appartiennent pas à F, or $E_{i,i} = E_{i,i+1} \times E_{i+1,i}$ ce qui donne une contradiction.

Solution 2.2.2 (Y. Guihard) Note : 17

Examinateur : Henry est plutôt méticuleux, il note tout ce qu'il y a au tableau dans son carnet. Du coup, il n'écoute pas toujours ce qu'on précise à l'oral, je pense qu'il vaut mieux rédiger le plus possible au tableau. Sinon, les arnaques passent plutôt bien, et il a même tendance à les encourager. Pour la (1)c), je ne dois pas avoir la solution qu'il attendait puisqu'il a jugé ma méthode "astucieuse".

(1) a) On a f'' positive, donc f' croissante. f' ne peut tendre ni vers $+\infty$ ni vers l non nul sinon f ne peut pas être bornée (j'allais préciser après avoir affirmé ça, mais il a dit "ok, continuez"...). Donc $f' \to 0$, donc f' est négative donc f décroissante.

b) f converge donc vers l et on a alors $f'' \geqslant a^2 l$. Donc l est nécessairement nul sinon f' ne pourrait pas être bornée.

c) On étudie la fonction $f(x)\exp(ax)$. Sa dérivée est du signe de $f' + af$. On a $f'' - a^2 f$ positive, donc en multipliant par f' (astuce physicienne...) on a $(f'^2 - a^2 f^2)'$ négative, donc $f'^2 - a^2 f^2$ est décroissante vers 0 donc positive, donc $a^2 f^2 \leqslant f'^2$ soit $af \leqslant -f'$ (f' négative). On a donc $f(x)\exp(ax)$ décroissante, donc inférieure à sa valeur en zéro : $f(0)$.

(2) Il existe y dans $\operatorname{Ker}\phi$ tel que $\mathrm{d}(x,\phi) = \|x-y\|$.

Par définition, $\|\phi\| \geqslant \dfrac{|\phi(x-y)|}{\|x-y\|}$ d'où une première inégalité. On utilise en suite la caractérisation de la borne sup pour dire qu'il existe z de norme 1 tel que $|\phi(z)| \geqslant \|\phi\| - \epsilon$. Pour ϵ assez petit z n'est pas dans $\operatorname{Ker}\phi$ et on peut écrire $x = az + x_K$ avec x_K dans $\operatorname{Ker}\phi$. On a $|\phi(x)| = |a||\phi(z)| \geqslant |a|(\|\phi\| - \epsilon)$. Or $|a| = \|az\| = \|x - x_K\| \geqslant \mathrm{d}(x, \operatorname{Ker}\phi)$. D'où l'autre inégalité en faisant tendre ϵ vers zéro.

Solution 2.3.1 (C. Birman) Note : 11

Colle avec Langevin sans géométrie, mais vu l'exo et ce que j'ai fait, je crois que j'aurais presque préféré en avoir...

On considère le polynôme $Q(X) = \prod_{k=0}^{4} (X - \tan(x + k\pi/5))$ qui s'écrit en développant le produit $Q(X) = X^5 - SX^4 + aX^3 + bX^2 + cX - P$. Ensuite on utilise la relation

$$\tan(5x) = \frac{(\tan x)^5 - 10(\tan x)^3 + 5(\tan x)}{5(\tan x)^4 - 10(\tan x)^2 + 1}$$

pour trouver que $Q(X) = N(X) - \tan(5x)D(X)$, en posant $N = X^5 - 10X^3 + 5X$ et $D = 5X^4 - 10X^2 + 1$. En effet, $Q(X)$ et $N(X) - \tan(5x)D(X)$ sont des polynômes qui admettent les mêmes racines $\tan(x + k\pi/5)$ (distinctes) et qui sont unitaires.

Finalement $P/S = 1/5$ pour $S \neq 0$ et quand $S = 0$, $P = 0$.

Solution 2.3.2 (F. Escriva) Note : 17

(1) Là j'ai eu l'inspiration divine (et je me suis aussi rappelé le jour où je suis passé sur l'exo t'es seul) et j'ai commencé à lui parler de la résolution des récurrences linéaires en diagonalisant l'opérateur delta. Il avait l'air étonné que je connaisse et m'a dit que c'était H-P (depuis quand Langevin est-il prisonnier du programme ?) mais que puisque je lui expliquais bien c'était OK. Après on écrit une base de solutions de chacune des relations, puis u_n et v_n comme CL de ces solutions et on se rend compte qu'en prenant

le produit des résolvantes pouf pastèque. Ensuite on peut affiner et prendre le PPCM des résolvantes, ça suffit. A la fin il avait l'air déçu que son exo ait été torché et il m'a posé un exemple : $u_n = n^2 + (-1)^n$ et il m'a bien fallu 12sec pour avoir la résolvante.

(2) a) C'est débile on choisit une égalité et on factorise et en 12s on tombe sur l'orthocentre. Au passage il s'est moqué de mon joli dessin cette ordure.
b) Alors là j'ai été minable alors que c'est évident : on projette l'égalité vectorielle sur $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC}$ puis on utilise des relations de Chasles judicieusement choisies, sachant que c'est l'orthocentre donc y a plein d'angles droits (comme m'a dit la Lange : "on va tuer b").

Solution 2.3.3 (Y. Guihard) Note : 14

Examinateur : Langevin est un examinateur plutôt impatient, il avait l'air pressé de finir et d'aller manger (peut être l'effet série 4 + dernier candidat de la matinée...), surtout que je n'ai pas été particulièrement rapide sur cet exo somme toute pas très compliqué.

(1) Si $P = \sum_{i=0}^{n} c_i X^i$, soit $\overline{P} = \sum_{i=0}^{n} \bar{c}_i X^i$.
z racine de $P \Leftrightarrow \bar{z}$ racine de $\overline{P}$.
Si $\mathrm{Im}(z) \geqslant 0$ comme les z_k, racines de P, alors $|z - z_k| \leqslant |\overline{z} - z_k|$ d'où

$$|P(z)| = |\lambda| \prod_k |z - z_k| \leqslant |\lambda| \prod_k |\overline{z} - z_k| = |\overline{P}(z)|$$

car $\overline{P}(z) = \overline{P(\overline{z})}$.
Inversement si $|P(z)| \leqslant |\overline{P}(z)|$ alors il existe k tel que $|z - z_k| \leqslant |\overline{z} - z_k|$ donc $\mathrm{Im}\, z \geqslant 0$.
On remarque alors $2R = P + \overline{P}$, donc $R(x) = 0$ implique $P(x) = -\overline{P}(x)$ soit $|P(x)| = |\overline{P}(x)|$ par conséquent, par double inégalité, $\mathrm{Im}(x) = 0$.
De même, $2iS = P - \overline{P}$.

(2) Soit $Q = (a - ib)P = (a - ib)(R + iS) = (aR + bS) + i(aS - bR)$, on applique le résultat précédent à Q (qui a les mêmes racines que P) donc $aR + bS$ a toutes ses racines réelles.

Solution 2.4.1 (B. Charron) Note : 13

Examinateur : pour le premier exo, il attendait sagement donc j'ai tatonné sans trop savoir où j'allais et j'ai fini par trouver à ma grande surprise. Il m'a demandé ensuite les cas d'égalité : c'est du cours mais j'ai perdu pas mal de temps à les redémontrer. Pour le (2), il ne restait plus beaucoup de temps donc il était plus bavard : apparemment il veut pas nous laisser sortir si on a pas fini l'exo.

(1) $f(0) = 0$ donc $f(x) = \displaystyle\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t$.

$$\begin{aligned}\int_0^a |f'(t)f(t)|\mathrm{d}t &= \int_0^a \left| f'(t) \int_0^t f'(s)\mathrm{d}s \right| \mathrm{d}t \\ &= \int_0^a \left| \int_0^t f'(t)f'(s)\mathrm{d}s \right| \mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_0^a \int_0^t |f'(t)f'(s)|\,\mathrm{d}s\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Où on a utilisé que la norme de l'intégrale est inférieure à l'intégrale de la norme.
En faisant un dessin du domaine d'intégration et en remarquant que la fonction intégrée

est symétrique par rapport à la première bissectrice :

$$\begin{aligned} 2\int_0^a |f'(t)f(t)|\mathrm{d}t &\leqslant \iint_{[0,a]^2} |f'(t)f'(s)|\,\mathrm{d}s\mathrm{d}t \\ &\leqslant \left(\int_0^a |f'(t)|\,\mathrm{d}t\right)^2 \\ &\leqslant a\int_0^a |f'(t)|^2\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz. D'où le résultat.
Pour le cas d'égalité, on a utilisé deux inégalités dont les cas d'égalités imposent : $f = \alpha|f|$ où $\alpha \in \mathbb{C}$ pour la première, et $|f| = \beta$ où $\beta \in \mathbb{C}$ pour C-S. En conclusion il faut (et il suffit) que f soit constante.

(2) Pour une telle norme, avec $A = BP$ on a $N(PB) = N(BP)$ pour P inversible, puis avec un argument de densité et de continuité de la norme, on étend ceci à $N(AB) = N(BA)$ pour A et B quelconques. On trouve alors une contradiction avec un contre-exemple (cf mon exo de Centrale 1 :-)).

Solution 2.4.2 (R. Casalis) Note : 15

Examinateur : l'interrogateur est sympa, mais vraiment pas bavard. Quand je luttais pour trouver la limite, au bout d'un gros blanc il me donne l'indication "Montrer d'abord que la limite existe" ça m'aide beaucoup, je m'en serais pas douté...

(1) x décroissante donc $x' \leqslant 0$, $x'' \geqslant 0$ donc x' croissante.
Finalement x' admet une limite en l'infini et $x(t) - x(0) = \displaystyle\int_0^t x'(u)\,\mathrm{d}u$ a une limite.
Comme x' admet une limite en $+\infty$ alors cette limite est nécessairement nulle.
Soit $f(t) = tx'(t)$ alors $f'(t) = tx''(t) + x'(t)$ puis $f(t) = \displaystyle\int_0^t ux''(u)\,\mathrm{d}u + x(t) - x(0)$ or $f \leqslant 0$ donc

$$\int_0^t ux''(u)\,\mathrm{d}u = f(t) - [x(t) - x(0)] \leqslant x(0) - x(t).$$

Comme $ux''(u) \geqslant 0$ et que $\displaystyle\int_0^t ux''(u)\,\mathrm{d}u$ est majorée, on en déduit que $\displaystyle\int_0^t ux''(u)\,\mathrm{d}u$ admet une limite en $+\infty$. Ceci entraîne que $f(t)$ a une limite l en $+\infty$.
Si $l \neq 0$ alors $x'(t) \sim l/t$ or $x(t) = x(0) + \int_0^t x'(t)\,\mathrm{d}t$ comme $t \mapsto l/t$ n'est pas intégrable, on aboutit à une contradiction (là il m'a fait redémontrer, je ne sais pas pourquoi, j'en ai profité pour faire n'importe quoi avec les majorations et les minorations) donc l est nulle.

(2) Pour la seconde question, il faut utiliser la première ...
$x'' = Qx \geqslant 0$, on en déduit fièrement que $x'(t)t \to 0$.

$$\begin{aligned} f(t) = x'(t)t &= x(t) - x(0) + \int_0^t ux''(u)\,\mathrm{d}u \\ &= x(t) - x(0) + \int_0^t uQ(u)x(u)\,\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

Là il m'a fait une blague foireuse comme quoi il y avait beaucoup de u j'ai rigolé pour lui faire plaisir, mais je n'étais peut-être pas convaincant.

- Si $x(t) \to l > 0$ alors, comme $x(t)$ est décroissante et positive :

$$\begin{aligned}\int_0^t uQ(u)\,\mathrm{d}u &\leqslant \frac{1}{x(t)}\int_0^t uQ(u)x(u)\,\mathrm{d}u\\ &\leqslant \frac{1}{x(t)}[f(t)+x(0)-x(t)]\\ &\leqslant \frac{x(0)}{x(t)}-1 \quad \text{car } f(t)\leqslant 0\\ &\leqslant \frac{x(0)}{l}-1.\end{aligned}$$

  Comme $uQ(u) \geqslant 0$ et $\int_0^t uQ(u)\,\mathrm{d}u$ est majorée, on en déduit que $\int_0^{+\infty} uQ(u)\,\mathrm{d}u$ converge.
- Si $\int_0^{+\infty} uQ(u)\,\mathrm{d}u$ diverge, on reprend l'inégalité précédente :

$$\int_0^t uQ(u)\,\mathrm{d}u \leqslant \frac{1}{x(t)}\int_0^t uQ(u)x(u)\,\mathrm{d}u \leqslant \frac{1}{x(t)}\int_0^{+\infty} uQ(u)x(u)\,\mathrm{d}u$$

  ce qui s'écrit encore $x(t) \leqslant \dfrac{\int_0^{+\infty} uQ(u)x(u)\,\mathrm{d}u}{\int_0^t uQ(u)\,\mathrm{d}u} \to 0.$

Conclusion : on a bien prouvé l'équivalence.

Solution 2.4.3 (N. Carré) Note : 13

Examinateur :

Réponse : f est une homothétie.

Démarche : on réécrit la propriété sous la forme $f \circ (u^{-1} \circ p) = (u^{-1} \circ p) \circ f$. Soit F un sous-espace de dimension $k = \mathrm{Rg}(p)$ alors il existe $u \in \mathrm{GL}(E)$ tel que $F = u^{-1} \circ p(E)$. Si $x \in F$ alors $x = u^{-1} \circ p(y)$ et $f(x) = u^{-1} \circ p(f(y)) \in F$ donc F est stable par f.

- Si $k = 1$ alors tout vecteur de E est un vecteur propre (f stabilise $\mathrm{Vect}(x)$) et ceci caractérise les homothéties.
- Si $k = n$, f commute avec tous les éléments de $\mathrm{GL}(E)$ puis, par linéarité, aux éléments de $\mathcal{L}(E)$ et on conclut.
- Si $k \leqslant n - 1$ on va montrer que f stabilise aussi les sev de dimension $k - 1$ puis on fait une récurrence descendante :
  soit F un sev de dimension $k - 1$ de E et x, y deux vecteurs libres de E qui n'appartiennent pas à F, alors $F = (F \oplus \mathrm{Vect}(x)) \cap (F \oplus \mathrm{Vect}(y))$ qui sont tous les deux de dimension k donc F stable par f et c'est torché.

Solution 3.1.1 (P. Roux) Note : 12

Examinateur : ?

(1) $\mathrm{Rg}(A) = 2$ donc c'est possible. On écrit que $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker} A \oplus V$ où $\operatorname{Ker} A = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$, $V = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}) = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$. On complète la famille (Ae_1, Ae_2) par $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$

(où les ε_i sont les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^5$. On trouve alors

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(2)
- On utilise la formule de Taylor reste intégral et le fait que la série est à termes positifs pour montrer les convergences. Puis, par le changement de variable $x = tu$

$$\frac{\rho_n(t)}{t^n} = t\int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(tu)du \quad \text{et} \quad \frac{\rho_n(t')}{t'^n} = t'\int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(t'u)du$$

  donc puisque $t < t'$ et $f^{(n+1)}$ est croissante — $f^{(n+2)} \geqslant 0$ par hypothèse — on a l'inégalité cherchée d'où $\rho_n(t) \leqslant \left(\frac{t}{t'}\right)^n \rho_n(t') \to 0$.
- On vient de le montrer sur $]0, b[$, c'est trivial en 0 et on a le résultat sur $]-b, 0[$ en montrant l'inégalité $\rho_n(-t) \leqslant \rho_n(t)$ pour $t > 0$.
- Sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, on montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\tan^{(n)}$ est un polynôme en tan à coefficients positifs et on utilise le résultat précédent. Pour élargir le résultat à $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, on utilise le caractère impair de tan en montrant que ses dérivées d'ordre pair sont impaires et vice versa.

Solution 3.1.2 (L. Grimaldi) Note : 13

Commentaires : L'examinateur n'était pas franchement sympa, il s'était acharné gratuitement sur Camille le matin même. Je suis le premier de l'après-midi à passer alors il me file le premier exercice et s'en va mais turch en 5 minutes avec les méthodes d'étude d'un suite récurrente (équivalent notamment). Là je l'attend un quart d'heure le nez en l"air n'osant pas quitter la salle, plutôt énervant. J'en profite pour quand même pour écrire la solution au tableau et gagner du temps sur le passage. Après ça je fougère complètement sur le deuxième, je n'ai pas vu tout de suite à quoi servait l'application linéaire (en fait on veut la surjectivité) et après la première question très pénible qu'il ne m'a pas laissé finir (ouf) et la deuxième débile, je m'énerve et panique un peu jusqu'à marquer $f(x+y) = f(x) + f(y)$ en guise de définition d'une application linéaire (youpi). Dans un si bel élan, je commence le troisième en affirmant d'emblée "ça ne converge pas le terme ne tend pas vers 0" alors que j'avais déjà vanné sur l'exo dans les planches 2006. Enfin les 4 et 5 étaient déjà tombés. Finalement : 13, j'ai pas compris là...

(1) Comme $\ln(1+x) \leqslant x$, on en déduit que la suite (a_n) décroît. Comme $a_n \geqslant 0$, cette suite converge et sa limite ne peut être que 0.

Ensuite $a_{n+1} = a_n - \dfrac{a_n^2}{2} + o(a_n^2)$ d'où

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{2} + o(1)$$

et, avec Césaro, $\dfrac{1}{a_n} \sim \dfrac{n}{2}$ i.e. $a_n \sim \dfrac{2}{n}$ donc $R = 1$.

(2) Cf. cours.

(3) $\pi\sqrt{n^2+1} = \pi n \left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^{1/2} = \pi n + \dfrac{\pi}{2n} + O(\frac{1}{n^3})$ d'où

$$\sin(\pi\sqrt{n^2+1}) = (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = \underbrace{\frac{(-1)^n\pi}{2n}}_{\text{converge}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc $\sum u_n$ converge.

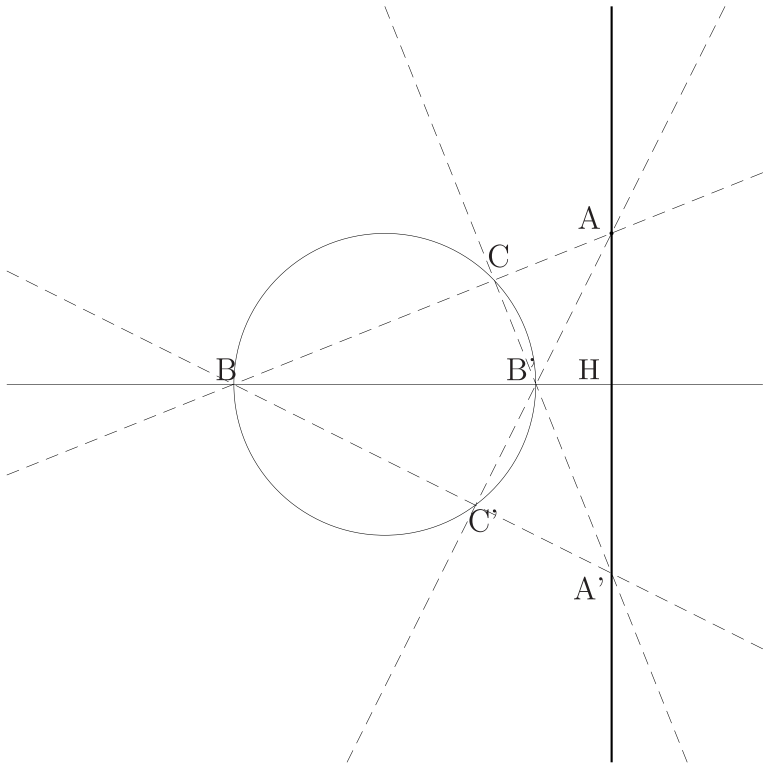
(4) On a $A^{\mathrm{T}} = -A = A^{-1}$ ce qui donne $A^2 = -I$ puis $A^n = (-1)^p I$ si $n = 2p$ et $A^n = (-1)^p A$ si $n = 2p+1$. Enfin

$$\mathrm{e}^A = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p)!} I + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} A = \cos 1 I + \sin 1 A.$$

(5) Soit B et B' les points d'intersection de D avec le cercle C. Avec la règle, on ne peut construire que les droites AB et AB'. Puis, si on désigne par C et C' les points d'intersection des droites AB et AB' avec C, il semble naturel (?) de s'intéresser au point d'intersection des droites BC' et $B'C$ et là, bingo, c'est gagné comme le montre le petit calcul suivant, on prend pour C le cercle de centre l'origine et de rayon 1 et pour A, le point de coordonnées (a, b) (on suppose $b \neq 0$) :

- Équation de $B'C$: $(x-1).(a+1) + y.b = 0$ (droite passant par B', orthogonale à $\overrightarrow{AB}$),
- Équation de BC' : $(x+1).(a-1) + y.b = 0$ (droite passant par B, orthogonale à $\overrightarrow{AB}$).

ces deux droites se coupent au point A' de coordonnées $x = a$, $y = \dfrac{1-a^2}{b}$ comme le montre l'illustration suivante :



Remarque : cf. 3.1.3...

Solution 3.1.3 (B. Charron) Note : 16

Examinateur : sympa, il a passé presque toute l'heure debout à côté du tableau. J'ai eu 10 minutes de préparation sur le (1), même pas le temps de finir les calculs. Il m'a donné le (3) pour son plaisir personnel et a fini la planche sur un "Alors c'est joli, hein ?". A part sur le (3), quasiment tout se faisait directement sans réfléchir (calculs de sommes très classiques).

(1) On pose

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+1}}{4n+1}.$$

Alors $R(f) = 1$ donc sur $]-1,1[$:

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{4n} = \frac{1}{1+x^4}.$$

On a une D.S.E. du type :

$$\frac{1}{1+X^4} = \frac{aX+b}{X^2-\sqrt{2}X+1} + \frac{cX+d}{X^2+\sqrt{2}X+1}.$$

Grâce à la parité on a : $a = -c$ et $b = d$.
En $X = 0$, on a $b + d = 1$ d'où $b = d = 1/2$.
En $X = \sqrt{2}$ on a $1 = (a\sqrt{2} + 1/2) + (-a\sqrt{2} + 1/2)$ d'où $a = -1/2\sqrt{2} = -c$.
On fait alors apparaître des dérivées de ln et de Arctan et comme on est pas à Centrale, l'examinateur ne demande pas de finir les calculs.

(2) a) Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A^{-1} = AA^T \in S_n(\mathbb{R})$ d'où A^{-1} (et donc A) diagonalisable. Or $A^3 = I_n$ donc toutes les valeurs propres de A vérifient $\lambda^3 = 1$, qui n'a qu'une solution réelle : 1. Ainsi $A = I_n$.
Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, de même, on montre que A est du type PDP^T avec $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, .., \lambda_n)$ avec $\lambda_i \in \{1, j, j^2\}$. Mais le taupin attentif aura remarqué que c'est une grosse vanne. J'ai fait ça pendant la planche et le gars a acquiescé normalement et on est passé à la suite. C'est la Grim qui me l'a fait remarquer mais depuis, j'ai pas trouvé de solution.

b) A est symétrique donc $A^3 = I_n$ d'où : $\exp(A) = S_0 I_n + S_1 A + S_2 A^2$. Avec $S_i = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(3k+i)!}$. Reste à calculer les S_i. On a :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ e^j \\ e^{j^2} \end{pmatrix}.$$

En écrivant cette relation en ligne, en multipliant certaines lignes par j ou j^2 et en utilisant $1 + j + j^2$, on trouve :

$$\begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j^2 & j \\ 1 & j & j^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ e^j \\ e^{j^2} \end{pmatrix}$$

(3) Un exo niveau collège mais qui peut surprendre. En fait, on relie tous les points qu'on a avec la super règle, on prend du recul et on voit qu'on a fait apparaître l'orthocentre d'un triangle et donc qu'on a bien un angle droit là où on voulait.

Solution 3.1.4 (C. Birman) Note : 13
Mines, équipe 8.
Commentaires : pour le (1), il y avait des calculs pénibles et un examinateur encore plus pénible qui m'a demandé de refaire les calculs parce qu'il y avait une erreur et quand j'ai retrouvé le même résultat (juste!), il m'a dit c'est bon, effacez... il faut dire que c'était à 8h...

(1) ?

(2) On suppose $x > 0$ et on pose $g(x,t) = \mathrm{e}^{-xt}\dfrac{\sin t}{t}$. $|g(x,t)| \leqslant \mathrm{e}^{-xt}$ est intégrable.
$\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -\mathrm{e}^{-xt}\sin t$. On applique le théorème de Lebesgue de dérivation sous le signe intégral pour $x \geqslant a > 0$ donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\sin t\,\mathrm{d}t \\ &= -\operatorname{Im}\left(\left[\frac{-1}{x=i}\,\mathrm{e}^{-(x+i)t}\right]_0^{+\infty}\right) = \frac{-1}{x^2+1}. \end{aligned}$$

On a ainsi $f(x) = -\operatorname{Arctan} x + C$. $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x,t) = 0$ et, pour $x \geqslant 1$, $|g(x,t)| \leqslant \mathrm{e}^{-t}$ donc, par le théorème de convergence dominée, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ i.e. $C = \dfrac{\pi}{2}$.
Conclusion : $f(x) = -\operatorname{Arctan} x + \dfrac{\pi}{2} = \operatorname{Arctan}\frac{1}{x}$ (on peut aussi prouver que f est continue en 0 et que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$).

(3) Cf. 3.1.2.

Solution 3.1.5 (F. Pujol) Note : 11
Examinateur : pas vraiment attentif à ce que je faisais, quand je proposais quelque chose il ne disait rien. Et en plus il a eu le culot de me poser de la géométrie...

(1) (10 minutes de préparation)
 a) On raisonne par récurrence double sur n. On a dans un premier temps $P_0 = 1$ et $P_1 = X$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on suppose que l'existence de P_n et P_{n-1}.
 $\forall x \in \mathbb{R}\ \cos((n+1)x) + \cos((n-1)x) = 2\cos(nx)\cos(x)$.
 D'où $\cos((n+1)x) = 2P_n(\cos x)\cos x - P_{n-1}(\cos x)$, ce qui montre l'existence de $P_{n+1} = 2XP_n - P_{n-1}$.
 b) La formule de récurrence précedente donne immédiatement
 $\deg P_n = n$ et $cdP_n = 2^{n-1}$.
 c) $P_{n+1} = 2XP_n - P_{n-1}$.
 d) $\forall x \in [-1,1]\ \exists t \in \mathbb{R}\ x = \cos t$ donc $P_n(x) = \cos nt \leqslant 1$.
 De plus $P_n(1) = \cos 0 = 1$, donc $\|P_n\| = 1$.
 Pour $i \in \{0,1,...,n\}$ on pose $x_i = \cos(\frac{i\pi}{n})$. $P_n(x_i) = (-1)^i$.
 Soit $P \in E_n$, supposons que $\|P\| < 1$,
 $P_n(x_i) - P(x_i) > 0$ si i est pair et $P_n(x_i) - P(x_i) < 0$ si i est impair. Donc $P_n - P$ s'annule au moins une fois sur chaque intervalle $]x_{i+1}, x_i[$ et donc ce polynôme admet au moins n racines alors qu'il est de degré inférieur ou égal à $n-1$. On obtient ainsi une contradiction.

(2) a) On cherche à résoudre $\forall\lambda \in \mathbb{R}\ x^2 + 2\lambda xy + y^2 + 2x + 2y = 0$.
 On a alors $xy = 0$. Supposons $x = 0$, il vient $y^2 + 2y = 0$, d'où $y = 0$ ou $y = -2$.
 Ainsi les points fixes sont $(0,0), (0,-2)$ et $(-2,0)$.
 b) On pose $X = \frac{x+y}{\sqrt{2}}$ et $Y = \frac{x-y}{\sqrt{2}}$.
 L'équation de C_λ s'écrit alors $(1+\lambda)X^2 + (1-\lambda)Y^2 + 2\sqrt{2}X = 0$.
 Si $\lambda \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ alors C_λ est une hyperbole, si $\lambda \in]-1,1[$ c'est une ellipse ($\lambda = 0$ donne un cercle), et pour $\lambda = \pm 1$ on a une parabole.
 c) Le centre de la conique correspond au point $X = 1+\lambda$, $Y = 1-\lambda$ soit $x = \sqrt{2}$, $y = \sqrt{2}\lambda$

(3) $x^{5/4}\frac{(\ln x)^2}{x^{3/2}} \to 0$ lorsque $x \to +\infty$ donc l'intégrale converge.

Solution 3.1.6 (C. Robin) Note : 15

Examinateur : groupe huit, série quatre, beaucoup l'ont eu cette année. Ne parle pas beaucoup, donne un temps correct de préparation (environ 15 minutes a vu d'oeil, je n'avais pas les yeux rivé sur la montre). Reste sympathique malgré tout. Il faut l'appeler pendant la préparation quand on a finit l'exo pour qu'il nous en donne un autre. Rajoute pas mal de question dans les exos, demande de citer quelques théorèmes en entier (et de donner les noms quand il y en a (ex : Cayley Hamilton), mais rien de bien méchant).

(1) (Pendant la préparation, j'ai un peu fougéré au début : c'est dur de se lancer dans la bataille a huit heures du matin, même après une bonne douche froide). On dérive, on décompose en fractions élémentaires (c'est trivial), on DSE et on re-intègre parce qu'on a le bon type de convergence pour $|x| < 2$. On obtient la constante d'intégration ($\ln 6$) en prenant la valeur en $x = 0$.
Remarque : il y a quand même plus simple :
$$\begin{aligned}\ln(x^2 - 5x + 6) &= \ln 6 + \ln(1 - \frac{x}{2}) + \ln(1 - \frac{x}{3})\\ &= \ln 6 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k + 3^k}{6^k}\frac{x^k}{k} \qquad |x| < 2.\end{aligned}$$

(2) (Toujours pendant la préparation, mais j'ai pas eu le temps de finir le (b). Il a voulu que je refasse rapidement les calculs). Là on se souvient du cours de sup, et on utilise, on use et on abuse des fonctions symétriques élémentaires. En fait c'est simple, il n'y a que ça à utiliser. Il faut juste faire mumuse avec. En gros on a les relations :
i) $a+b+c = 0$, $ab+bc+ac = p$, $abc = -q$ et on introduit A, B, C tels que $A = a^2+b^2+c^2$, $B = a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2$, et $C = a^2b^2c^2$. On a $C = q^2$, $A = 0^2 - 2p$ et $B =$ (calcul). Ainsi on a a^2, b^2, c^2 racines de $x^3 - A * x^2 + B * x - C = 0$.
ii) On introduit D, E, F tels que $D = 1/a^2 + 1/b^2 + 1/c^2$, $E = 1/(a^2b^2) + 1/(b^2c^2) + 1/(a^2c^2)$, et $F = 1/(a^2b^2c^2)$. Ensuite on écrit $a^2b^2c^2 \times D$, $a^2b^2c^2 \times E$ et $a^2b^2c^2 \times F$ puis on ouvre les yeux.

(3) (Sans préparation) alors on commence, on dit que la matrice est symétrique RÉELLE donc diagonalisable. On ne fait pas comme moi à oublier le réel, parce que sinon on a la question subsidiaire :
"citer le théorème exact" (là j'oublie encore le "réelle"). "Bien : que pensez vous de $A = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}$?"
Elle est symétrique complexe, de rang 1 et de trace nulle : si elle est diagonalisable, c'est la matrice nulle... (c'est un contre exemple a retenir, et puis il est amusant). Du coup on continue : la matrice A est diagonalisable, de rang donc on a zéro vap d'ordre $n-2$ et a et b ses deux vap. a et b vérifient : $a + b = \mathrm{Tr}(A)$ et comme ça ne suffit pas, on calcule A^2 et on a $a^2 + b^2 = \mathrm{Tr}(A^2)$, ce qui donne a et b fonction de n (a et b sont racines de $x^2 - sx + p$ avec $p = ab$ et $s = a + b$). Après on nous demande un polynôme annulateur ($P(x) = X(X - a)(X - b)$) et on nous demande un moyen simple de calculer A^p sans utiliser la diagonalisation (donc sans faire intervenir d'autres matrice que la matrice A). En fait on fait la division de X^p par $P(X)$ et on n'a que le reste a calculer (qui en plus n'est pas très compliqué puisqu'on a A, I et A^2 seulement qui interviennent). A noter qu'il n'a pas voulu d'écriture explicite mais simplement théorique ($X^p = P(x)Q(x) + R(x)$ et $A^p = R(A)$... ça évite de griller un neurone au passage).
En fait on trouve que 0 est vap d'ordre $n-2$ et $1 \pm \sqrt{2n-3}$ vap d'ordre 1.

(4) À quelques minutes de la fin : je ne l'ai pas fait, mais pour simplifier on peut dire $x \leqslant y \leqslant z$. Ensuite, je n'ai fait pas le calcul : on factorise $\exp(ix)$ et on a $1+\exp(i(y-x)) + exp(i(z-x)) = 0$. Puis j'ai pris la partie réelle et imaginaire. Là on se souvient de Gadat père en prof de maths pendant l'année de première : on aime la trigo, on fait mumuse, et on trouve le résultat. Il m'a arrêté peu avant la fin en me disant que mon calcul était juste mais : "que se passe-t-il si l'on interprète la relation géométriquement ?" Donc là on prend des beaux feutres de couleurs, on fait un zouli dessin et on dit, avec A, B, C les points d'affixes $\exp(ix)$, $\exp(iy)$ et $\exp(iz)$ respectivement. On remarque que la relation devient $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}$ i.e. O est centre de gravité du triangle, c'est à dire l'intersection des médianes. Puis comme O est aussi le centre du cercle circonscrit, c'est l'intersection des médiatrices, donc ABC est equilatéral. Voili voilou, Par le calcul on trouve des relations du type $k * 2pi/3$ entre x, y et z, ce qui revient au même.

Solution 3.1.7 (S. Hurand) Note : 14
Examinateur : ?

(1) Il y a au moins 3 méthodes :
(i) (la mienne) : on écrit $A = P\,\mathrm{Diag}(\mathrm{e}^{i\theta}, \mathrm{e}^{-i\theta})P^{-1}$, où P est une matrice de passage complexe avec des 1 et des i, que l'on peut trouver dans le Jimmy à la fin du cours sur la réduction des endomorphismes d'où $\exp(A) = P\,\mathrm{Diag}(\exp(\mathrm{e}^{i\theta}), \exp(\mathrm{e}^{-i\theta}))P^{-1}$. Or $\mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ d'où $\exp(\mathrm{e}^{i\theta}) = \exp(\cos\theta)\exp(i\sin\theta)$.

$$\begin{aligned}\exp(A) &= \exp(\cos\theta)P\,\mathrm{Diag}(\exp(i\sin\theta), \exp(-i\sin\theta))P^{-1}\\ &= \exp(\cos\theta)\begin{pmatrix}\cos(\sin\theta) & -\sin(\sin\theta)\\ \sin(\sin\theta) & \cos(\sin\theta)\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

donc $\exp(A)$ est une matrice de similitude (composée d'une rotation et d'une homothétie) de rapport $\exp(\cos\theta)$ et d'angle $\sin\theta$.
Grâce à cette astuce tirée du Jimmy, j'ai torchée cet exo en 10 min pendant la préparation, et il l'a acceptée bien que je ne précise pas quelle était la matrice P. Comme ça j'ai pu me dépêcher d'aller sécher sur le 2e exo...
(ii) (Celle de Léo) : on calcule les puissances de A, en remarquant subtilement que la composée de n rotations d'angle θ est une rotation d'angle $n\theta$ (ce petit raisonnement géométrique évite un fastidieux calcul à l'aide des formules de trigo...), soit : $A = \begin{pmatrix}\cos(n\theta) & -\sin(n\theta)\\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta)\end{pmatrix}$ et on utilise la définition de l'exponentielle comme somme d'une série pour retrouver le résultat.
(iii) (Celle de Roland, de loin la plus élégante... mais on n'est pas admis à Ulm pour rien!!!) : on utilise l'isomorphisme canonique f entre le corps des complexes et l'anneau des matrices de similitudes, soit $A = f(\exp(i\theta))$, d'où $\exp(A) = \exp(f(\exp(i\theta)))$ car f est un morphisme d'anneaux (il faudrait justifier le passage à la somme infinie je pense...) d'où le résultat en exprimant que $\exp(i\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$.

(2) On commence par dire que la série vérifie le TSA.
On peut avoir l'idée d'introduire les autres sommes $\left(\sum \dfrac{(-1)^{n+1}}{3n+1}, \sum \dfrac{(-1)^{n+2}}{3n+1}\right)$ selon l'idée de Léo, mais je n'ai pas approfondi cette idée...
Sinon on exprime que $\dfrac{1}{3n+1} = \displaystyle\int_0^1 x^{3n}\,\mathrm{d}x$, on prend la somme partielle (on ne peut pas y aller directement car on n'a aucune propriétés sur la convergence (normale, etc...). A

retenir donc : si aucun des grands théorèmes sur les séries ne s'appliquent à la série étudiée, repasser aux sommes partielles), on intervertit somme (ici finie) et intégrale, on a la somme d'une série géométrique, on sépare partie qui dépend de N (indice jusqu'auquel on somme), qui tend vers 0 grâce à TCD bien senti, et partie qui n'en dépend pas, soit $\displaystyle\int_0^1 1/(x^3+x)\,\mathrm{d}x$ que l'on calcule en décomposant en éléments simples sur $\mathbb{R}$ (cf manuscrit pour les calculs)... comme vous voyez, que du bonheur! Je n'ai pas le résultat car malheureusement l'examinateur m'a mis à la porte comme un malpropre alors que j'étais en train de m'embourber dans la décomposition en éléments simples. Cela m'a un peu irrité car en théorie il me restait encore 1/4 d'heure de colle, et j'aurais pu faire un 3e exo... je crois que j'aurais mieux fait de protester et de réclamer mon 3e exo plutôt que de partir sans rien dire!

Solution 3.1.8 (C. Pellizzari) Note : 8
Examinateur : ?

(1) a) Si A est semblable à D matrice diagonalisable alors il suffit de trouver un polynôme P tel que $P(\exp(D)) = D$. Si $(\lambda_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ désigne les valeurs propres de D, ceci est encore équivalent à $P(\mathrm{e}^{\lambda_i} = \lambda_i$ pour $i \in [\![1, p]\!]$.
Soit $L_i = \displaystyle\prod_{j=1}^{p} \frac{X-\lambda_j}{\lambda_i-\lambda_j}$ alors $P = \sum\limits_{i=1}^{p} \mathrm{e}^{\lambda_i} L_i$ convient.
b) Si $\exp(A) = \exp(B)$ alors A et B ont même valeurs propres (grâce à l'injectivité de l'exponentielle) donc le polynôme P du a est le même pour A et B donc $A = P(\exp(A)) = P(\exp(B)) = B$.

(2) Cf. exo 2.3 Oral X 2001 On montre que $\phi^n \xrightarrow[]0,1[]{C.U.K.} \dfrac{1}{2}$:
soit K un compact de $]0, 1[$ alors il existe $a \in]0, 1/2[$ tel que $K \subset [a, 1-a]$. ϕ présente une symétrie par rapport à $x = 1/2$ donc on ne s'intéresse qu'à $x \in [a, 1/2]$. Comme ϕ^n est croissante, $\forall x \in [a, 1/2]$, $\forall n \geqslant 1$, $\phi^n(x) \in [\phi^n(a), 1/2]$. Ensuite, vu que $\phi(x) \geqslant x$ sur $[0, 1/2]$ alors $(\phi^n(a))$ est une suite croissante majorée par 1/2 donc elle converge vers une limite l. l vérifie $l = \phi(l)$ et $l > 0$ donc $l = 1/2$.
Conclusion : $|\phi^n(x) - 1/2| \leqslant |\phi^n(a) - 1/2| \to 0$ donc $\phi^n \xrightarrow[]0,1[]{C.U.K.} \dfrac{1}{2}$.

Solution 3.1.9 (Y. Yang) Note : 18
Examinateur : cool, genre Genzmer, donne quelques indications quand il voit que le candidat n'en est pas très loin.

(1) a est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ car le polynôme $X^p - 1$ est scindé à racines simples. Soient $\mathrm{e}^{i\frac{2n\pi}{p}}$, $n \in I \subset [\![0, p-1]\!]$ les valeurs propres de a et ω_n leurs ordres de multiplicité respectifs.
$\mathrm{Tr}(a^k) = \sum\limits_{n\in I} \omega_n \,\mathrm{e}^{i\frac{2nk\pi}{p}}$ d'où

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{p-1}\mathrm{Tr}(a^k) &= \sum_{k=0}^{p-1}\left(\sum_{n\in I}\omega_n\,\mathrm{e}^{i\frac{2nk\pi}{p}}\right)\\ &= \sum_{n\in I}\omega_n\underbrace{\left(\sum_{k=0}^{p-1}\mathrm{e}^{i\frac{2nk\pi}{p}}\right)}_{=p\delta_{n,0}}\\ &= p\omega_0.\end{aligned}$$

On a donc $\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}\mathrm{Tr}(a^k) = \omega_0$ ordre de multiplicité de 1. Comme a est diagonalisable alors $\dim\mathrm{Ker}(a-\mathrm{Id}) = \dim E_a(1) = \omega_0$.

(2) Cf. 3.1.1 (2)

(3) On suppose que E est muni de la norme 1. $A \subset \mathcal{I} = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$.
- $\mathcal{I}$ est dense dans E : il suffit en effet de prendre la suite (f_n) définie par $f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \geqslant 1/n \\ nxf(1/n) & \text{si } x \leqslant 1/n\end{cases}$.
- Si A n'est pas fermé alors il existe une suite $(f_n) \in A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $f \notin A$.

Solution 3.1.10 (Y. Guihard) Note : 10

Examinateur : parlait peu, donnait peu d'indications, mais n'était pas méchant.

(1) Il suffit de ramener A à J_r par des opérations élémentaires sur les lignes et colonnes. J'ai donné lesdites opérations, mais le type m'a demandé P et Q explicitement (l'exo inutile et calculatoire type). J'ai eu du mal à retrouver les matrices par lesquelles il fallait multiplier pour avoir des combinaisons linéaires, mais après ça allait, il m'a fait grâce des calculs finaux.

(2) Exo classique, mais je n'ai pas brillé. Bon, je n'ai pas vanné, mais je n'ai pas été efficace, j'ai passé trop de temps sur des trucs évidents.

a) On écrit la formule de Taylor reste intégral, on remarque que le reste est positif, donc la somme partielle est majorée par $f(t)$ et à termes positifs, d'où la convergence. L'inégalité se montre immédiatement en revenant à la formule de définition de ρ. Elle donne $\rho_n(t) \leqslant (t/t')^n\rho_n(t')$ et le terme de droite tend vers 0 car $\rho_n(t')$ bornée car convergente. D'ou le résultat.

b) On a donc f D.S.E. sur $[0, b[$. Pour t négatif, j'ai essayé d'adapter la preuve sans succès. L'examinateur m'a dit que ce n'était pas la bonne méthode, mais ne m'a pas donné la solution.

c) Il suffit de montrer que les dérivées successives de tan sont positives sur $[0, \pi/2[$ pour appliquer le résultat précédent, et conclure par imparité. On montre par récurrence que la dérivée n-ième de tan est un polynôme de degré n en tan à coefficients positifs, ce qui conclut.

Solution 3.1.11 (P.A. Virepinte) Note : 11

Examinateur : ?

(1) On utilise le théorème de dérivation sous le signe intégral :

Soit $g(x,t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $t \in [0,1]$. g est paire par rapport à x donc on ne s'intéresse qu'au cas $x \in \mathbb{R}_+$.

- $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -2x\,\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}$ qui est continue par rapport à x et t.
- Soit $I=[0,a]$ alors, pour $x \in I$, $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant 2a$ qui est bien entendu intégrable sur $[0,1]$.

Le théorème s'applique bien, f est dérivable sur tout intervalle $[0,a]$ donc sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2x \int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = -2x\,\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^1 \mathrm{e}^{-(xt)^2}\,\mathrm{d}t \\ &= -2\,\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u \quad \text{en posant } u = xt \\ &= -2G'(x)G(x) \quad \text{avec } G(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

f' est intégrable sur $[0,+\infty[$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f'(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to+\infty} f(x) - f(0) = -\frac{\pi}{4}$ d'où

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f'(x)\,\mathrm{d}x &- \lim_{x\to+\infty} G(x)^2 \\ &= -\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u\right)^2, \end{aligned}$$

d'où, en prenant les racines carrées $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

(2) Le sens direct est immédiat : si B est une matrice nilpotente alors $\mathrm{Sp}(B) = \{0\}$ donc $\mathrm{Tr}(B) = 0$. On applique alors ce résultat aux matrices $A, A^2, \dots, A^n$.
Pour la réciproque, on distingue deux cas :
- Si $\mathrm{Card}\,\mathrm{Sp}(A) = 1$, A n'a qu'une seule valeur propre λ alors $\mathrm{Tr}(A) = n\lambda = 0$ donc $\lambda = 0$ et A est nilpotente (utiliser par exemple Cayley-Hamilton).
- Si $\mathrm{Card}\,\mathrm{Sp}(A) \geqslant 2$, soient λ_i les vap non nulles de A et ω_i leur ordre de multiplicité, $i \in [\![1,p]\!]$. On a ainsi $\sum_{i=1}^{p} \omega_i\lambda_i^k = 0$ soit $\begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_p \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^p & \dots & \lambda_p^p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_p \end{pmatrix} = 0$ (on n'a pris que les p premières équations). La matrice des λ_i^k est inversible (Vandermonde) donc on en déduit que $\omega_1 = \dots = \omega_p = 0$ ce qui est impossible.

Solution 3.1.12 (F. Escriva) Note : 17
Examinateur : ?

(1) On peut le prendre par une récurrence bête et pas méchante ou chercher l'astuce...
On utilise le lemme suivant :
Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et si f' admet d zéros alors f admet au plus $d+1$ zéros.
Dém : on utilise Rolle à l'envers. Si f admet $d+2$ au moins zéros alors, par le théorème de Rolle, f' admet au moins $d+1$ zéros ce qui est contradictoire ■
On procède alors par récurrence, on montre que $N_n \leqslant N_{n-1} + d_n + 1$. On range les a_i dans l'ordre décroissant, $a_n < a_{n-1} < \ldots < a_0$ et on met $\mathrm{e}^{a_n x}$ en facteur :

$$f_n(x) = \mathrm{e}^{a_n x}\sum_{i=0}^{n} P_k(x)\,\mathrm{e}^{a'_k x} = \mathrm{e}^{a_n x}\,g_n(x)$$

en posant $a'_k = a_k - a_n > 0$. $g'_n(x) = \sum\limits_{i=0}^{n}(P'_k(x) + a'_k P_k(x))\,\mathrm{e}^{a'_k x} = \sum\limits_{i=0}^{n} P_{k,1}(x)\,\mathrm{e}^{a'_k x}$ où $P_{k,1}$ est un polynôme de même degré que P_k sauf pour $k = n$ où $\deg P_{n,1} \leqslant \deg P_n - 1$.

On aura alors $g^{(d_n+1)}(x) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} P_{k,d_n+1}(x)\,\mathrm{e}^{a'_k x}$ qui admet au maximum N_{n-1} zéros d'où $N_n \leqslant N_{n-1} + d_n + 1$.

On peut alors conclure que $N_n \leqslant N_0 + \sum\limits_{i=1}^{n} d_i + n = \sum\limits_{i=0}^{n} d_i + n$.

(2) De fortes analogies avec les polynômes de Tchebychev, idem bête et pas méchant.
  a) C'est le processus d'orthonormalisation de Schmidt.
  b) On utilise les formules de trigo...

$$\sin(n+1)x = \sin x \cos nx + \sin nx \cos x \Rightarrow Q_n(\cos x) = \underbrace{\cos nx}_{=T_n(\cos x)} + Q_{n-1}(\cos x).\cos x$$

où T_n est le polynôme de Tchebychev.
Grâce à la formule $2\cos x \cos nx = \cos(n+1)x + \cos(n-1)x$ on a

$$\begin{aligned} 2XT_n &= T_{n+1} + T_{n-1} \\ T_n &= Q_n - XQ_{n-1} \end{aligned}$$

d'où $2X(Q_n - XQ_{n-1}) = Q_{n+1} - XQ_n + Q_{n-1} - XQ_{n-2}$ ce qui donne

$$Q_{n+1} = 3XQ_n - (1 + 2X^2)Q_{n-1} + XQ_{n-2}.$$

Un calcul direct donne $Q_0 = 1$, $Q_1 = 2X$, $Q_2 = 4X^2 - 1$ d'où, par une récurrence immédiate, Q_n est un polynôme (de degré n). L'unicité vient du fait qu'un polynôme est déterminé de manière unique par les valeurs qu'il prend sur $[0, 1]$.
Remarque : les polynômes Q_n forment une famille orthogonale pour le produit scalaire que l'on a défini, ils sont donc proportionnels aux P_n. On vérifie immédiatement que $Q_n = 2^n P_n$.

  c) La c) se fait PAR L'ABSURDE.
Classique : on pose $R_n = \prod\limits_{i=1}^{k}(X - \alpha_k)$ où les α_k sont les racines d'ordre impair de P_n appartenant à $]-1, 1[$. $R_n(x)P_n(x)$ garde un signe constant sur $[-1, 1]$. Si $\deg R_n < \deg P_n$ alors $(R_n|P_n) = 0$ et comme R_nP_n est une fonction continue de signe constant, $R_nP_n = 0$ ce qui est effectivement absurde.
Conclusion : $R_n = P_n$ donc P_n a toutes ses racines simples dans $]-1, 1[$.

Solution 3.1.13 (J. Courtiel) Note : 13
Examinateur : ?

(1) $\dim E = 4$ donc $\dim E^* = 4$, pour montrer que la famille (g_1, g_2, g_3, g_4) est libre, il suffit de montrer que l'orthogonal de $\mathrm{Vect}(g_i)$ est $\{0\}$:
Si $g_1(P) = g_2(P) = g_3(P) = g_4(P) = 0$ alors a et $-a$ sont racines doubles de P donc $P = (X^2 - a^2)Q$ et $\deg P \leqslant 3$ donc $P = 0$ c.q.f.d.
Pour en chercher la base antéduale, il suffit de faire les calculs :

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{1}{12a^3}(X-a)^2(X+2a), \quad P_2 = \frac{1}{4a^2}(X-a)^2(X+a) \\ P_3 &= \frac{-1}{12a^3}(X+a)^2(X-2a), \quad P_4 = \frac{1}{4a^2}(X+a)^2(X-a). \end{aligned}$$

Ensuite, comme $\varphi\ : P \mapsto \displaystyle\int_{-1}^{1} tP(t)\,\mathrm{d}t$ est une forme linéaire alors l'écriture proposée n'est autre que la décomposition de cette forme dans la base des (g_i) et $a_i = \varphi(P_i)$ ce qui donne après calculs,

$$a_1 = a_3 = \frac{1}{6a^3}\left(\frac{1}{5} - a^2\right) \text{ et } a_2 = a_4 = \frac{3-5a^2}{30}.$$

$a = \sqrt{\dfrac{3}{5}}$ est un choix intéressant car il donne une valeur approchée de $\displaystyle\int_{-1}^{1} tf(t)\,\mathrm{d}t$ pour toute fonction de classe $\mathcal{C}^4$.

(2) On pose $d_0 = 1$ par convention et on a $d_1 = 0$. Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note $D_\sigma = \{i \in [\![1,n]\!] \mid \sigma_i \neq i\}$. On note $A_k = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \operatorname{Card} D_\sigma = k\}$, $\operatorname{Card} A_k = \dbinom{n}{k} d_k$ (on a $\dbinom{n}{k}$ choix possibles pour chaque D_σ). Comme les A_k réalisent une partition de $\mathfrak{S}_n$ on obtient bien

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k.$$

On inverse alors le système d'où

$$d_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k!.$$

On peut aussi utiliser la série $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{d_n}{n!} x^n$, $d_n \leqslant n!$ donc le rayon de convergence de cette série est $\geqslant 1$. Si on fait le produit de Cauchy de cette série par la série exponentielle, on arrive à

$$\begin{aligned} S(x)\,\mathrm{e}^x &= \sum_{=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^n \times \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{d_k}{k!} \frac{1}{(n-k)!} \right) x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k \right) x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \end{aligned}$$

d'où $S(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1-x}$ et, en faisant le produit de Cauchy, on retrouve l'expression de d_n citée ci-dessus.

Solution 3.1.14 (M. Chammas) Note : ?
Examinateur : m'a laissé parler au début pour voir ce que j'avais fait pendant la préparation puis il m'a donné des indications. Correct.

(1) J'ai juste su dire que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas un espace vectoriel (sans blague !) et qu'on pouvait trouver $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $H \oplus \operatorname{Vect}(A) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
En fait, on raisonne par l'absurde, on suppose qu'il existe H hyperplan tel que $H \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et on prend A telle que $H \oplus \operatorname{Vect}(A) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $A(\lambda) = A - \lambda I_n$, $P(\lambda)$ est un polynôme de degré n ayant au plus n racines donc il existe λ tel que $A(\lambda) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Or $I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \subset H$ donc $A - \lambda I_n \notin H$ ce qui est contradictoire.

(2) Par l'absurde : soit H un hyperplan tel que $H \setminus \{0\} \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Soient A et B dans H non proportionnelles (c'est possible dès que $n \geqslant 2$). $C(\lambda) = A(1-\lambda) + B\lambda \in H \setminus \{0\}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ (c'est la droite passant par A et B. On a donc $\det(C(\lambda)) \neq 0$ soit, pour $\lambda \neq 1$,

$$\det(C(\lambda)) = (1-\lambda)^n \det B \det\left(AB^{-1} + \frac{\lambda}{1-\lambda} I_n\right) \neq 0$$

ou encore $\det\left(AB^{-1} + \dfrac{\lambda}{1-\lambda} I_n\right) \neq 0$. B fixé, l'ensemble $H' = \{AB^{-1},\ A \in H\}$ est aussi un hyperplan tel que $H' \setminus \{0\} \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, on se ramène donc à la propriété suivante : toute matrice A de H' non scalaire vérifie $\det(A + \mu I_n) \neq 0$ avec $\mu = \dfrac{\lambda}{1-\lambda}$. μ décrit $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ donc, toute matrice A de H' non scalaire vérifie $\mathrm{Sp}(A) \subset \{1\}$.
Et là, on doit avoir une contradiction...

(3) On peut trouver A telle que $H \oplus \mathrm{Vect}(A) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec A orthogonale à H pour le produit scalaire $(A|B) = \mathrm{Tr}(A^{\mathrm{T}}B)$. Donc $H = A^{\perp}$. Soit $r = \mathrm{Rg}(A)$ alors on sait que A est équivalente à J_r soit $A^{\mathrm{T}} = PJ_rQ$, P et Q étant inversibles. Si on pose $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ 1 & 0 & & 0 \end{pmatrix}$ matrice de permutation et $M = Q^{-1}BP^{-1}$ alors $\mathrm{Tr}(A^{\mathrm{T}}M) = 0$ donc $M \in H$ et M est inversible.

Solution 3.1.15 (K. Boubaker) Note : 11
Examinateur : ?

(1) a) On pose $x = \cos t$ d'où $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} t \,\mathrm{d}t$. On reconnaît une intégrale de Wallis, $I_n = \dfrac{2n}{2n+1} I_{n-1}$ soit $I_n = \dfrac{(2^n n!}{(2n+1)!}$.

b) On a $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} u \,\mathrm{d}u$ en posant $t = \sqrt{n}\sin u$.

c) Soit $f_n(t) = \left(1 - \dfrac{t^2}{n}\right)^n 1_{[0,\sqrt{n}]}(t) \leqslant \mathrm{e}^{-t^2}$. Le théorème de convergence dominée s'applique :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

d'ù $I_n \sim \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{n}}$.

(2) Cf. exo 2.3.7 des exos de révisions d'algèbre linéaire :
On fait la remarque préalable suivante : $(f+g)(E) \subset f(E) + g(E)$ donc

$$\mathrm{Rg}(f+g) \leqslant \dim(f(E) + g(E)) = \mathrm{Rg}(f) + \mathrm{Rg}(g) - \dim(\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Im}\, g).$$

$\Rightarrow$ Vu la remarque, on a immédiatement $\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Im}\, g = \{0\}$ et $\dim(f+g)(E) = \dim f(E) + \dim g(E)$ donc $(f+g)(E) = f(E) + g(E)$.
Ensuite, si $x \in E$ alors $f(x) \in (f+g)(E)$ donc il existe $y \in E$ tel que

$f(x) = (f+g)(y)$ donc $g(y) = f(x-y) \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g$ i.e. $g(y) = 0 = f(x-y)$ et, en écrivant que $x = (x-y) + y$ on a bien $E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g$.

$\Leftarrow$ Soit $y \in \operatorname{Im} f$, $y = f(x)$ et, en écrivant $x = z + t \in \operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g$ alors $y = f(t) = f(t) + g(t) = (f+g)(t) \in (f+g)(E)$ donc $f(E) \subset (f+g)(E)$. Par symétrie, $g(E) \subset (f+g)(E)$ donc $f(E)+g(E) \subset (f+g)(E)$ et comme la somme $f(E)+g(E)$ est directe on a $f(E) \oplus g(E) \subset (f+g)(E)$. L'inclusion dans l'autre sens étant évidente, on a $f(E) \oplus g(E) = (f+g)(E)$ soit $\operatorname{Rg}(f) + \operatorname{Rg}(g) = \operatorname{Rg}(f+g)$.

Solution 4.1.1 (F. Escriva) Note : 11
Examinatrice : Mme Jolly
Cf. exo 4.1.6 de l'oral 2006.

(1) On remarque que $A + A^{\mathrm{T}} = J - I_n$ où $J = (1)$ (ne pas écrire Id pour la matrice identité sinon crise de nerf).
Soit $X \in \operatorname{Ker} A \cap H$, on remarque que $H = \operatorname{Ker} J$. On a donc $A^{\mathrm{T}}X = -X$, $AX = 0$ donc $A^{\mathrm{T}}X = 0$ et $(AX)^{\mathrm{T}}X = X^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}X = 0$ soit $-X^{\mathrm{T}}X = -\|X\|^2 = 0$ par conséquent $X = 0$.
Conclusion : $\operatorname{Ker} A \cap H = \{0\}$.

(2) Immédiat avec la formule du rang : $\dim \operatorname{Ker} A \leqslant 1$ car $\operatorname{Ker} A$ et H sont en somme directe.

(3) $n = 2$ alors $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ou sa transposée donc $\operatorname{Rg}(A) = 1$.

$$\text{Si } n \geqslant 3 \text{ alors } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 1 & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ est de rang } n.$$

Conclusion : $n = 2$.

Solution 4.1.2 (R. Casalis) Note : 19
Examinateur : bon, ben des exos comme ça, je ne suis pas contre, mais ça ne vole pas haut... L'interrogatrice a vu au bout de 10 minutes que je savais ce que je faisais et elle s'est endormie. J'ai juste entendu le bonjour et le au revoir de politesse. Pour bien faire je détaillais quand même, donc finalement j'ai mis plus de temps à l'exposer qu'à le chercher. Un peu scandaleux comme exo quand même.

(1) φ est un morphisme d'algèbre.

(2) Si $P = QR$ alors $Q(u)(x) = 0 \Rightarrow P(u)(x) = 0$ donc $N_Q \subset N_P$.
Si $y = P(u)(x)$ alors $y = Q(u)[R(u)(x)]$ donc $I_P \subset I_Q$.

(3) Si $D = UP + VQ$ alors $N_D \subset N_P$ et $N_D \subset N_Q$ donc $N_D \subset N_P \cap N_Q$.
Si $P(u)(x) = Q(u)(x) = 0$ alors $D(u)(x) = 0$ d'où l'égalité $N_D = N_P \cap N_Q$.
$I_P \subset I_D$ et $I_Q \subset I_D$ donc $I_P + I_Q \subset I_D$.
Si $y = D(u)(x)$ alors $y = P(u)[U(u)(x)] + Q(u)[V(u)(x)]$ d'où l'égalité.

(4) Cf. lemme des noyaux.

(5) $I = \Pi\mathbb{R}[X]$.

(6) Si $\Pi = PQ$ avec $P(u)$ inversible alors $\Pi(u) = 0 = P(u) \circ Q(u)$ et comme $P(u)$ est inversible alors $Q(u) = 0$ donc Π divise Q et par conséquent $\deg P = 0$.

(7) Si $\Pi \wedge P = 1$ alors $AP + B\Pi = 1$ soit $A(u) \circ P(u) = \operatorname{Id} - B(u) \circ \Pi(u) = \operatorname{Id}$ et comme $A(u)$ et $P(u)$ commutent, $P(u)$ est bien inversible.
Réciproque : on suppose $P(u)$ inversible. Si $D = \Pi \wedge P$ alors $P(u) = D(u) \circ A(u)$ (D

divise P). Comme $P(u)$ est inversible, il en est de même pour $D(u)$. Finalement, en utilisant la question précédente, on en déduit que $\deg D = 0$ soit $D = 1$ ce qui achève la démonstration.

(8) On a donc $P = QR$ avec $Q \wedge R = 1$.
- $E = \operatorname{Ker} P(u) = N_Q \oplus N_R$ grâce au lemme des noyaux.
- $D = Q \wedge R = 1$ donc, vu la question (3), $I_D = E = I_Q + I_R$.
  Si $x \in I_Q \cap I_R$ alors il existe y et z tels que $x = Q(u)(y) = R(u)(z)$. On en déduit que $R(u)(x) = (RQ)(u)(y) = 0$ et $Q(u)(x) = 0$ donc $x \in N_Q \cap N_R = \{0\}$ soit $x = 0$ donc $E = I_Q \oplus I_R$.
- $Q(u) \circ R(u) = 0 \Rightarrow I_R \subset N_Q$ et par symétrie, $I_Q \subset N_R$. Si l'une des inclusions est stricte alors on ne peut avoir l'égalité $E = I_Q \oplus I_R = N_Q \oplus N_R$ donc les deux inclusions sont des égalités. Conclusion : $N_Q = I_R$ et $N_R = I_Q$.

Solution 4.1.3 (L. Grimaldi) Note : 12

Commentaires : Première épreuve à 8h30 du matin, examinateur très sympa (Francini ? Je n'en suis pas sur) ce qui n'est pas le cas de son exo sur lequel j'ai vraiment ramé.

(1) A est orthogonalement semblable à une matrice diagonale D donc toute matrice A' orthogonalement semblable à A est orthogonalement semblable à D.

$$\operatorname{Tr}(A'B') = \operatorname{Tr}(QDQ^{\mathrm{T}}B') = \operatorname{Tr}(DQ^{\mathrm{T}}B'Q) = \operatorname{Tr}(DB'')$$

où B'' est orthogonalement semblable à B.

(2) J'évoque ensuite le cas $n = 2$ car $n = 3$ c'était la solitude en préparation, je me plante sur les matrices orthogonales d'ordre 2 (j'oublie det = -1) mais je corrige vite l'erreur quand il me demande confirmation. Avec un peu d'aide on comprend comment ça marche. Le cas $n = 3$ se traite alors comme le cas $n = 2$ i.e. en majorant/minorant les coefficients diagonaux des matrices semblables qui interviennent dans la trace par les vap (cf. formes quadratiques).

(3) a) Je pense à une récurrence pour l'inégalité mais pas à fixer un élément en composant par une transposition bien choisie.
C'est en fait immédiat en prenant la transposition $\sigma = (i, j)$, $i < j$ car il suffit de prouver que $\lambda_i\mu_j + \lambda_j\mu_i \leqslant \lambda_i\mu_i + \lambda_j\mu_j$ soit $(\lambda_j - \lambda_i)(\mu_j - \mu_i) \geqslant 0$ ce qui est évident. On utilise ensuite le fait que toute permutation se décompose en produit de transpositions.

b) Pour la fonction, il me dit à la fin qu'il faut paramétrer le groupe orthogonal et que c'est plutôt difficile, je m'arrête là après avoir suggéré un calcul de gradient (ok c'est une belle vanne sur O(n) mais 8h30 c'est trop tôt !).

c) Le maximum est donc atteint lorsque OBO^{T} est diagonale soit

$$OBO^{\mathrm{T}} = \operatorname{Diag}(\mu_{\sigma_1}, \ldots, \mu_{\sigma_n}) \text{ où } \sigma \in \mathfrak{S}_n.$$

Vu le a, on en déduit que le maximum est effectivement atteint pour une matrice O telle que $OBO^{\mathrm{T}} = \operatorname{Diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ ce qui permet de conclure.

Solution 4.1.4 (B. Charron) Note : 19

Examinateur : M. Franchini : sympa et ouvert, j'avais presque fini les 1 et 2 en préparation (30 min) et quand j'arrive à la fin il me donne l'idée, que je fais semblant d'avoir déjà trouvé. Je ne suis pas du tout rentré dans le 3 au tableau mais vu la note c'était du bonus.

(1) Pour $n = 2$, on prend $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dans ce cas, $AB = A$ et $BA = 0$ d'où $N(AB) = N(0) = 0$ avec $AB \neq 0$, ce qui est impossible. Pour n quelconque, on rajoute des blocs de 0 dans A et B.

(2) a) On vérifie ceci rapidement.

b) $N(A+B) \leqslant N(A)$ avec l'inégalité triangulaire et $N(A) = N(A+B-B) \leqslant N(A+B)$ car $N(-B) = N(B) = 0$ avec la première propriété. D'où l'égalité.

c) Plus compliqué, on utilise les $E_{i,j}$ de la base canonique. On a $E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}$ d'où $E_{i,j}E_{j,k} = E_{i,k}$ et $E_{j,k}E_{i,j} = 0$ pour $i \neq k$. Par conséquent, $N(E_{i,k}) = 0$ pour $i \neq k$.
Alors $N(\sum_{i\neq j} a_{i,j}E_{i,j}) \leqslant \sum_{i\neq j} |a_{i,j}|N(E_{i,j}) = 0$
d'où $N(A) = N(\sum_{i=1}^n a_{i,i}E_{i,i})$ d'après le b).
Or, $(\sum_{i=1}^n a_{i,i}E_{1,i})(\sum_{i=1}^n E_{i,1}) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}E_{1,1}$
et : $(\sum_{i=1}^n E_{i,1})(\sum_{i=1}^n a_{i,i}E_{1,i}) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}E_{i,i}$
d'où

$$N(A) = N\left(\sum_{i=1}^n a_{i,i}E_{1,1}\right) = |\mathrm{tr}(A)|N(E_{1,1})$$

donc les solutions sont les multiples de $|\mathrm{tr}|$.

(3) On a :

$$f(t) = \max_{\|X\|=1} X^T(A + tB)X$$

d'où, pour $\|X\| = 1$, $\lambda \in [0, 1]$ et $(t, t') \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} X^T\left(A + (\lambda t + (1-\lambda)\,t')\,B\right)X &= \lambda X^T\left(A + tB\right)X + (1-\lambda)\,X^T(A + t'B)X \\ &\leqslant \lambda f(t) + (1-\lambda)\,f(t') \end{aligned}$$

Donc, en passant au sup sur X, $f\left(\lambda t + (1-\lambda)\,t'\right) \leqslant \lambda f(t) + (1-\lambda)\,f(t')$, d'où la convexité de f sur $\mathbb{R}$.

Solution 4.1.5 (C. Birman) Note : 14
Examinateur : Mr Franchini

(1) a) On étudie les variations du polynôme $Q(X) = (1-X)P(X) = -X^{p+1} + 2X^p - 1$, $Q'(X) = -(p+1)X^p + 2pX^p$ d'où le tableau de variations

x	$-\infty$		0	1	$\frac{2p}{p+1}$		α	$+\infty$
$Q'(x)$		$-$	0	$+$	0	-		
$Q(x)$		$\searrow$		0 $\nearrow$			0 $\searrow$	

α est la seule racine positive de P, α est racine simple car elle n'est pas racine de Q, il en est de même pour les autres racines.

b) $Q(\beta) = 0 \Rightarrow 2|\beta|^p = |\beta^{p+1} + 1| \leqslant |\beta|^{p+1} + 1$, donc $Q(|\beta|) < 0$ donc, vu le tableau de variations, $|\beta| < 1$.

(2) P est réductible sur $\mathbb{C}$, si α est racine de P alors α est valeur propre complexe de M, elle est aussi racine du polynôme minimal.
Montrons par l'absurde que α est racine simple :
si α est racine de P' alors $R = P \wedge P'$ divise P, est à coefficients rationnels et admet α comme racine. P ne serait pas irréductible ce qui est absurde.
Conclusion : P divise le polynôme minimal.

Solution 4.1.6 (Y. Yang) Note : 13
Examinateur : Mme Pages. Sordide ! D'après Alice, c'est elle qui a fait le sujet de Maths 1 de Centrale de cette année où il y a une grosse erreur. J'ai torché l'exo en sautant une question intermédiaire qu'elle prétendait n'avoir rien compris. Elle s'est foutue totalement de ma gueule sur cette question et a fait rire l'autre candidat en train de préparer son exo. Mais en vérité, ce que je lui ai raconté était tout a fait juste !

(1) On aurait aimé avoir les étapes intermédiaires ! Essayons quand même de les trouver. On distingue deux cas :
- Si A ou B est définie positive, par exemple A, alors A est la matrice d'un produit scalaire et B est la matrice d'une forme quadratique qui se réduit en somme de carrés dans une base orthonormale pour le produit scalaire défini par A. On a ainsi l'existence d'une matrice de passage P telle que $A = PP^{\mathrm{T}}$ et $B = PDP^{\mathrm{T}}$ où D est la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(\lambda_i)$.
  $\det(A+B) = \det[P(I+D)P^{\mathrm{T}}] = \det P^2 \det(I+D) = \det P^2 \prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i)$ et $\det A = \det P^2$, $\det B = \det P^2 \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$. L'inégalité devient alors immédiate.
- Si A et B ne sont pas définies positives alors $\det A = \det B = 0$ et $\det(A+B) \geqslant 0$ (car $A+B$ est une matrice symétrique positive. Là encore, l'inégalité est immédiate.

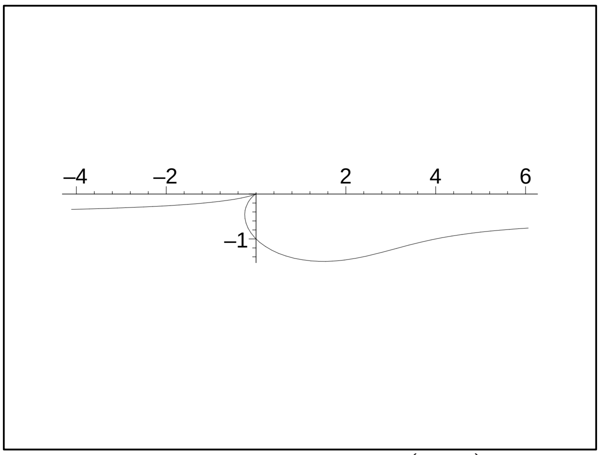
(2) L'algorithme d'Euclide se fait par divisions euclidiennes et si P et Q sont à coefficients entiers alors les divisions se font dans $\mathbb{Q}[X]$. Or $P \wedge Q = 1$ entraîne qu'il existe U et V dans $\mathbb{Q}[X]$ tels que $UP + VQ = 1$.

Solution 4.1.7 (E. Deguine) Note : 15
Examinateur : Nom inconnu
Particularités : A passé l'heure à me dire qu'il en avait marre des taupins, que j'avais des méthodes de taupins , qu'on était pas là pour faire des maths taupinales mais des" belles maths "(sic !) il a essayé de me déstabiliser pendant toute l'heure. A la fin il me pose la question d'algèbre je la torche avec un petit raisonnement théorique il me dit c'est bien puis pdt que je rédige au tableau il parlait à voix haute, commentant ce que j'avais fait pdt l'exo puis me donne ma note à la fin (15) en me disant c'est bien de pas se laisser déstabiliser.

(1) $y = x^2 - 2ax$ est l'équation d'une parabole d'axe Oy de sommet $S(a, -a^2)$, de foyer $F(a, \frac{1}{4} - a^2)$ et de directrice D d'équation $y = -a^2 - \frac{1}{4}$.
(2) Immédiatement on trouve $x\cos\theta + y\sin\theta = r$.
(3) Équation de la tangente : $Y - 2(x-a)X + x^2 = 0$, normale à la tangente en O : $X + 2(x-a)Y = 0$ d'où les coordonnées de H : $\begin{cases} X &= \dfrac{2(x-a)x^2}{1+2(x-a)^2} \\ Y &= \dfrac{-x^2}{1+2(x-a)^2} \end{cases}$.

Un petit tracé avec Maple

```
plot([2*(x-1)*x^2/(1+2*(x-1)^2),-x^2/(1+2*(x-1)^2),x=-5..5],scaling=constrained);
```



(4) On cherche une matrice de la forme $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ non diagonalisable.

$P_A(\lambda) = \lambda^2 - (a+b)\lambda + ab - c^2$ doit admettre une racine double soit $\Delta = (a+b)^2 - 4(ab - c^2) = (a-b)^2 + 4c^2 = 0$. Il suffit de prendre $a = 2$, $b = 0$ et $c = i$, la matrice $\begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ ne peut être diagonalisable sinon elle serait scalaire.

Solution 4.1.8 (Y. Guihard) Note : 12

Examinateur : plutot sympa et bienveillant, il me tutoyait.

(1) (a) et (b) débiles, de même que la réciproque de c).
  (c) sens direct : si r est le rang de A, A équivalente à J_r et toute autre matrice avec r 1 sur la diagonale. En faisant le produit de toutes ces matrices, on trouve 0 si $r \neq n$, ce qui contredit $f(A) \neq 0$. Donc $r = n$ et A inversible.
  (d) Non, on exhibe un contre-exemple (que je n'ai pas trouvé sur le moment : $\det^2$.
  (e) Non. Si A non inversible, μ vap de A et $B = -\mu I_n$ alors $f(A+B) = f(A) = 0$ et $f(B) \neq 0$ donc $f(A+B) \neq f(A) + f(B)$.

(2) Très simple, si on le prend comme il faut.
  p congru à 1 ou 2 mod 3 donc $p^2 \equiv 1 \mod 3$,
  p congru à 1,3,5 ou 7 mod 8 donc dans tous les cas $p^2 \equiv 1 \mod 8$ d'où $p^2 = 1 \mod 24$.

(3) Il restait 30 s, l'examinateur a dit :" Bon allez, un dernier parce que je suis pas encore sûr" mais malheureusement je n'ai pas trouvé le truc, qui était pourtant simple : A équivalente à $2A$, donc à $4A$... à $2^n A$ donc si λ vap de A, λ^n vap de A pour tout n, donc λ est nulle sinon A aurait une infinité de vap. On est sur $\mathbb{C}$, donc on trigonalise A, avec une diagonale nulle : A est nilpotente.

Solution 4.1.9 (J. Xiong) Note : 19

Examinateur : ?

(1) Cf. exo 4.1.2

(2) Soit $P(x_1, x_1^2)$, $Q(x_2, x_2^2)$, $R(x_3, x_3^2)$ les sommets.
  Il suffit d'avoir $\overrightarrow{PQ}.\exp(i * \pi/3) = \overrightarrow{PR}$, donc dans le plan complexe, on calcule et et on compare les parties réelles et imaginaires. On aura une infinité de solutions.
  Soit p, q, r les affixes respectives de P, Q, R. Le triangle PQR est équilatéral ssi $r - q = j(q-p)$ ou $r - q = j^2(q-p)$ ce qui est encore équivalent à

$$[(r-q)+j(p-q)].[(r-q)+j^2(p-q)] = r^2+p^2+q^2-rp-pq-rq = (p+jq+j^2r)(p+j^2q+jr) = 0.$$

  On remplace alors et on développe...

Solution 4.1.10 (K. Boubaker) Note : 6
Examinateur : ?

(1) Pour calculer $\det A_n$, on factorise a_i dans la i-ième colonne, on se retrouve avec $\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}$. On a alors $\Delta_n = (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}$ en faisant la somme de toutes les colonnes. On retranche le première colonne à toutes les autres pour trouver $\Delta_n = (n-1)(-1)^{n-1}$.
Conclusion : $\det A_n = (-1)^{n-1}(n-1)a_1 \dots a_n$.

(2) Si on veut calculer directement le polynôme caractéristique, cela fait mal. Une autre idée est de revenir aux vecteurs.
- Si λ est valeur propre alors on a les équations $s = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = (\lambda + a_p)x_p$ en rajoutant le terme a_px_p à la p-ième équation.
  - Si $s = 0$ alors, comme $(x_1, \dots, x_n) \neq 0$, il existe p tel que $x_p \neq 0$ donc $\lambda + a_p = 0$. Si $i \neq p$ alors $\lambda + a_i \neq 0$ (on a supposé que les a_i étaient tous distincts) donc $x_i = 0$ ce qui donne $s = a_px_p = 0$ puis $x_p = 0$ (car $a_p \neq 0$) ce qui est impossible.
  - $s \neq 0$ par conséquent et $x_p = \dfrac{s}{\lambda + a_p}$ et si on remplace x_p dans l'expression de s, on obtient $s = s\sum_{p=1}^{n} \dfrac{a_p}{\lambda + a_p}$ ce qui donne la condition en divisant par $s \neq 0$.
- Réciproque : si on a $\sum_{p=1}^{n} \dfrac{a_p}{\lambda + a_p} = 1$ alors le vecteur de composantes $\dfrac{1}{\lambda + a_p}$ est un vecteur propre.

Remarque : ce résultat reste valable même si les a_i ne sont pas distincts. En effet soit

$$f \ : (a_1, \dots, a_n) \mapsto P_{A_n}(X)$$

où P_{A_n} est le polynôme caractéristique de A_n. f est une application polynomiale, elle est par conséquent continue et le résultat obtenu ci-dessus reste valable par passage à la limite.

(3) Si $A = (\alpha_{ij})$ alors $\alpha_{ij} = a_i(1 - \delta_{ij})$. $AB = BA$ va donner les relations

$$a_i \sum_{k \neq i} b_{kj} = \sum_{k \neq j} b_{ik}a_k$$

ce qui n'est pas terrible. Passons à la question suivante.

(4) On a vu à la question 2 que $\lambda \in \mathrm{Sp}(A_n) \Leftrightarrow \sum_{p=1}^{n} \dfrac{a_p}{\lambda + a_p} = 1$. Supposons les a_p rangés dans l'ordre croissant et étudions la fonction $f(x) = \sum_{p=1}^{n} \dfrac{a_p}{x + a_p} - 1$. Il est facile de prouver que sur chaque intervalle $[-a_p, -a_{p-1}]$, f s'annule ainsi que sur $[-a_1, +\infty[$ ce qui fait n valeurs d'annulation distinctes pour f.
Conclusion : A_n possède n valeurs propres distinctes, elle est par conséquent diagonalisable. De plus, toute matrice qui commute avec A_n est diagonalisable dans la même base que A_n.

Solution 4.2.1 (F. Escriva) Note : 15
Examinateur : ?

(1) On utilise l'identité $u_n = \dfrac{4n+3}{(2n+1)^2(2n+2)^2} = \dfrac{1}{(2n+1)^2} - \dfrac{1}{(2n+2)^2}$. $\sum u_n$ est la différence de deux séries convergentes (en $O(\frac{1}{n^2})$) donc elle converge. On peut ensuite écrire

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} u_n &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+2)^2}\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4((n+1)^2}\\ &= \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{12} = \frac{\pi^2}{12}.\end{aligned}$$

(2) On a $\dfrac{-x\ln(xy)}{1-x^2y^2} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} -x^{2n+1}y^{2n}\ln(xy)$ d'où l'idée d'utiliser un théorème de Lebesgue d'intégration terme à terme d'une série. Malheureusement, ce théorème n'est pas au programme. On va donc procéder avec les bras.

- Tout d'abord l'existence : $\dfrac{-x\ln(xy)}{1-x^2y^2} = -x\ln(xy) - \dfrac{x^3y^2\ln(xy)}{1-x^2y^2}$.
  - * $-x\ln(xy) = -x\ln x - x\ln y$. $(x,y) \mapsto x\ln x$ est continue sur $[0,1]^2$ donc intégrable et $(x,y) \mapsto x\ln y$ est le produit de deux fonctions intégrables sur $[0,1]$, elle est aussi intégrable.
  - * $\dfrac{p^2\ln p}{1-p^2}$ est une fonction continue sur $[0,1]$ donc, avec $p = xy$, $(x,y) \mapsto -x\dfrac{p^2\ln p}{1-p^2}$ est continue sur $[0,1]^2$, c'est une fonction intégrable.

  Avec ces deux arguments, on peut conclure à l'intégrabilité sur $[0,1]^2$ de la fonction $(x,y) \mapsto \dfrac{-x\ln(xy)}{1-x^2y^2}$.
- Le calcul : comme on ne peut utiliser le fameux théorème, on sort les bras...

$$\frac{-x\ln(xy)}{1-x^2y^2} = \sum_{n=0}^{N} \underbrace{-x^{2n+1}y^{2n}\ln(xy)}_{=f_n(x,y)} - \underbrace{\frac{x^{2N+3}y^{2N+2}\ln(xy)}{1-x^2y^2}}_{=r_N(x,y)}. \tag{R}$$

Or $\displaystyle\iint_{[0,1]^2} f_n(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{4n+3}{(2n+1)^2(2n+2)^2}$ (comme c'est bizarre...) et on écrit $r_N(x,y) = x^{2N+2}y^{2N+1}r(x,y)$ où $r(x,y) = -\dfrac{xy\ln(xy)}{1-x^2y^2}$ est une fonction continue sur $[0,1]^2$ donc bornée par M. On en déduit que

$$\iint_{[0,1]^2} r_N(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant M \iint_{[0,1]^2} x^{2N+2}y^{2N+1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{M}{(2N+3)(2N+2)} \to 0.$$

On intégre alors la relation (R) et on passe à la limite.

Conclusion : $\displaystyle\iint_{[0,1]^2} \frac{-x\ln(xy)}{1-x^2y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{\pi^2}{12}.$

Solution 4.2.2 (R. Casalis) Note : 13

Examinateur : ?

(1) Soit $g(t)=\dfrac{1}{t\exp(\sqrt{t}-1)}$ alors g est continue sur $]0,+\infty[$ et $t^2g(t)\to 0$ quand $t\to+\infty$. g est bien intégrable sur tout intervalle $[x,+\infty[$ avec $x>0$ ce qui signifie que f est définie pour $x>0$.

(2) On pose $u=\sqrt{t}$ d'où $f(x)=2e\displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u$ et on sépare l'intégrale en 2

$$f(x)=2e\int_{\sqrt{x}}^{1}\frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u+2e\int_{1}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u.$$

Or $\displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{1}\frac{\mathrm{e}^{-u}-1}{u}\,\mathrm{d}u\to\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u$ d'où $f(x)\sim 2e\displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{1}\frac{\mathrm{d}u}{u}=-e\ln x$...

(3) On reprend le changement de variable précédent et on fait une I.P.P. d'où

$$f(x)=\underbrace{2e\left[-\frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\right]_{\sqrt{x}}^{+\infty}}_{=2e\frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}}\underbrace{-2e\int_{\sqrt{x}}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-u}}{u^2}\,\mathrm{d}u}_{=o(f(x))}$$

d'où $f(x)\sim 2e\dfrac{\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$...

(4) Toujours avec $u=\sqrt{t}$, on trouve $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\exp(\sqrt{t}-1}=2e.$

(5) Vu ce qui a été fait, on peut affirmer que f est intégrable sur $\mathbb{R}$. En posant $F(x,t)=1_{[x,+\infty[}(t).f(x)$ qui est une fonction positive et intégrable sur $]0,+\infty[^2$, on peut appliquer Fubini d'où

$$\int_0^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{]0,+\infty[^2}F(x,t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^t\mathrm{d}x\right)\frac{\mathrm{d}t}{t\,\mathrm{e}^{\sqrt{t}-1}}$$
$$=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\exp(\sqrt{t}-1)}=2e.$$

Solution 4.2.3 (L. Grimaldi) Note : 17

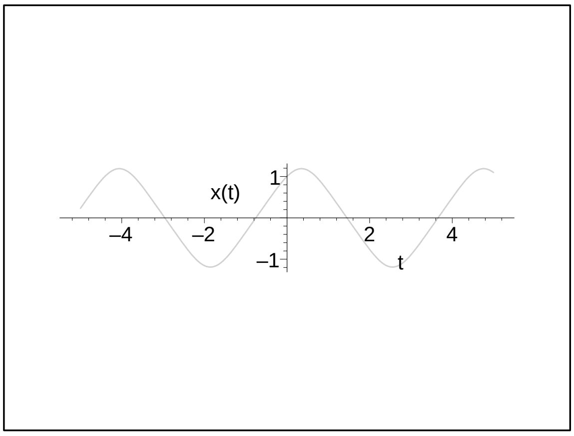
Examinateur : très sympa, se lève pour venir au tableau m'aider et m'expliquer la dernière question notamment. On me l'avait décrit comme un fan de maple (Thomas l'avait eu dans l'après-midi et avait vu mon nom sur la liste), mais je ne savais plus comment charger une librairie en Maple (en fait je n'avais pas mis les parenthèses avec le with(DeTools)), je tape quand même les instructions, il vient avant le début de la planche, il charge la bibliothèque et heureusement pour moi ça ne marche toujours pas avec lui donc je suppose qu'il ne m'a pas pénalisé. Il fallait conjecturer la périodicité je suppose.

(1) On utilise dans l'ordre Cauchy-Lipschitz non-linéaire (avec l'équa diff du premier ordre vectorielle en (x,x')), je manucure le théorème pour avoir plus de liberté par la suite ce qui est effectivement le cas.

(2) a) On utilise le code Maple suivant

```
> with(DEtools):
> DEplot(diff(x(t),t$2)+2*x(t)^3=0,x(t),t=-5..5,
[[x(0)=1,D(x)(0)=1]],stepsize=.05,scaling=constrained);
```

pour trouver



ce qui laisse penser que f est périodique.

b) $u' = 4f^3f' + 2f'f'' = 0$ donc u est constante. $u \neq 0$ car $u(1) = 2$ donc $f^4 + f'^2 = \rho^2 > 0$. On en déduit immédiatement que f et f' sont bornées et comme $f'' = -2f^3$, il en est de même de f''.
Puis un raisonnement par l'absurde avec critère de Cauchy pour les fonctions et double prolongement $\mathcal{C}^1$ pour montrer que $I = \mathbb{R}$.

(3) a) C'est le théorème du relèvement. En effet, $f^4 + f'^2 > 0$ donc $f^2 + f'^2$ ne s'annule pas.

b) Le reste c'est plus ou moins du calcul.
$f'' = \rho' + \rho\cos\theta\theta' = -2\rho^3\cos^3\theta$. Pour éliminer ρ', on donne deux expressions de f' : $f' = \rho\sin\theta = \rho'\cos\theta - \rho\sin\theta\theta'$ ce qui donne

$$\rho'\cos\theta = \rho\sin\theta(1 + \theta').$$

On multiplie f'' par $\cos\theta$ d'où

$$\underbrace{\rho'\sin\theta\cos\theta}_{=\rho\sin^2\theta(1+\theta')} + \rho\cos^2\theta\theta' = -2\rho^3\cos^4\theta$$

et, après simplifications, $\theta' = -2\rho^2\cos^4\theta - \sin^2\theta$ (on a divisé par $\rho > 0$).
L'inégalité demandée est alors immédiate.

c) Comme $\sin^2\theta + \rho^2\cos^2\theta$ ne s'annule jamais, on en déduit que θ est strictement décroissante. θ est bien sûr définie sur $\mathbb{R}$ (comme f) et on va prouver que $\theta(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
En effet $\rho^2\theta' \leqslant -(f^4 + f'^2) = -u$ et, vu que f etf' sont bornées, ρ l'est aussi donc $\theta' \leqslant \dfrac{-u}{\rho^2} \leqslant \dfrac{-u}{M^2}$ où $M = \sup\rho$.

- Pour $t > 0$, $t \to +\infty$, $\theta(t) - \theta(0) = \displaystyle\int_0^t \theta'(v)\,\mathrm{d}v \leqslant -\frac{tu}{M^2} \to -\infty$ donc $\theta(t) \to -\infty$.
- Pour $t < 0$, $t \to -\infty$, $\theta(0) - \theta(t) = \displaystyle\int_t^0 \theta'(v)\,\mathrm{d}v \leqslant -\frac{tu}{M^2} \to -\infty$ donc $\theta(t) \to +\infty$.

d) Pour la dernière question, on choisit t_0 tel que $\theta(t_0) = 0$ et T tel que $\theta(t_0 + T) = 2\pi$.
On a alors $f(t_0) = \rho(t_0)$ et $f'(t_0) = 0$ donc, comme $f^4 + f'^2 = 2$, on en déduit que $f(t_0) = 2^{1/4}$. Soit $g(t) = f(t + T)$ alors $g(t_0) = \rho(t_0 + T)\cos(\theta(t_0 + T)) = \rho(t_0 + T)$ et $g'(t_0) = \rho(t_0 + T)\sin(\theta(t_0 + T)) = 0$ donc, là aussi, $g(t_0) = 2^{1/4}$.
g et f vérifient la même équation différentielle avec les mêmes conditions initiales en t_0, on a donc $g = f$ soit $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t + T) = f(t)$ i.e. f est bien T-périodique.

Remarque : cet exercice est loin d'être évident...

Solution 4.2.4 (B. Charron) Note : 14
Examinateur : M. Rouff : pas très pointilleux, ne laisse pas trop sécher mais attend que le candidat aille au bout de son raisonnement pour lui dire que c'est faux.

(1) Là, il suffit de calculer S_n/n^n pour différents n et dire : "hum, en effet, on voit bien que ça converge".

(2) $u_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{n-k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^n = \frac{S_n}{n^n}$ et $\left(1-\frac{k}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{k}{n}\right)} \leqslant e^{-k}$ pour $k < n$ d'où $u_n \leqslant \sum_{k=0}^{n} e^{-k} \leqslant \frac{1}{1-1/e} \leqslant \frac{e}{e-1}$.

(3) On a $I_n = \int_0^{+\infty} \left(1-\frac{\mathrm{E}(x)}{n}\right)^n \chi_{[0,n]}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$ où χ_A est la fonction caractéristique de A. On utilise alors le TCD en montrant que f_n converge simplement vers $f(x) = e^{-\mathrm{E}(x)}$ et que $|f_n| \leqslant f$ avec f intégrable.

Alors $I_n \to \int_0^{+\infty} e^{-\mathrm{E}(x)}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k} = \frac{e}{e-1} = L$.

Solution 4.2.5 (C. Birman) Note : 14
Examinateur : ?

(1) a) Tchebichef, quand tu nous tiens !

b) On peut utiliser la formule $\cos(n+1)x - \cos(n-1)x = 2\cos x \cos nx$ qui donne $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$.

```
> Tche:=proc(n)
> local t0,t1,t,u,x,i;
> t0:=x->1;t1:=x->x;
> for i from 2 to n do
>   t(x):=expand(2*x*t1(x)-t0(x));
>   u(x):=t1(x);
>   t1(x):=t(x);
>   t0(x):=u(x);
>   print(‘n= ‘,i,‘T_n= ‘,t(x))
> od;
> end;
```

donne bien les résultats :

```
> Tche(10);
                 2
n= 2,  T_n= 2 x  - 1
                 3
n= 3,  T_n= 4 x  - 3 x
                 4     2
n= 4,  T_n= 8 x  - 8 x  + 1
                  5      3
n= 5,  T_n= 16 x  - 20 x  + 5 x
                  6      4      2
n= 6,  T_n= 32 x  - 48 x  + 18 x  - 1
                  7       5      3
n= 7,  T_n= 64 x  - 112 x  + 56 x  - 7 x
                   8       6       4      2
n= 8,  T_n= 128 x  - 256 x  + 160 x  - 32 x  + 1
                   9       7       5       3
n= 9,  T_n= 256 x  - 576 x  + 432 x  - 120 x  + 9 x
                   10       8        6       4      2
n= 10, T_n= 512 x   - 1280 x  + 1120 x  - 400 x  + 50 x  - 1
```

(2) On a $Q_n(x,y) = R_n(\cos x, \cos y)$ avec $R_n(X,Y) = \dfrac{T_n(X)-T_n(Y)}{X-Y}$. Or R_n est une fonction polynomiale de (X,Y), elle est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ et, par composition, il en est de même de $Q_n(x,y)$.
(3) Bon, cela fait beaucoup de dessins... On conjecture que $M_n = n^2$.
```
plot3d((cos(nx)-cos(ny))/(cos(x)-cos(y)),x=-Pi..Pi,y=-Pi..Pi);
```
(4) a) On a $T_n(X) - T_n(Y) = \displaystyle\int_Y^X T_n'(u)\,\mathrm{d}u$ puis on pose $u = Y + t(X-Y)$ et on obtient immédiatement la formule (en distinguant les cas $\cos x \neq \cos y$ et $\cos x = \cos y$.
b) On a $T_n'(\cos x)\sin x = -n\sin nx$ soit $T_n'(\cos x) = -n\dfrac{\sin nx}{\sin x}$. Or, par une récurrence évidente, on a $|\sin nx| \leqslant n|\sin x|$ donc $|T_n'(\cos x)| \leqslant n^2$, le maximum étant atteint pour $x = 0$.
Conclusion : on a $|Q_n(x,y)| \leqslant n^2$ et $Q_n(0,0) = n^2$ donc $M_n = n^2$.

Solution 4.2.6 (Y. Yang) Note : 20
Examinateur : Mr Douillet.Trop sympa ! Moi je dirais qu'il est un Woody Allen mais en plus gros.
(1) $y(x) = z(1/x)$ et on dérive. On trouve $u^4A(1/u)z''(u) + (2u^3A(1/u) - u^2B(1/u))z'(u) + C(1/u)z(u) = 0$.
(2) L'exemple concret est resté trop abstrait...
(3) Encore du Tchebichef ! On a $T_n(\cos x) = \cos nx$ d'où, en dérivant deux fois,
$$-T_n''(cosx)\sin^2 x + T_n'(\cos x)\cos x = n^2\cos nx = n^2T_n(\cos x).$$
Comme les T_n sont des polynômes, l'égalité pour $X = \cos x$ étant valable sur $[-1,1]$, elle l'est aussi sur $\mathbb{R}$ d'où
$$(1-X^2)T_n(X) - XT_n'(X) + n^2T_n(X) = 0.$$
On utilise alors la méthode de variation de la constante :
$y = \lambda T_n$ qui donne $\lambda'(X) = \dfrac{1}{T_n'(X)\sqrt{1-X^2}}$ et, en posant $X = \cos x$, $x \in [0,\pi]$, on arrive à
$$\begin{aligned}\lambda(x) &= \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{T_n^2(t)\sqrt{1-t^2}}\\ &= \int_0^{\operatorname{Arccos} x} \frac{\mathrm{d}u}{T_n^2(\operatorname{Arccos} u)} && \text{en posant } t = \cos u\\ &= \int_0^{\operatorname{Arccos} x} \frac{\mathrm{d}u}{\cos^2 nu} = \frac{1}{n}\tan(n\operatorname{Arccos} x).\end{aligned}$$
Une deuxième solution est donc donnée par $S_n(x) = \sin(n\operatorname{Arccos} x)$.
La transformation inverse semble être la suivante : on pose $y(x) = z(u)$ avec $u = \operatorname{Arccos} x$. z satisfait alors à l'équation différentielle $z'' + n^2z = 0$ ce qui permet de retrouver facilement les solutions...

Solution 4.2.7 (E. Deguine) Note : 15
Examinateur : nom inconnu.
Particularité : parle très peu, je lui expose rapidement comment faire pour passer en polaire, je lui fait les calculs (il avait l'air de vouloir les voir) puis une fois fini (deux tableaux de calculs

pour les polaires) il me dit pourquoi vous ne l'avez pas fait avec Maple ? (il y avait en effet un PC éteint dans un coin de la salle...)

(1) On utilise les formules $\begin{cases} \mathrm{d}r &= \cos\theta\,\mathrm{d}x + \sin\theta\,\mathrm{d}y \\ \mathrm{d}\theta &= -\sin\theta\,\mathrm{d}x + \cos\theta\,\mathrm{d}y \end{cases}$ d'où, en posant $f(x,y) = g(r,\theta)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial g}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \sin\theta\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}.$$

Cela se corse pour le calcul des dérivées partielles secondes !

(2) Encore des calculs !

(3) On souhaite que le changement de variables $(r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$ soit au moins de classe $\mathcal{C}^2$, pour cela, on se place sur l'ensemble $\mathbb{L} = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}^- \times \{0\}$.

(4) Remarque : si on fait intervenir l'opérateur $\Delta f = x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y}$ alors

$$\begin{aligned}\Delta^2 f &= x\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right) + y\frac{\partial}{\partial y}\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\ &= x^2 r + 2xys + y^2 t + \Delta f\end{aligned}$$

donc l'équation que l'on demande de résoudre se ramène à $\Delta^2 f - \Delta f = 0 = \Delta(\Delta f - f)$. Or, en polaires, $\Delta f(x,y) = r\dfrac{\partial g}{\partial r}$ donc l'équation se ramène à $\Delta f - f = h(\theta)$ que l'on résout à nouveau en polaires : $f(x,y) = ar - h(\theta)$.

Solution 4.2.8 (Y. Guihard) Note : 11

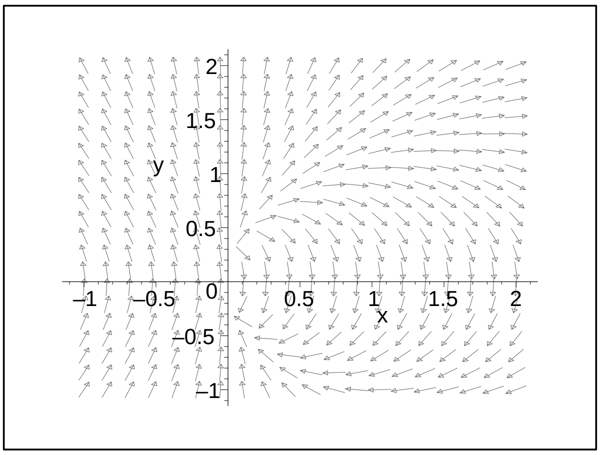
Examinateur : alors là on se sent immensément seul, surtout lorsque l'examinateur (un certain M.DOUILLET) est plongé dans son PC et ne semble pas concerné par ce qu'on tente vainement de faire. Bon, la première question, ça va, c'est Cauchy-Lipschitz. Après, ça ne va plus. On trace la courbe demandée sur Maple. Bon. On obtient plein de petites flèches qui semblent former des cercles passant par l'origine. Nous voilà bien avancés. En fait je n'ai pratiquement rien fait de constructif pendant la colle. L'examinateur daignait parfois donner une piste, mais je n'aboutissait pas, il levait les yeux de son PC, il hochait la tête, me donnait une autre piste ou me demandait d'aller voir Maple ("qu'en pense votre logiciel favori ?"), et ainsi pendant toute la colle.

Plus tard, on m'a fait remarquer (merci Clément, pour ceux qui connaissent) qu'en multipliant par y la première équation, par x la deuxième, et en faisant la différence, on obtenait quelque chose de plus sympathique.

(1) On a un système autonome avec des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ donc ça baigne dans le Cauchy-Lipschitz...

(2) Bon, encore Maple...

```
with(DEtools):
DEplot([diff(x(t),t)=x(t)*y(t),diff(y(t),t)=y(t)^2-x(t)],[x(t),y(t)],
t=-5..5,x=-1..2,y=-1..2,arrows=MEDIUM);
```



Avec l'astuce indiquée, on obtient $x'y - xy' = x^2$ ce qui est équivalent, pour $x \neq 0$ à $\left(\dfrac{y}{x}\right)' = -1$ soit $y = -tx$. On reporte dans la première équation d'où $x' = -tx^2$ (toujours pour $x \neq 0$) puis on intègre, on obtient $x = \dfrac{2}{t^2 + a}$. On remplace t en fonction de x et y, en simplifiant par x, on obtient finalement $y^2 + ax^2 = 2x$ ce qui donne des hyperboles, des ellipses ou une parabole si $a = 0$ (confirmé par Maple en rajoutant dans la ligne de commande

```
[[x(0)=5,y(0)=1]]
```

et en prenant différentes conditions initiales.
Si x s'annule en un point alors x s'annule partout et $y' = y^2$ donne une demi-droite située sur l'axe Oy.

Solution 4.2.9 (M. Chammas) Note : 13
Examinateur : ne parle pas, sauf pour dire de passer à la suite lorsqu'on bloque.

(1) Soit $P \in E_n$ et $\delta = \mathrm{d}(P, A)$. $K = A \cap \overline{B}(P, \delta + 1)$ est un compact (fermé borné en dimension finie) et $Q \mapsto \|P - Q\|$ est une application continue donc elle atteint son minimum sur le compact K et ce minimum est aussi un minimum sur A.

(2) On étudie la fonction $f(x) = x^4 - 3x^2 - a$ sur $[0, 2]$: $f'(x) = 4x(x - \sqrt{\frac{3}{2}})(x + \sqrt{\frac{3}{2}})$ d'où

x	0		$\sqrt{\frac{3}{2}}$		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-a$	$\searrow$	$-9/4 - a$	$\nearrow$	$4 - a$

$|f|$ atteint donc sa borne supérieure en 0, 2 ou $\sqrt{\frac{3}{2}}$. On cherche alors a tel que $\max\{|a|, |4 - a|, |9/4 + a|\}$ soit minimum.

(3) Même combat mais avec 2 paramètres (l'examinateur m'a dit que j'avais le droit d'utiliser MAPLE).

Solution 4.2.10 (K. Boubaker) Note : 13
Examinateur : Jacubowicks
Durée de l'oral : 20'...

(1) On réécrit f sous la forme $f(x, y) = -\dfrac{\sin u}{u} \sin v$ avec $u = \dfrac{x - y}{2}$ et $v = \dfrac{x + y}{2}$. $g(u, v) = -\dfrac{\sin u}{u} \sin v$ est $\mathcal{C}^\infty$ comme produit d'une fonction D.S.E. par une autre fonction D.S.E.

et, par composition, f est $\mathcal{C}^\infty$.
Ce raisonnement rend les questions 2 et 3 inutiles...