SPÉCIALE MP* : ORAL 2008

Mis à jour le 6 juin 2010 à 18:55

– 32 exos des ENS + 2 ADS,
– 24 exos de l'X + un ADS,
– 22 exos des Mines,
– 45 exos de Centrale.

Avec la contribution de

BELZ	Vincent
BOUBAKER	Kais
BOUTONNET	Rémi
CAMUS	Mickael
CARON	Stéphane
CAZASSUS	Guillem
CHAARI	Firas
DALSTEIN	Boris
DE PAEPE	Guillaume
DENAT	Jean Baptiste
DIOT-G1RARD	Sarah
FENEUIL	Joseph
FOURQUET	David
GALIMBERTI	Arnaud
HOULLIER	Marc
JAMAUX	Pierrick
LAFARGE	Denis
LE M0IGNE	Nicolas
LEDUC	Laetitia
LÉRIQUE	Sebastien
LEROY	Laure
MALLEIN	Bastien
MOUCHOUS	Michael
PAÏS	Vincent
PÉCASTAING	Vincent
PESSINET	Olivia
PEYRAT	Jean-Baptiste
RABIE	Mikael
RAFAÏ	Cyprien
RICHERT-BOTTE	Ulysse
ROQUES	Yoann
SABBAH	Benjamin
THORENT	Benjamin
YELLES	Lotfi
ZHOU	Delong

1. Sujets posés aux Écoles Normales Supérieures à l'oral 2008

1.1. **Oral Maths Ulm.**

Exercice 1.1.1.

(1) Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = BA$ montrer que $\exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient triangulaires.

(2) On ne suppose plus que A et B commutent montrer que $\exists P, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telles que PAQ et PBQ soient triangulaires.

(3) Soient f et g deux fonctions de $\mathcal{C}([0,1],[0,1])$ telles que $f \circ g = g \circ f$ (et oui encore une histoire de commutation) et f décroissante. montrer que $\exists c \in [0,1]$ telle que $f(c) = g(c) = c$.

Exercice 1.1.2.

(1) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ ayant exactement k coefficients non nuls.
Montrer que P a au plus $2k-1$ racines réelles distinctes.
Montrer ensuite que c'est la meilleure majoration (i.e. que $\forall k, \exists P$ qui atteint la majoration).

(2) Montrer qu'il existe une infinité d'entiers $n \geqslant 0$ tels que $2^n = 7...$ (i.e. le développement décimal commence par 7).

(3) Soit S un sous-ensemble infini du plan, tel que $\forall\,(x,y) \in S^2$, $\mathrm{d}(x,y) \in \mathbb{N}$.
Montrer que tous les points de S sont alignés.

Exercice 1.1.3.

(1) Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Prouver qu'il existe T et T' triangulaires supérieures et σ permutation de $[\![1,n]\!]$ telles que : $M = TP_\sigma T'$ où P_σ est la matrice de permutation associée à σ : $P_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)})$.
Dans cette écriture, T et T' ne sont pas uniques. Montrer que par contre, la permutation σ l'est.

(2) Le même que Tata (1.1.1 (3)), avec en plus : que se passe-t-il si f est croissante ?

Exercice 1.1.4.

(1) Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie, $u, v \in \mathcal{L}(E)$.
   a) Montrer $\exists t \in \mathbb{C} \mid u + tv$ inversible $\Rightarrow \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(v) = \{0\}$.
   b) On suppose $uv = vu$. Montrer que $\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(v) = \{0\} \Rightarrow \exists t \in \mathbb{C} \mid u + tv$ inversible.

(2) Soit f continue de $[0,1]$ dans $[0,1]$ telle qu'il existe a, b tels que $f(b) \leqslant a < b \leqslant f(a)$. On pose $p = \min\{x \in [a,b] \mid f(x) = x\}$.
Montrer que p existe. Si f n'a aucun point fixe entre 0 et a, montrer que f^2 en a un.
De même si on note $q = \max$ des points fixes de f plus petit que a.
En fait, le but de l'exo est de prouver que f^2 a un point fixe qui n'en est pas un de f.

Exercice 1.1.5.
Soient f et g deux fonctions telles que $f'' + fg = 0$ avec $g > c > 0$.

(1) Montrer que f admet une infinité de racines.
(2) Montrer que $\det\left(e^{a_i b_j}\right)_{i,j\in[1,n]} \neq 0$ avec a_i distincts et b_j distincts.

Exercice 1.1.6.

(1) Dans $\mathbb{R}_n[X]$ on note E l'ensemble des polynômes à n racines distinctes. montrer que E est ouvert.
(2) a) Soit $a_1, \ldots, a_n$ des entiers relatifs premiers dans leur ensemble, montrer qu'il existe une matrice P de taille n, à coeff dans $\mathbb{Z}$, dont la first line est $(a_1, ..., a_n)$ et de déterminant 1 ou -1.
   b) Soit A dans $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{Z})$. Montrer qu'il existe P dans $\mathrm{GL}_p(\mathbb{Z})$, et Q dans $\mathrm{GL}_q(\mathbb{Z})$ telles que PAQ soit de la forme :

$$\begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & d_r & \\ & 0 & & 0 \end{pmatrix}.$$

   avec $d_1|d_2...|d_r$.

1.2. **Oral Maths Ulm-Lyon-Cachan.**

Exercice 1.2.1.
E $\mathbb{C}$-ev, $u \in \mathcal{L}(E)$, $r(u) = \sup\{|\lambda|, \lambda \in \mathrm{Sp}(u)\}$
Montrer que ces 3 propositions sont équivalentes :

(1) Il existe une norme N telle que $N(u) < 1$;
(2) $r(u) < 1$;
(3) $\lim\limits_{n\to\infty} u^n = 0$.

Exercice 1.2.2.

(1) Soit P un polynôme trigo : $P(\theta) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta)$.
   Montrer que P a au moins $2n$ racines dans $[0, 2\pi[$.
(2) Soit $q \geqslant 1$, k un entier relatif, et β un réel.
   Calculer $\sum\limits_{j=1}^{q} \exp(ik(\frac{2j\pi}{q} + \beta))$.
(3) Calculer $\dfrac{1}{n+1} \sum\limits_{j=0}^{n} P(\frac{2j\pi}{n+1} + \beta)$.
(4) Soit $A = \{x \in [0, 2\pi[\mid P(x) \geqslant 0\}$ que pouvez vous dire de A ?
   On suppose P de moyenne nulle sur une période, montrer que la longueur de A est supérieure à $\dfrac{2\pi}{n+1}$.

Exercice 1.2.3.

(1) Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 f'(x)\neq g'(y)$. On définit $h\ :(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto(x+y,f(x)+g(y))\mathbb{R}^2$.
Montrer que h est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme.

(2) On suppose de plus que $f'(x)\geqslant k>0$ et g bornée. Montrer que $\mathrm{Im}(h)=\mathbb{R}^2$.

Exercice 1.2.4.

(1) Est-ce que $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ est connexe par arcs ?

(2) Est-ce que $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})=\{M\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})\mid\ \det M>0\}$ est connexe par arcs ?

(3) Est-ce que $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ est connexe par arcs ?

Exercice 1.2.5.
Soient $a\neq b\in\mathbb{R}$, et $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$.

(1) Montrer que $\exists!\ P\in\mathbb{R}_3[X]\mid P(a)=\alpha,P(b)=\beta,P'(a)=\gamma,P''(a)=\delta$.

(2) Soit $\sigma=(x_0=a,\dots,x_n=b)$ une subdivision de $[a,b]$ et
$$S_\sigma=\left\{f\in\mathcal{C}^2([a,b])\mid\forall i,f_{|[x_i,x_{i+1}]}\text{ est un polynôme de degré}\leqslant 3\right\}.$$
Montrer que c'est un ev de dimension finie. Quelle est sa dimension ?

(3) Soit $f\in S_\sigma$, et on suppose que $\forall i,f(x_i)=0$.
Montrer que $\int_a^b f''^2(t)dt=f'(b)f''(b)-f'(a)f''(a)$.

(4) Soit $\varphi\in\mathcal{C}^2([a,b])$, montrer que
$$\exists!\ f\in S_\sigma\mid\forall i\ f(x_i)=\varphi(x_i),f'(a)=\varphi'(a),f'(b)=\varphi'(b).$$

Exercice 1.2.6.
Exercice : Soit $E=\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ et $T:u_n\to\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n u_i$.

(1) Valeurs propres et vecteurs propres de T.

(2) Calculer $\mathrm{Ker}(T-\lambda\,\mathrm{Id})^2$.

(3) Quels sont les sous-espaces propres de dimension finie de E stables par T ?

Exercice 1.2.7. Soit $A\in\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ et $X\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ telles que
$$X'(t)=A(t)X(t)-X(t)A(t)$$

(1) Montrer que $\forall k\geqslant 0,\quad \mathrm{Tr}(X(t)^k)$ est indépendante de t.

(2) Montrer que les valeurs propres de $X(t)$ sont indépendantes de t.

(3) Il y avait une troisième question : montrer que $X(t)$ est semblable à $X(0)$ d'après un gars que j'ai interrogé l'après-midi.

Exercice 1.2.8.

(1) Déterminer tous les morphismes continus de $\mathbb{U}$ dans $\mathbb{C}^*$.
(2) Déterminer tous les morphismes continus de $\mathbb{U}$ dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.

Exercice 1.2.9.
Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de déterminant 1, $U_0 \in \mathbb{R}^2$ de norme 1.
Déterminer le comportement de la suite U_n définie par $U_{n+1} = \dfrac{MU_n}{\|MU_n\|}$.

Exercice 1.2.10.
Soit H un compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ stable par produit. Montrer que H est un sous groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 1.2.11.
Soit $P \in \mathbb{C}[x]$ de degré supérieur où égal à 2.
A tout nombre complexe z on associe la suite (u_n) définie par :

$$\{u_0 = z,\ u_{n+1} = P(u_n)\}$$

On considère l'ensemble $K = \{z \in \mathbb{C} \mid |u_n| \text{ ne tend pas vers l'infini}\}$.

(1) Montrer que K est compact.
(2) Montrer que son complémentaire est connexe par arcs.

1.3. **Oral Maths Lyon.**

Exercice 1.3.1.

(1) Soit

$$\begin{aligned} T : \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) &\to \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f &\mapsto \int_0^x f \end{aligned}$$

  a) Montrer qu'aucun sev de dimension 1 n'est stable par T.
  b) Montrer qu'aucun sev de dimension finie n'est stable par T.

(2) Soit a_n une suite de réels > 0. On suppose que $\exists A > 0, \quad \exists k \in \mathbb{N}, \exists (\alpha_i)_{i\in[1,k]}, (\beta_i)_{i\in[1,k]}$ avec $\beta_1 \neq \alpha_1$ tels que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = A\dfrac{n^k + \alpha_1 n^{k-1} + \cdots + \alpha_k}{n^k + \beta_1 n^{k-1} + \cdots + \beta_k}$.
Mq $\exists c > 0 \quad | \quad a_n \sim cA^n n^{\alpha_1 - \beta_1}$.

Exercice 1.3.2.
Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, T-périodique. On considère $V(f) = \displaystyle\int_0^T \int_0^T |f(s) - f(t)|^2 \,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t$

(1) Montrer que $(V(f) = 0)$ est équivalent à f constante.
(2) On suppose f de classe $\mathcal{C}^1$. Exprimer $V(f)$ en fonction des coefficients de Fourier de f.
(3) soit F une fonction k-lip. On suppose que l'E.D. $y' = F(y)$ admet une solution non constante T-périodique. montrer que $T \geqslant \dfrac{2\pi}{k}$.

Exercice 1.3.3.
Soit u un endomorphisme unitaire (dans un espace hermitien...), on “sait” que toutes ses valeurs propres sont de module 1. On suppose qu'il existe $\theta \in]0,\pi[$ et $\alpha \in [0,\pi]$ tel que toutes les valeurs propres de u soient de la forme $\lambda = \mathrm{e}^{i\psi}$ avec $\psi \in [\alpha, \alpha+\theta]$, θ étant choisi minimal.

(1) Montrer que $\|u - \lambda \operatorname{Id}\| \geqslant \sin\frac{\theta}{2}$ (où $\|.\|$ est la norme subordonnée de la norme infinie (?)).

(2) Pour quels θ a-t-on $\|u - \lambda \operatorname{Id}\| \leqslant \dfrac{1}{2}$?

Exercice 1.3.4.
On note $\mathcal{A}_n = \{$matrices antisymétriques (réelles) de taille n$\}$, et on définit f de $\mathcal{A}_n$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par

$$f(X) = (I_n + X) \cdot (I_n - X)^{-1}$$

(1) Montrer que f est bien définie, et continue.

(2) Montrer que $\operatorname{Im} f \subset \mathrm{SO}(n)$.

(3) Montrer que $\operatorname{Im} f = \mathrm{SO}(n)$.

Exercice 1.3.5.
Même exo que celui de Rémi Boutonnet (1.3.2)

Exercice 1.3.6.
On considère $1 \leqslant r < n$ deux entiers et on pose $E_n = X^n + \mathbb{C}_{n-1}[X]$ (sous espace affine).
On se donne $\mu = (\mu_1, ..., \mu_{n-r}) \in \mathbb{C}^{n-r}$ et $a = (a_0, ..., a_{r-1}) \in \mathbb{C}^r$.

(1) Prouver qu'il existe un unique $P \in E_n$ tel que
 – $P^{(r)} = \dfrac{n!}{r!}\displaystyle\prod_{j=1}^{n-r}(X - \mu_j)$,
 – $(P(0), ..., P^{(r-1)}(0)) = a$.

 On note $P_{\mu,a}$ ce polynôme. Soit f de $\mathbb{C}^{n-r}\times\mathbb{C}^r$ dans E_n qui à (μ, a) associe $P_{\mu,a}$.

(2) Montrer que f est continue.

(3) Soit $E_n(r)$ l'ensemble des P dans E_n qui admettent une racine d'ordre au moins $r+1$. Montrer que $E_n(r)$ est un fermé de E_n.

Exercice 1.3.7.
Soit V evn réel, V^r evn produit (muni de la norme infinie).

(1) Soit $W = \{(v_1, ..., v_r) \in V^r \mid \{v_1, ..., v_r\}$ liée $\}$.
 Montrer que W est fermé.

(2) Si $n \geqslant r$, que dire de $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \operatorname{Rg}(A) \geqslant r\}$?

Exercice 1.3.8.
On note :
• $\mathcal{B} = \overline{\mathcal{B}}(O, 1)$(dans $(\mathbb{R}^n, \|.\|_2)$).
• $\mathcal{S} = \mathcal{S}(O, 1)$
• A un fermé convexe inclus dans B, admettant O dans son intérieur
• $f : x \in \mathcal{S} \to \sup\{t \geqslant 0 \mid t.x \in A\} \in \mathbb{R}_+$

(1) Montrer que f est bien définie, et minorée par une quantité strictement positive.
(2) Qu'est-ce qu'on va faire maintenant ? (démontrer la continuité de f pardis !)
(3) Montrer que A et B sont homéomorphes.
(4) bonus : montrer que toute bijection continue entre deux compacts est bicontinue.

1.4. **Oral Maths Cachan.**

Exercice 1.4.1.

(1) Un petit lemme pour s'échauffer :
Soit f, g deux éléments de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On a $f = o(g)$, $g \geqslant 0$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t$ diverge.
Montrer que $\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = o\left(\int_0^x g(t)\mathrm{d}t\right)$.
(2) On définit alors $\varphi(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}\, x^{\beta}$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$, $\quad J(x) = \displaystyle\int_1^x \varphi(t)\mathrm{d}t$ et $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$.
Montrer que J est équivalent à φ en $+\infty$.

Exercice 1.4.2.

(1) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, montrer que les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe de celles de P (fait dans l'année, mais je me souvenais plus qu'il fallait développer P'/P).
(2) On prend toujours $P \in \mathbb{C}[X]$, de racines $\lambda_1 < \cdots < \lambda_p$ toutes réelles.
On considère la suite définie par
$$x_0 > \lambda_p, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{P(x_n)}{P'(x_n)}$$
Qu'en dire ? Quelle vitesse de convergence ? (puis avec l'indication : introduire $g(x) = x - \frac{P(x)}{P'(x)}$).
Qu'est-ce qui se passe si λ_p est racine de P' ? Puis mêmes questions en remplaçant P par une fonction $\mathcal{C}^1$ et (presque) quelconque.

Exercice 1.4.3.
Soient $A, B \in \mathcal{M}_{d,r}(\mathbb{R})$ on définit $< A, B >= \sum a_{i,j}b_{i,j}$ et $N(A) = \sqrt{< A, A >}$.

(1) Montrer que $< ., . >$ est un produit scalaire.
(2) Montrer que $< A, B >= \mathrm{Tr}(B^{\mathrm{T}}A)$.
(3) Soit $M \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$; $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$; $B \in \mathcal{M}_{m,q}(\mathbb{R})$.
Montrer que $< MA, B >=< A, M^{\mathrm{T}}B >$.
(4) Soit $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$; $B \in \mathcal{M}_{d,r}(\mathbb{R})$; $X \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ tel que X minimise $N(AB - BX)$.
Montrer que $B^{\mathrm{T}}BX = B^{\mathrm{T}}AB$

EXERCICE 1.4.4. Soit $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique et $\alpha > 0$. On considère $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telle que

$$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad (\nabla f(v) - \nabla f(u) | v - u) \geqslant \alpha \|v - u\|^2. \tag{1}$$

(1) Montrer que

$$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad f(v) - f(u) \geqslant \frac{\alpha}{2}\|v - u\|^2 + (\nabla f(u) | v - u). \tag{2}$$

Soit K un convexe fermé de $\mathbb{R}^n$, f_K la restriction de f à K.

(2) Montrer que $\inf\limits_{u \in K} f_K(u)$ existe et que cette borne inférieure est atteinte.

(3) Montrer que $u_0 \in K$ réalise le minimum de f_K sur K ssi

$$\forall u \in K, \quad (\nabla f_K(u_0) | u - u_0) \geqslant 0.$$

EXERCICE 1.4.5.

(1) Soit $f \in \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R})$. Soit $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n}) - \int_0^1 f$.
Donner une CNS sur f pour que la série de terme général u_n soit convergente.

(2) Soit f de $[0,1]$ dans lui même, 1-lipschitzienne.
Étudier la suite définie par :
$u_0 \in [0,1]$ et pour $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = \frac{u_n + f(u_n)}{2}$.

EXERCICE 1.4.6.
Soit M_n avec des 2 sur la diagonale, des -1 au dessus et en dessous et $m_{n,1} = m_{1,n} = -1$.
Montrer que la matrice M_n est définie non positive
Je finirai de texer le reste de l'exo plus tard c'est trop boulet les claviers mac
Sinon en fait le truc de demander quelle ENS vous voulez etc.. c'est pour signaler que vous avez réussi (en général) (ils m'ont vraiment posé des questions qu'aux oraux ou j'ai plutôt bien marché).
Donc Remsbout et Pec vous inquiétez pas trop ...... vous avez assez posté sur ce sujet pour avoir ULM.

EXERCICE 1.4.7.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive.
Montrer que $\forall X \in \mathbb{R}^n$, $\|X\|^4 \leqslant \langle AX|X\rangle \langle A^{-1}X|X\rangle \leqslant \frac{1}{4}(\sqrt{\frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}}} + \sqrt{\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}})^2 \|X\|^4$.

1.5. **Oral Info.**

EXERCICE 1.5.1. On définit la racine k-ième d'un langage par $\sqrt[k]{L} = \{u | u^k \in L\}$.

(1) Deux petits exemples pour se mettre en appétit :
  a) $A = \{a, b\}$ et $L = (a+b)^*b$: calculer $\sqrt[2]{L}$.
  b) Même question avec $L = a^*ba^*bb$.

(2) On considère désormais un langage L rationnel reconnu par $\mathcal{A} = (Q, A, \delta, i, F)$ un AFDC. On définit

$$\mathcal{B}_q = (Q, A, \delta, i, \{q\})$$
$$\mathcal{C}_q = (Q, A, \delta, \{q\}, F)$$

a) Montrer que $u \in \sqrt[2]{L} \iff \exists q \in Q \mid u \in L(\mathcal{B}_q), u \in L(\mathcal{C}_q)$.

b) Montrer que $\sqrt[2]{L}$ est rationnel.

(3) Montrer que L rationnel $\Rightarrow \sqrt[k]{L}$ rationnel.

(4) On considère $\sqrt{L} = \{u \mid \exists k \geqslant 1 \mid u^k \in L\}$. S'agit-il d'un langage rationnel ?

Exercice 1.5.2.
Jeu de Nim, le principe est on a m vasques, à chaque tour on peut retirer n fruits dans une vasque, le but étant de prendre le dernier fruit.

(1) A deux, il y a une solution gagnante, la trouver en utilisant l'énoncé.

(2) On pose $G(x_1, ...x_m)$ le nombre dont le i-eme terme en base 2 est la somme modulo 2 des i-emes termes en base 2 de $x_1, ...x_m$.
Montrer que si G est nul à un tour, il est nul au suivant.

(3) Montrer qu'on peut rendre G nul à partir de G non nul.
En déduire $G = 0 \Leftrightarrow$ le joueur est perdant.

(4) Puis discussion sur d'autres jeux : on additionne chacun notre tour des entiers entre 1 et 10, le but est d'obtenir 59, quel est le joueur qui va gagner, celui qui joue en premier ou non. Etc...

2. Spéciales MP* : sujets posés à l'école Polytechnique à l'oral 2008

2.1. **Mr Grigis.**

Exercice 2.1.1.

(1) a) $P = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$. On pose $H = \sup |\frac{a_i}{a_m}|, i \leqslant m-1$. Montrer que si α racine de P, alors $|\alpha| < H + 1$.

b) $P \in \mathbb{Z}[X]$, montrer que s'il existe $n \geqslant H+2$ tel que $P(n)$ premier alors P irréductible dans $Z[X]$

(2) Un exercice tout à fait passionnant sur les fonctions de plusieurs variables : trouver f tel que $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 3y - 1$ $\frac{\partial f}{\partial y} = z^2 + 3x$ $\frac{\partial f}{\partial z} = 2yz$. Puis quelques considérations sur les formes différentielles exactes, fermées, les ouverts étoilés ...

Exercice 2.1.2.
Soit A compact en dimension finie tel qu'il existe une boule ouverte incluse dans A.
Soit L l'ensemble des endomorphismes qui stabilisent A.
Montrer que L est un compact.

Exercice 2.1.3.
Soit f une forme bilinéaire sur E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On suppose

$$\forall (x,y) \in E^2,\ f(x,y) = 0 \Rightarrow f(y,x) = 0.$$

Montrer alors que f est symétrique ou antisymétrique.

2.2. **Mr Henry.**

Exercice 2.2.1.
On considère l'équation $x^2 + px + q = 0$, où $p, q \in \mathbb{C}$.

(1) Trouver une CNS sur p et q pour que les racines de l'équation aient même argument.

(2) Même question avec les modules.

Exercice 2.2.2.

(1) On prend $\mathbb{R}^n$, muni d'une norme. On considère la boule $B(\mathrm{Id}, 1)$ de $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ muni de la norme induite. Soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ inclus dans cette boule, et $g \in G$.
Montrer que $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(g), \forall p \in \mathbb{Z}, |\lambda^p - 1| < 1$.
En déduire que $|\lambda| = 1$ puis $\lambda = 1$.

(2) On pose E espace euclidien, $(x_1, ..., x_n) \in E^n$, on pose $M = ((x_i|x_j))$.
Montrer que $\det M \geqslant 0$.
On pose $D(x_1, ..., x_n) = \det M$.
Montrer que $\forall x \in E, \mathrm{d}(x, \mathrm{Vect}(x_1, ...x_n)) = \sqrt{\frac{D(x, x_1, ...x_n)}{D(x_1, ...x_n)}}$.

(3) Soit $P \in \mathbb{Z}[X] | \exists \alpha = \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ racine de P.
Montrer alors que $\forall k \in \mathbb{Z}$, $ks - r$ divise $P(k)$.

Exercice 2.2.3.
Pour $t > 0$ soit $f(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-tx)\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$.
Calculer $f(t)$.
En déduire $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$?

Exercice 2.2.4.

(1) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ où E est un espace hermitien. Chercher les hyperplans stables par u^*.

(2) a) Montrer qu'il existe $\mathcal{O} = (O_i)_{i\in I}$ une famille dénombrable d'ouverts de $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall O \text{ intervalle ouvert de } \mathbb{R},\ \forall x \in O,\ \exists i \in I \mid x \in O_i \subset O.$$

b) On dit que a est un point isolé de $A \subset \mathbb{R}$ ssi $\exists O$ intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ tel que $A \cap O = \{a\}$.
Montrer que $\{a \in A \mid a \text{ isolé}\}$ est dénombrable.

c) Chercher les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifient

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ |x-y| < |x-z| \Rightarrow |f(x)-f(y)| < |f(x)-f(z)|.$$

(Indication : $\alpha\,\mathrm{Id}+\beta$ convient pour $\alpha \neq 0$, montrer que f injective, continue sur $\mathbb{Q}$ puis sur $\mathbb{R}$. Si f convient, alors il en est de même de $g = \alpha f+\beta$ et de $h(x) = f(x+a)$.)

2.3. **Mr Langevin.**

Exercice 2.3.1. Pour les examinateurs ça se précise : on ne peut pas savoir avec qui on tombe ! On a quand même identifié Rosso (avec une tête à la d'Artagnan) et Langevin (avec ses exos...).

(1) On considère un quadrilatère $ABCD$ convexe dans le plan. Sur chaque côté on construit un carré qui s'appuie sur le côté et tourné vers l'extérieur, et on nomme P, Q, R, S les centres de ces carrés. Montrer que PR et QS sont orthogonaux.

(2) On pose $u_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1+\sin^2(nt)}$.
Étudier la suite ou la série (c'est ce qu'il m'a dit) des u_n.

(3) Calculer $\tan^2(\frac{\pi}{10}) + \tan^2(\frac{3\pi}{10})$.
(Il m'a dit : "Eh bien, qu'est ce que vous pensez du 10 ?").

Exercice 2.3.2.

(1) On considère un triangle ABC, A', B', C' les pieds des hauteurs, pourquoi $AA'.BC = BB'.AC = CC'.AB$ (l'examinateur cherche à déstabiliser le candidat sur toutes ses propositions).

(2) On considère a, b, c trois complexes, CNS sur a, b, c pour que O le centre du repère soit à l'intérieur du triangle

---

Exercice 2.3.3.

(1) On considère 4 complexes a, b, c, d tels qu'il existe z qui vérifie
$$(z-a)(\bar{z}-\bar{b}) = (z-c)(\bar{z}-\bar{d}) \in \mathbb{R}.$$
Montrer que les points A, B, C, D sont soit cocycliques soit alignés.

(2) Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{(\frac{1}{2}+x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x-1)}}$.

(3) On considère un espace vectoriel E de dimension infinie, f un endomorphisme dont le noyau est de dimension finie. Montrer que les noyaux de toutes les puissances de f sont de dimension finie.

Exercice 2.3.4.

(1) Décomposer $P(t) = t^4 + t^3 + t^2 + t + 1$ sur $\mathbb{R}[X]$. (sans cosinus svp)

(2) Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{t^2-1}{P(t)}dt$. (là, je lui fait sans calcul en utilisant juste le fait que le polynôme est symétrique, pas ce qu'il attendait visiblement, et pour le coup il m'embarque dans des histoires de polynômes)

(3) Montrez que si $P \in \mathbb{C}[X]$ est tel que (z racine de P) $\Rightarrow$ ($\frac{1}{\bar{z}}$ racine P), alors P est proportionnel à $X^{\deg P}\bar{P}(\frac{1}{X})$. Représentez d'ailleurs la transformation géométrique $z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$. Montrez que ce que je viens de vous dire est faux et corrigez le (visiblement, il improvise sa planche).

(4) Soit P à coefficients entiers, irréductible sur $\mathbb{Z}[X]$ et admettant une racine z_0 dans $\mathbb{U}$. Montrer que $P(X) = \pm X^{\deg P} P(\frac{1}{X})$. (indication après 5 min de blanc : considérer l'ensemble $\{Q \in \mathbb{Z}[X], Q(z_0) = 0\}$)

Exercice 2.3.5.

Soit E un $\mathbb{C}$-e.v, X une partie finie de E telle que $0 \notin X$. Construire $f \in E^* \mid \prod_{x\in X} f(x) = 1$.

Exercice 2.3.6.

(1) Soit a, b et c trois complexes distincts de module 1.

a) Montrer que $d = \dfrac{b}{a}\left(\dfrac{c-a}{c-b}\right)^2 \in \mathbb{R}^+$, interprétation géométrique ?

b) Soit A, B et C trois points d'un cercle de centre Ω. Déduire de la question précédente (α, β, γ) tel que
$$\alpha\overrightarrow{\Omega A} + \beta\overrightarrow{\Omega B} + \gamma\overrightarrow{\Omega C} = \overrightarrow{0}.$$

(2) Série de Fourier de $(\cos x)^5$.

(3) Est-il possible de trouver une suite de réel a_n tel que $\sin(2x) = \sum a_n(\sin x)^n$?

Exercice 2.3.7.

(1) Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{1+\sin(2t)}dt$.

Sachant qu'il m'a laissé galérer dessus, retrouver mes formules de trigo, pour ensuite me faire vérifier en utilisant la grande relation $1 = \cos^2 + \sin^2$...

(2) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, avec $\bigcup_{1 \leqslant n} \operatorname{Ker} f^n = E$ et $\dim \operatorname{Ker} f = 1$.
Il me demande d'abord de montrer que f est surjective, puis se corrige immédiatement et me demande que dire de f ?

EXERCICE 2.3.8.
Coefficients de $\sum_{i=1}^{n} (X - x_i)^{n-1}/P'(x_i)$ où $P(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - x_i)$.

2.4. **Mr Rosso.**

EXERCICE 2.4.1.

(1) W espace vectoriel complexe tel que $W = \bigoplus_{i=1}^{n} W_i$, $u \in \mathcal{L}(W)$ tel que $u(W_i) \subset W_{i+1}$. a racine n^{ieme} de l'unité.
Montrer que si λ est valeur propre de u, alors $a\lambda$ est valeur propre de u.
(2) α_n une suite réelle croissante qui diverge, u_n une suite d'un evn telle que $\sum u_n$ converge.
Montrer que, si $v_n = \dfrac{1}{\alpha_n} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k u_k$ alors $v_n \to 0$.

EXERCICE 2.4.2.

(1) Le même exercice (1) que thebast avec Grigis, on est passé à la même heure exactement. Je ne sais pas s'ils s'arrangent entre eux.
(2) On considère une série entière $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence R non nul, et une suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de complexes non nuls tels que $\frac{b_{n-1}}{b_n} \to \beta$ où $|\beta| < R$. On pose $c_n = \sum_{p+q=n} a_q b_p$.
Montrer que $\dfrac{c_n}{b_n} \to f(\beta)$.

EXERCICE 2.4.3.

(1) $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, A symétrique > 0, B symétrique, $S = AB + BA$ symétrique > 0. Montrer que $B > 0$.
(2) $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de rayon $R > 0$.
Montrer que s'il existe c tel que $f'(c)$ différent de 0, alors il existe un voisinage de c tel que la restriction de f à ce voisinage est injective.

EXERCICE 2.4.4.
Soient V un $\mathbb{C}$.ev, $A \in \mathcal{L}(V)$ et $x \in V$ fixés. On considère $\mathcal{P} = \{P \in \mathbb{C}[X] \mid P(A)(x) = 0\}$

(1) Montrer que $\exists \mu_x \in \mathbb{C}[X] | \mathcal{P} = \mu_x.\mathbb{C}[X]$. (C'est un idéal.)
(2) Montrer que $\exists x \in V | \mu_x = \Pi_A$ (polynôme minimal de A).
(3) Comment ça se passe dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$?

Exercice 2.4.5.
On prend $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On considère la fonction $f : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n; (X, Y) \mapsto (X^T Y, X^T AY, ..., X^T A^{n-1} Y)$
Montrer que f est surjective si et seulement si le polynôme caractéristique de A est le polynôme minimal (de A).

Exercice 2.4.6.
On considère trois points de $\mathbb{R}^3$: $A = (a, 0, 0), B = (0, b, 0)$ et $C = (0, 0, c)$. Étant donné $M = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}_+^3$, chercher a, b, c tels le tétraèdre (O, A, B, C) soit de volume minimal sous la contrainte $M \in (O, A, B, C)$.

Exercice 2.4.7.
Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant :

(i) $AB - BA = C$,

(ii) $AC = CA$,

(iii) $BC = CB$.

Montrer que A, B, C sont simultanément trigonalisables.

Exercice 2.4.8.
On dit que deux matrices A et B de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ anticommutent lorsque $AB = -BA$.
Soit $(A_1, A_2, ..., A_k)$ une famille de matrices anticommutantes deux à deux. Quel est le cardinal maximum que peut avoir cette famille ?

Exercice 2.4.9.
Soit K un compact convexe de $\mathbb{R}^n$ ne contenant pas l'origine. Montrer qu'il existe l une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$ qui soit strictement positive sur K.
Bonus : montrer qu'il existe une famille de boules fermées de $\mathbb{R}^n$ d'intersection K.

Exercice 2.4.10.
Pour tout k dans $\mathbb{N}$ on pose $P_k(X) = \dfrac{X(X-1)...(X-k+1)}{k!}$ et $P_0 = 1$.

(1) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $P_k(n) \in \mathbb{Z}$.

(2) Q de degré k tel qu'il existe n dans $\mathbb{N}$ avec $Q([\![n, n+k]\!]) \subset \mathbb{Z}$.
Montrer qu'on peut voir Q comme une combinaison linéaire de P_i avec des scalaires entiers.

(3) Soit $\dfrac{P}{Q}$ une fraction rationnelle telle que $\dfrac{P}{Q}(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.
Montrer que $Q|P$.

Exercice 2.4.11.
Soit (S_n) une suite réelle, on pose $M_n = (S_0 + ... + S_n)/(n+1)$ et, pour $1 \geqslant \alpha > 0$, $T_n = \alpha S_n + (1-\alpha)M_n$.
On suppose que (T_n) converge.
Montrer que (S_n) converge et donner sa limite.

2.5. **Divers.**

Exercice 2.5.1. ADS Info
Sujet : PASSIONNANT ! ! ! Malheureusement, ça devait sortir d'un vieux bouquin (illisible...) et il n'a bien entendu pas voulu me donner les références. En gros, le document comptait une trentaine de pages et se décomposait en trois parties, du plus général au plus pratique :

(1) Algèbre des séries formelles $\mathbb{K}[t]$ sur un anneau $\mathbb{K}$ intègre ;
(2) Séries génératrices rationnelles (avec un important théorème de caractérisation) ;
(3) Application aux graphes valués.

Je pense qu'il n'aurait pas osé donner ça à quelqu'un ne faisant pas info, du moins pas la partie sur les graphes qui n'était pas évidente. Le début était plus proche des maths dont on a l'habitude, notamment le théorème de caractérisation (partie 2) qui devrait rappeler des souvenirs à certains :
Théorème : soit $f(t) = \sum\limits_{n \geqslant 0} a_n t^n$ une série formelle sur $\mathbb{K} = C$, $\alpha_1, ..., \alpha_k$ une suite finie de k complexes ($k \geqslant 0$, $\quad \alpha_k \neq 0$). Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $f(t) = \dfrac{N(t)}{D(t)}$, où N est un polynôme de degré $< k$ et $D(t) = 1 + \alpha_1 t + \cdots + \alpha_k t^k$;
(ii) $\forall n, \quad a_{n+k} + \alpha_1 a_{n+k-1} + \cdots + \alpha_k a_n = 0$;
(iii) En écrivant $D(t) = \prod\limits_{i=1}^{r} (t - \delta_i)^{k_i}$, on a $\forall n, \quad a_n = \sum_{i=1}^r P_i(n)\delta_i^n$ où $\deg P_i < k_i$.

Point plus rageant : il ne relève aucune des perches qu'on peut lui tendre.
Exemples : l'auteur démontre l'équivalence entre (ii) et (iii) avec des ev. mais on peut aussi le faire en diagonalisant l'opérateur *décalage*, tel lemme non prouvé dans la première partie est assez facile à démontrer, etc.
Un conseil donc : ne pas perdre trop de temps pendant la préparation à chercher les démos ou à développer des idées originales ; ici, le texte était trop dense pour pouvoir les caser pendant la présentation, et j'ai dû faire les transparents en quatrième vitesse pour compenser le temps perdu à préparer des perches qu'il n'a pas relevées...
La dernière partie en valait vraiment la peine : en définissant des polynômes D et $N_{i,j}$ (sordides) sur des graphes valués dans $\mathbb{K}[X]$, on ramenait des problèmes de dénombrement au calcul de polynômes. Pour ceux que ça intéresse (conjecture d'existence un peu osée, je l'admets) voici les formules :

$$D(t) = \sum_{(\gamma_1, \ldots, \gamma_r)} (-1)^r v(\gamma_1) \cdots v(\gamma_r)$$

$$N_{i,j}(t) = \sum_{(\eta, \gamma_1, \ldots, \gamma_r)} (-1)^r v(\eta) v(\gamma_1) \cdots v(\gamma_r)$$

En notant v la valuation, η un chemin de i à j et γ_i des cycles disjoints du graphe. On montre alors le résultat qui pastèque :

$$\sum_{\omega : s \to t} v(\omega) = \frac{N_{i,j}}{D}$$

L'air de rien cette relation est vraiment énorme, et l'auteur donnait des exemples pour l'illustrer. Notamment, un problème de dénombrement (nombre de chemins avec déplacements cardinaux sur une grille infinie ne comportant pas la séquence Nord-Sud ou Sud-Nord) se ramène à un langage rationnel, qui se traduit par un automate, qui est en fait un graphe auquel on peut appliquer le résultat précédent. Malheureusement, il ne m'a posé qu'une seule question à la fin : appliquer ce résultat à une simplification de ce dernier problème (chemins de $(Nord + Est)^*$) ; on trouve un automate à un seul état, $N_{0,0} = 1$, $D = 1 - 2t$: un DSE direct nous donne le résultat 2^n, qu'on aurait pu deviner...

3. Spéciales MP* : sujets posés aux Écoles des Mines à l'oral 2008

Exercice 3.1.1.

(1) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{i+j}}{i+j}$ (une indication est donnée : $\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t=\frac{1}{n+1}$).

(2) $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique. On note $A_p=(a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant p,1\leqslant j\leqslant p}$

a) Montrer que $A\geqslant 0\Rightarrow \forall p\in[1;n],\det A_p\geqslant 0$.

b) Montrer que A définie positive $\Leftrightarrow$ $\forall p\in[1;n],\det A_p>0$. Indication : Pour la réciproque, on pourra procéder par récurrence.

Exercice 3.1.2.

(1) Chercher les solutions 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$ de $y''+y=|\sin x|$. En donner aussi la décomposition en série de Fourier.

(2) Soit E un ev de dimension n et $u_1,...,u_p$ des endomorphismes de E.
Si $u_1+...+u_p=\mathrm{Id}$ et $\mathrm{Rg}(u_1)+...+\mathrm{Rg}(u_p)\leqslant n$ montrer que les u_i sont des projecteurs.

Exercice 3.1.3.

(1) Déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{(n+k)^\alpha}$ en fonction de α.

(2) Soient p et q deux projecteurs de E qui commutent.

a) Montrer que $p\circ q$ est un projecteur.

b) Déterminer $\mathrm{Im}\,p\circ q$.

c) Déterminer $\mathrm{Ker}\,p\circ q$.

(3) Soit $(a_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $|\ a_n\ |\leqslant 1$. Calculer

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2t}\times\left(\sum_{p=n}^{+\infty}a_p\frac{t^p}{p!}\right)\mathrm{d}t.$$

(4) Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note $\mathrm{Graph}(f)=\{(x,f(x)),x\in\mathbb{R}\}$

a) Montrer que $\mathrm{Graph}(f)$ est fermé.

b) La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 3.1.4.

(1) Montrer que pour tout endomorphisme f de $\mathrm{GL}_n(E)$ où E est un espace euclidien, il existe u dans $\mathcal{O}(E)$ et g dans $\mathcal{S}^+(E)$ tq $f=ug$. Y-a-t'il unicité du couple ?

(2) On considère $f(x)=\int_0^\infty\frac{t^{x-1}}{1+t}dt$.

a) Domaine de définition de f.

b) Montrer que f est $\mathcal{C}^1$

Exercice 3.1.5.

(1)

a) Convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ix^2}\,\mathrm{d}x$?

b) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

c) (En déduire) la valeur de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ix^2}\,\mathrm{d}x$ puis de $C = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\,\mathrm{d}x$.

(2) Montrer que $x \in [0,1]$ est rationnel si et seulement si son développement décimal est périodique à partir d'un certain rang.

Exercice 3.1.6.

(1) Soit $P \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$, tel que $P(X^2) = P(X)P(X-1)$

a) Montrer que toute racine de P est de module égal à 1.

b) Déterminer les racines de P dans le cas où son degré est supérieur ou égal à 1.

c) Déterminer alors P.

(2) Convergence et calcul de la série

$$\sum_n \frac{1}{\sum_{0\leqslant k\leqslant n} k^2}$$

Exercice 3.1.7.

(1)

a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \Rightarrow \mathrm{Re}(\lambda) < 0$.
Montrer que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{tA} = 0$.

b) On définit $\varphi \ : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto AM + MB$ où B vérifie les mêmes hypothèses que A. Chercher $\operatorname{Ker}\varphi$.

c) On pose $M_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{tA}\,C\,\mathrm{e}^{tB}\,\mathrm{d}t$. Calculer $\varphi(M_0)$.

(2) Chercher $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $3^m - 2^n = 1$.

(3) Convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{[1+(t\sin t)^2]^{3/2}}$.

Exercice 3.1.8.

(1) (20 minutes de préparation)
   a) Rayon de convergence et somme de $\sum \frac{x^{2n+2}}{n(n+1)(2n+1)}$.
   b) En déduire $\sum \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} k^2}$.

(2) On considère la matrice avec que des a sur la diagonale, des b ailleurs. CNS sur a et b pour que la matrice soit inversible. Calcul de l'inverse.

Exercice 3.1.9.

(1) Soit A la matrice avec a sur la diagonale, b au-dessus et c au-dessous. On pose J la matrice avec que des 1, et $P(x) = \det(A + xJ)$.
   a) Que dire du degré de P ?
   b) Calculer $\det A$.
   c) Calculer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal dans le cas $b = c$.
   A l'oral, il m'a posé :
   – comment passer dans le cas $b = c$ avec la formule $b \neq c$?
   – conditions sur a et b pour que A soit inversible,
   – dans ce cas, comment trouver A^{-1} ?

(2) Calculer $I(x) = \displaystyle\int_0^{\pi} \ln(x^2 - 2x\cos t + 1)dt$.

Exercice 3.1.10.

Soit $E = \{n \geqslant 1 \mid \exists P \in \mathbb{R}[X],\ \exists \lambda \in \mathbb{R} \mid P(X)^2 = \lambda^2 + X(X+1)...(X+2n-1)\}$.

(1) Étudier les cas $n = 1$ et $n = 2$.

(2) On suppose $n \geqslant 3$ et (P, λ) un couple solution tq $P(0) = \lambda$.
   Déterminer les racines de $P - \lambda$ et $P + \lambda$.

(3) Soient $a < b$ 2 racines consécutives de $P - \lambda$, montrer que $b = a + 1$ ou $b = a + 3$.

(4) On note $a_0 = 0 > a_1 > .. > a_n$ les racines de $P - \lambda$, montrer que $a_1 = -3$ et $a_2 = -4$ puis déterminer P.

Exercice 3.1.11.

(1) Déterminer tous les morphismes de groupes entre $\mathfrak{S}_n$ et $\{-1, 1\}$. (Indication : montrer que les transpositions ont toutes la même image.)

(2) Soit $f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ continue et tq $f(1) = 0$.
   Soit $f_n(x) = x^n f(x)$.
   a) Montrer que (f_n) CVU sur $[0, a]$, $\sum(f_n)$ CVU sur $[0, a]$ où $0 < a < 1$.
   b) Montrer que (f_n) CVU sur $[0, 1]$.
   c) Montrer que $\sum(f_n)$ CVU sur $[0, 1]$ ssi $f'(1) = 0$.

Exercice 3.1.12.

(1)

a) Soit $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{C})$ telle que, quelque soit $n > 0$, $\displaystyle\int_a^b t^n f(t))\,\mathrm{d}t = 0$.
Montrer que f est nulle.

b) Que se passe-t-il en remplaçant $[a,b]$ par $[0,+\infty[$?

(2) On considère l'équation $\ln(x) + \mathrm{Arctan}(x) - n\pi = 0$.
Montrer il existe une unique solution x_n sur $]0,\infty[$ et étudier la série de terme général $1/x_n$.

Exercice 3.1.13.

(1) Résoudre $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2(x-y)$.

(2) Soit $(e_1,\ldots,e_n)$ famille d'un espace préhilbertien réel E telle que $\forall x \in E, ||x||^2 = \sum_{i=1}^n (x|e_i)^2$. Que peut-on en dire ?

(3) Chercher le lieu des projections orthogonales du sommet d'une parabole sur les tangentes à cette parabole.

Exercice 3.1.14.

(1) On considère k matrices (A_i) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont la somme est égale à l'identité.
On veut montrer l'équivalences des trois propositions :
(1) pour tout i de $[\![1,k]\!]$, $A_i^2 = A_i$,
(2) la somme des rangs des A_i vaut n,
(3) pour tout i différent de j, $A_iA_j = 0$.

(2) On considère
$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \exp(-xt)\,\mathrm{d}t$$
et on veut calculer F.

Exercice 3.1.15.

(1) Déterminer la courbure en $\theta = 0$ de $\rho(\theta) = \ln(\sin\theta + \cos\theta) + 1$.

(2) Nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$?
Montrer que $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et déterminer sa dérivée.
Déterminer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\right) \mathrm{d}t$.
Subsidiaire : $f \in \mathrm{L}^1$?

Exercice 3.1.16.
Introduction : Convoqué à 14h, je commence à 13h50... 10 minutes de préparation, 50 minutes de passage

(1) Mise en bouche :
soit A une matrice et f_A l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui à M associe AM.
   a) Éléments propres de f_A ?
   b) Montrer l'équivalence : f_A diagonalisable $\Leftrightarrow$ A diagonalisable.
(2) Hors d'oeuvre :
soit f l'application qui à la permutation s associe $\sum\limits_{k\in[1,n]} ks(k)$.
Chercher min et max de f, et les permutations qui les réalisent.
(3) Spécialité maison :
Exo 3.1.1 [4] des oraux 2006

Exercice 3.1.17.

(1) On regarde (E) ; $x^2y'' - 4xy' + (x^2 + 6)y = 0$ (mmh !).
Trouver les solutions DSE de (E). Donner la dimension de l'ev des solutions sur $\mathbb{R}$.
(2) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, montrer que $P(X) - X \mid P(P(X)) - X$.
(3) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'on peut décomposer, de manière unique, $A = D + N$ où D est diagonalisable, N est nilpotente, et D et N commutent.
Montrer enfin que si e^A est diagonalisable, A l'est aussi.

Exercice 3.1.18.

(1) Soit a_n telle que $a_0 = 1$ et $a_{n+1} = \dfrac{2n+3}{n+2}a_n$ et $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Expliciter f pour $|x| < \dfrac{1}{2}$.
(2) Soit une parabole et D son axe de symétrie et F son foyer. Un point M de cette parabole.
Soit $T(M)$ la tangente à la parabole en M, $Q(M)$ la droite orthogonale à $T(M)$ passant par M. $T(M)$ et $Q(M)$ coupent D en deux points P et Q.
Montrer que F est le milieu de $[P, Q]$.
(3) Quelques questions de cours : diagonalisation simultanée et séries de Bertrand.

Exercice 3.1.19.

(1) On considère la surface $\mathcal{Q}$ d'équation $x^2 + 2y^2 + (m+1)z^2 + 2yz - 2xz + \varphi(x) = 0$.
Donner la nature de $\mathcal{Q}$ suivant la valeur du paramètre m.
(2) Soit F la fonction suivante :

$$F : x \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-|x-t|}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

a) Déterminer le comportement de F en $+\infty$.

b) montrer que F est l'unique solution de

$$y'' - y = \frac{2}{1+x^2}$$

qui s'annule en $-\infty$ et en $+\infty$.

Exercice 3.1.20.

(1) Soit $A \in \mathcal{M}_{3n}(\mathbb{K})$ telle que $A^3 = 0$ et $\mathrm{Rg}(A) = 2n$.

Montrer que A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(2)

a) Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}} \sin(ax)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a}{a^2+n^2}.$$

b) (Question non posée) Calculer le développement en série de Fourier de $f(t) = \operatorname{ch} at$, $t \in [-\pi, +\pi]$. En déduire la valeur de $I(a)$.

Exercice 3.1.21.

(1)

a) Montrer qu'il existe P_n et Q_n polynômes réels tels que : $1+X = Q_n \circ P_n(X) + o(X^n)$

b) Soit N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente. Montrer qu'il existe M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tq : $I_n + N = \exp(M)$.

(2)

a) DSE de $f\ : x \mapsto \ln(x^2 - 2\cos(\theta)x + 1)$.

b) DSF de $g\ : \theta \mapsto \ln(x^2 - 2\cos(\theta)x + 1)$.

c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} (\ln(x^2 - 2\cos(\theta x) + 1)\,\mathrm{d}\theta$.

Exercice 3.1.22.

(1) Soit $\varphi(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{(k+1)!} x^k$.

a) Montrer que $\varphi(x)\,\mathrm{e}^{-x}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

b) Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

(2) Soit E un espace euclidien de dimension $2n+1$, $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant

$$u^3 = -u,\ uu^* = u^*u,\ \mathrm{Tr}(uu^*) = 2n.$$

Que dire de u ?

---

4. Spéciales MP* : sujets posés aux Écoles Centrales à l'oral 2008

4.1. Math 1.

Exercice 4.1.1.

(1) Trouver le lieu des sommets des cônes de révolution du second degré contenant l'hyperbole $\begin{cases} x^2 - y^2 & = a^2 \\ z & = 0 \end{cases}$.

(2) Montrer qu'il est inclus dans un plan. Le tracer avec Maple.

(3) Question de cours à la fin : CNS pour qu'une quadrique soit de révolution

---

Exercice 4.1.2.

(1) On considère l'équation différentielle suivante : $y''(x) + (1-x)y'(x) + y(x) = \cos(x)$ (E).
Existe-t-il une solution développable en série entière sur $\mathbb{R}$?
Le sont-elles toutes ?

(2) Montrer que $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz - 1 = 0$ est une surface de révolution. Chercher son axe. (On pourra tout d'abord trouver une rotation laissant invariante la surface)

Exercice 4.1.3.
Étude de la fonction $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t(t+1)}}$.
(Définition continuité limites et équivalent)

Exercice 4.1.4.

(1) Soit C_λ la conique définie par $x^2 - y^2 + 2\lambda xy - ax + by = 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$.
Quelle est sa nature ?
Démontrer que toutes les coniques de cette famille passent par trois points fixés (indépendants de λ)
Chercher le centre de C_λ

(2) Soit M une matrice réelle 3,3, telle que $M^2 = 0$ et $M \neq 0$.
Montrer que $M \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(3) Soit A une matrice symétrique et B symétrique définie positive. Montrer que AB est diagonalisable.

Exercice 4.1.5.

(1) Soit f une application continue de E dans F.
   a) Est-ce que l'image de tout fermé de E par f est un fermé de F ?
   b) On suppose que l'image réciproque par f de tout compact de F est un compact de E.
   Montrer que l'image par f de tout fermé de E est un fermé.

c) Soit γ_n ensemble des polynômes unitaires à racines réelles.
γ_n fermé ? ouvert ? dans $\mathbb{R}_n[X]$.

d) Que se passe-t-il si les polynômes ne sont plus unitaires ?

e) Que dire des questions (c) et (d) pour γ ensemble des polynômes unitaires à racines réelles dans $\mathbb{R}[X]$?

(2) Questions de cours :
Théorème de Dirichlet.
Que dire d'une fonction continue dont tout les coefficients de Fourier sont nuls ?

(3) Question de la fin :
Nature de la série de terme général u_n

$$u_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}.$$

Exercice 4.1.6.

(1) On considère la matrice $2n \times 2n$ par blocs $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$ (on est sur $\mathbb{C}$ et pas sur $\mathbb{R}$).

a) Exprimer le polynôme caractéristique de B en fonction de celui de A.

b) Montrer l'équivalence :
(i) B diagonalisable,
(ii) A diagonalisable et inversible.

(2) a) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est-il connexe par arcs ?

b) et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$?

Exercice 4.1.7.
Soit $l \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ et L sa matrice dans la base canonique.

(1) Montrer que $\mathbb{Z}^n$ stable par l ssi $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.
On note $\mathcal{L}$ l'ensemble de ces endomorphismes.

(2) CNS sur $\det(l)$ pour que l soit bijective et $l^{-1} \in \mathcal{L}$.

(3) Soit l bijective et vérifie la condition précédente.
On suppose que l n'admet pas de vap de module 1.
On dit que $x \in \mathbb{R}^n$ est périodique si il existe p entier naturel non nul tq : $l^p(x) - x \in \mathbb{Z}^n$
Mq : x périodique ssi $x \in \mathbb{Q}^n$.
Indication : Montrer que 1 n'est pas vap de l^p.

Exercice 4.1.8.

(1) On considère

$$f : x \mapsto \int_{[x,x^2]} (1/\ln(t) - 1/t\ln(t))\,\mathrm{d}t$$

Montrer que $f(x) \to 0$ quand $x \to 1$ et en déduire la limite quand $x \to 1$ de $\displaystyle\int_{[x,x^2]} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$.

(2) Comment positionner trois points sur un cercle pour que l'aire du triangle correspondant soit maximal ? Qu'en est-il pour une ellipse ?

Exercice 4.1.9.
Dans tout l'exo, P est un polynôme de $\mathbb{R}$ de degré supérieur ou égal à 2.

(1) Soit P scindé. Mq, en s'aidant de la décomposition de P'/P
$$P(x) \neq 0 \text{ et } P'(x) = 0 \Rightarrow P(x)P''(x) < 0.$$
(2) Soient x_0 et x_1 deux racines consécutives de P'. Mq
$$P(x_0)P(x_1) \leqslant 0$$
(3) $P - a$ et $P - b$ sont tous les deux scindés ($a < b$).
   a) Montrer que
   $$P'(x) = 0 \Rightarrow P"(x) \neq 0.$$
   b) Montrer que P' admet $n - 1$ racines distinctes.
   c) Si $c \in [a; b]$. Montrer que $P - c$ scindé.

Exercice 4.1.10.
On étudie $f(x) = \displaystyle\int_x^{\infty} \frac{t}{\mathrm{e}^{\sqrt{t}} - 1}\,\mathrm{d}t.$

(1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
(2) Équivalent de f en 0 et $+\infty$.
(3) Montrer que f est intégrable et calcul de $\displaystyle\int_0^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.$

Exercice 4.1.11.

(1) Un peu d'algèbre : soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et λ non nul :
   a) Montrer que $A(\mathrm{Ker}(BA - \lambda I))$ est contenu dans $\mathrm{Ker}(AB - \lambda I)$ où B est la transposée de A.
   b) Montrer l'égalité des dimensions entre les deux sev $\mathrm{Ker}(BA - \lambda I)$ et $\mathrm{Ker}(AB - \lambda I)$.
   c) Montrer que AB et BA sont semblables.
(2) Exercice sans préparation :
Soit S une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique définie et positive, et A symétrique : montrer que SA est diagonalisable.
Réciproquement montrer que toute matrice symétrique se décompose en un produit SA.

Exercice 4.1.12.

(1) Soit E un evn. On définit $f(x) = \frac{x}{1+||x||}$.
   a) Montrer que f est un homéomorphisme de E dans la boule ouverte de centre O et de rayon 1.
   b) Montrer que f est lipschitzienne et trouver son plus petit rapport de Lipschitz.
(2) 5 minutes avant la fin :
Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ dérivable en 0 telle que $f(2x) = 2f(x)$. Déterminer f.

Exercice 4.1.13.

(1) (30 min de préparation) Soit E un espace euclidien, et $(e_1, ..., e_n)$ une base orthonormale. On note $K = \{\sum_{i=1}^n x_i e_i \mid x_i \in [-1,1]\}$, $S = \{\sum_{i=1}^n x_i e_i | x_i \in \{-1,1\}\}$, et $\mathcal{O} = \{u \in O(E) \mid u(K) = K\}$.

a) Montrer que $(\mathcal{O}, \circ)$ est un groupe.

b) Montrer que $u \in \mathcal{O} \Rightarrow u(S) = S$.

c) Montrer que $\forall i \in [1,n],\ \exists (j, \epsilon_i) \in [1,n] \times \{-1,1\}\ :\ u(e_i) = \epsilon_i e_j$.

d) Calculer $\mathrm{Card}(\mathcal{O})$.

(2) Soit E un ev de dimension finie. Trouver une CNS sur $u \in \mathcal{L}(E)$ pour qu'il existe un projecteur p tel que $u = up - pu$.

(3) Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ et P un diviseur irréductible de χ_M (dans $\mathbb{Q}[X]$), montrer que P divise le polynôme minimal de M.

Exercice 4.1.14.

Soit $p > 0$ et $S : x^2 + y^2 - 2pz = 0$.

Chercher toutes les courbes de classe $\mathcal{C}^1$ tracées sur S telles que la tangente à ces courbes en tout point soient tangentes à la surface $S' : x^2 + y^2 + 2pz = 0$.

Et vive Les exos centrale en particulier celui là qui je crois est un des pires. Parce que en plus la soluce n'a rien d'intéressant.

Exercice 4.1.15.

(1) Soit O une matrice orthogonale, S une matrice symétrique positive.
Montrer que $\mathrm{Tr}(OS) \leqslant \mathrm{Tr}(S)$.
Cas d'égalité ?
Avec la norme canonique, chercher $\mathrm{d}(S, O(E))$ (qui réalise(nt) le minimum ?)
Cas où S est définie positive ?

(2) Chercher les sous espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont toutes les matrices (exceptée la matrice nulle) sont inversibles.
Que dire pour $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

Exercice 4.1.16.

(1) Soit p une fonction polynomiale.
Montrer que $\lim\limits_{n} \displaystyle\int_a^b p(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = 0$.
Étendre au cas p continue.

(2) Convergence de $I_n = \displaystyle\int_a^b \frac{f(x)}{x}\sin(nx)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 4.1.17.

(1) Soient u, v, w trois endomorphismes de $\mathbb{C}^n$ tels que $w = uv - vu$ et que w commute avec u et v.

a) Montrer que $\forall P \in \mathbb{C}[X],\ P(u)v - vP(u) = P'(u)w$.

b) Montrer que w n'est pas un automorphisme.

c) Montrer que u, v, w admettent un vecteur propre commun (considérer la restriction de u et v à $\operatorname{Ker} w$).

(2) Trouver tous les endomorphismes diagonalisables et orthogonaux de $\mathbb{R}^n$ (ce sont les symétries orthogonales).

Exercice 4.1.18.

(1) Déterminer, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_a(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \times \dfrac{\cos(nx)}{n^2 + a^2}$ avec $a \in \mathbb{C} \backslash i\mathbb{Z}$.

(2) En déduire $f_a(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \times \dfrac{\cos(nx)}{n^2}$.

Exercice 4.1.19.

(1) a) Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$.

Montrer que A est inversible.

b) On considère L ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que leurs coefficients sont dans [0,1] et la somme des coefficients de chaque ligne vaut 1.

(i) Montrer que L est stable par multiplication.

(ii) Montrer que 1 est vap de tout element de L.

(iii) Montrer que la valeur absolue d'une vap d'un element de L est inférieure à 1.

(iv) Montrer que $|\det(A)| \leqslant 1$.

(2) Sans préparation :

a) Donner une base de l'ensemble défini par les polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ tels que $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin t \times p(t)\, \mathrm{d}t = 0$.

b) Soient A et B deux groupes cycliques que dire de leurs intersection ?

Exercice 4.1.20.

(1) Soit $A = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ B^{\mathrm{T}} & A_2 \end{pmatrix}$ par bloc. A est une matrice réelle symétrique définie et positive.

a) Montrer que les A_i sont réelles symétriques définies et positives.

b) Montrer que $\det A = \det A_1 . \det A_2$.

(2) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent entre eux. Donner une C.N.S. pour que la matrice $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

Exercice 4.1.21.

(1) Soit $I(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{1+t^2}} dt$.

Montrer que I est $\mathcal{C}^{+\infty}$ sur $\mathbb{R}_+{}^*$.

Équivalent en 0 et en $+\infty$.

(2) Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ bornée.

a) Montrer que $\exists x \in \mathbb{R} \mid f''(x) = 0$.

b) Je n'ai pas eu d'autres questions

Exercice 4.1.22.
Soient a, b, c des réels , avec a non nul et (E) l'équation $x(x+a)y" + by' + cy = 0$.

(1) A quelle condition sur a, b et c (E) admet elle des solutions polynomiales ?

(2) A quelle condition sur a, b et c (E) admet elle des solutions DSE ?

(3) A quelle condition sur a, b et c (E) admet elle des solutions de la forme $y = gx^d$,où g est une fonction DSE (solution sous forme de série de Frobénius) ?

(4) A quelle condition sur a, b et c (E) admet elle pour solution $y = 1/(x-1)$?
Résoudre alors $x(x+a)y'' + by' + cy = 1/(x(x-1))$.
Je suis plus trop sûr de la dernière question car elle m'avait tellement énervé qu'en sortant j'ai oublié l'énoncé exact (j'étais trop occupé à l'insulter et à la maudire...).

Exercice 4.1.23.
Soit $f\ : x \mapsto \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(x\sin(t))\,\mathrm{d}t$.

(1) Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

(2) Montrer que f est DSE.

(3) Montrer que f s'annule une et une seule fois sur $]\pi/2, \pi[$.

Exercice 4.1.24.

(1) Soit $E = \mathbb{R}^n$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ des formes linéaires sur E.

a) Soit $\varphi \in E^*$ montrer l'équivalence

$$\bigcap_{i=1}^{k} \operatorname{Ker} \varphi_i \subset \operatorname{Ker} \varphi \Leftrightarrow \varphi \in \operatorname{Vect}(\varphi_1, \ldots, \varphi_k).$$

b) Si $r = \operatorname{Rg}(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$, calculer $\dim \displaystyle\bigcap_{i=1}^{k} \operatorname{Ker} \varphi_i$.

c) Montrer que $\operatorname{Ker} \varphi$ est toujours un hyperplan (en dimension quelconque).

d) On suppose maintenant que E est de dimension finie, soit F un sous-espace vectoriel de E.
Montrer que F est une intersection d'hyperplans.

(2) Combien y-a-t-il de matrices inversibles dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$?
Combien y-a-t-il de matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$?

4.2. Math 2.

Exercice 4.2.1.

(1) On pose pour f continue sur $[0,1]$, $\phi(f) = \displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)}{1+t+t^2}\,\mathrm{d}t$; déterminer les normes subordonnées de ϕ pour les normes infinie, 1 et 2.

(2) Trouver une série trigonométrique convergeant ponctuellement sur $\mathbb{R}$ mais non égale à sa série de Fourier.

(3) Calcul de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!}$.

(4) Comment placer trois points sur un cercle pour que l'aire du triangle soit maximale ?

(5) Nature de la série des $\left(\dfrac{1}{\ln(n)}\right)^{\ln(n)}$.

(6) Formule de Green-Riemann, comment s'en servir pour calculer l'aire d'une partie définie par $r(\theta)$.

Exercice 4.2.2.
Soit $f_n(x) = (x + x^n)^n$
CS sur $[0;1[$?
CU sur $[0;1[$, sur $[0;a]$, $a < 1$?
$I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.........$J_n = \displaystyle\int_0^{1+\alpha} f_n(x)\,\mathrm{d}x$
$I_n \sim \dfrac{2^{n+1}}{n^2}$?
Équivalent de J_n ?

Exercice 4.2.3.

(1) Si a, b et c sont trois réels distincts, montrer qu'il existe un unique triplet (λ, μ, ν) tel que

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \int_{-1}^{1} \frac{P(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \lambda P(a) + \mu P(b) + \nu P(c). \tag{1}$$

(2) Montrer qu'il existe un unique polynôme Q tel que $Q(\cos u) = \cos(3u)$.

(3) Montrer que si a, b et c sont les racines de Q, alors la relation (1) est vraie pour $P \in \mathbb{R}_5[X]$.

(4) Montrer que $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ atteint un minimum sur $X^3 + \mathbb{R}_2[X]$ et le déterminer.
Question supplémentaire : comment sans l'expliciter montrer que ce minimum existe ?

Exercice 4.2.4.

(1) Soit (S) le système suivant : $\left\{\begin{pmatrix} x' = 3y - x + \mathrm{e}^t \\ y' = -x + 3y + \mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix}\right.$ Résoudre le système homogène associé puis le système (S).

(2) Tracer la courbe définie par $M(t) = (t - \ln(t), t^2 - 2t - 3)$.
Étudier lorsque $t \to 0^+$ puis lorsque $t \to \infty$.
Étudier le point $M(1)$.

EXERCICE 4.2.5.
On considère l'équation différentielle suivante :

(E) $$2xy'(x) + y(x) = \frac{1}{1-x}$$

(1) Montrer qu'il existe une unique fonction f solution dérivable sur $]-\infty;1[$.
(2) Montrer que f est monotone sur $]-\infty;1[$.
(3) Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty(]-\infty;1[,\mathbb{R})$.

EXERCICE 4.2.6.
Soit $f\ : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto (X^2+1)P'' - 2XP' \in \mathbb{R}[X]$.
(1) f est-elle un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$?
(2) Vap, vep de f ?
(3) Pour $n = 4$ donner la matrice de f et de f^p.

EXERCICE 4.2.7.
On s'intéresse au commutant d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
(1) Questions données en préparation.
a) Montrer que $\mathcal{C}(A)$ est un espace vectoriel.
b) Cas $n = 2$, montrer que $\dim \mathcal{C}(A) = 2$ ou 4.
c) Cas $n = 3$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Commutant de A ?
d) Chercher les matrices X telles que $X^2 = A$?
(2) Questions données après.
a) En dimension n, u endomorphisme diagonalisable avec n valeurs propres distinctes. Dimension de $\mathcal{C}(u)$?
b) Les valeurs propres ne sont plus toutes distinctes, d'ordre $r_1, ..., r_p$. Dimension de $\mathcal{C}(u)$?

Sans oublier quelques questions de cours durant la colle.

EXERCICE 4.2.8.
Soit $(E) : x^2y''(x) + 4xy'(x) + (2 - x^2)y(x) = 1$
(1) Chercher les solutions de (E) qui sont DSE. Rayon de convergence ?
(2) Exprimer ces solutions avec des fonctions élémentaires.
(3) Déterminer toutes les solutions de (E) avec le changement de fonction $y = \frac{\mathrm{ch}(x)}{x^2}z$. Quelles sont les solutions DSE sur $\mathbb{R}$ en entier ?

(4) Idem avec cette fois $z = x^2y$..

Exercice 4.2.9.
Exactement celui que THE BOUB a corrigé à la fin de l'année

(1) Calculer la somme de la série de terme général $(4n+3)/((2n+1)^2(2n+2)^2)$.
(2) Calculer l'intégrale double sur $]0,1[^2$ de $f(x,y) = -x\ln(xy)/(1-x^2y^2)$

Exercice 4.2.10.
Un théorème à admettre :
Si f fonction continue tq $\sum_{n\geqslant 1}(|c_n(f)|+|c_n(f)|)$ converge alors f est développable en série de Fourier.
Soit f une fonction 2π-périodique continue sur $\mathbb{R}$.
On note $g_n : x \mapsto 1/(n\sqrt{\pi})\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}(\exp(-t^2/n^2)f(x-t))\,\mathrm{d}t$.

(1) a) Montrer que g_n définie, continue et 2π-périodique.
 b) Calcul sur MAPLE de g_n si $f(t) = \exp(ikt), k \in \mathbb{Z}$.
(2) a) Calcul des coefficients de Fourier de g_n. (f fonction quelconque).
 b) g_n est-elle développable en série de Fourier ?
(3) Convergence simple et uniforme de g_n ?
 - Indication : Considérer le cas où f est une fonction "simple".

Formules : $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}(\exp(-x^2))\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$ (Je crois ?)
$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}(\exp(-\pi x^2)\exp(-2i\pi xy)\,\mathrm{d}x = \exp(-\pi y^2)$.

Exercice 4.2.11.
On considère la matrice suivante :

$$M(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & \sin(\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(\theta) & 0 & \sin(2\theta) \\ \sin(\theta) & \sin(\theta) & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) $M(\theta)$ est-elle diagonalisable ?
(2) Calculer M^n lorsque cette dernière n'est pas diagonalisable.

Exercice 4.2.12.
On considère une matrice A 3×3 donnée et il faut trouver les polynômes P tq $P(A)$ est un projecteur. Puis faire la généralisation. Youpi ! ! ! ! ! ! !

Exercice 4.2.13.
Étude de la série entière de terme général :

$$a(n) = \int_0^{\infty}\frac{1}{\mathrm{ch}(t)^n}\,\mathrm{d}t$$

(1) Rdc
(2) Convergence et valeur en (-1).
(3) Quels sont les intervalles fermés où il y a convergence uniforme de la série.

EXERCICE 4.2.14.

(1) a) (i) Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in M_n(\mathbb{C})$ inversible. On note A_{ij} le cofacteur (i,j). Montrer que $\det[(a_{ij})_{2 \leqslant i,j \leqslant n-1}] \times \det(A) = A_{1,1}A_{n,n} - A_{1,n}A_{n,1}$ en étudiant le produit $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \cdots & \cdots & A_{(n-1)1} & A_{n1} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \cdots & \cdots & A_{n(n-1)} & A_{nn} \end{pmatrix} \times A$ (pfiou 10 minutes pour rentrer cette foutue matrice...)

(ii) Montrer que la relation est toujours valable si A est non inversible en considérant $A - zI_n, z \in \mathbb{C}$.

b) On définit une suite F_n par $F_0 = 0, F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ (oh, F comme Fibonacci).

(i) Calculer $D_n = \det((F_{|i-j|})_{1 \leqslant i,j \leqslant n})$ pour n allant de 1 à 20.

(ii) Calculer D_n $\forall n \geqslant 1$.

(2) Donner une CNS sur a, b, c, d, e, f pour que $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ soit diagonalisable, avec ... MAPLE!!

EXERCICE 4.2.15.

(1) On considère une suite $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha > 0$ et une suite $v_n \geqslant 0$ telles que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.
Étudier la série de terme général v_n.

(2) Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax} (\sin x)^{2n} \,\mathrm{d}x$.

a) Calculer $\lim\limits_{n \to \infty} I_n$.

b) Étudier la suite nI_n (je suis plus sûr de ça!).

Indication : trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.

EXERCICE 4.2.16. Eh oui encore de la géométrie. Finalement pour les oraux du tétra j'avais uniquement besoin du cours sur les coniques, la géométrie dans l'espace et le plan, les courbes et surfaces C'est cool non.
Soit $m > 0, p > 0$ $S : M(r, \theta)$ avec $\overrightarrow{OM}(r,\theta) = mr\cos(\theta)\overrightarrow{\imath} + mr\sin(\theta)\overrightarrow{\jmath} + r\,\overrightarrow{k}$.

(1) Tracer S en Maple.

(2) Reconnaître S (le démontrer).

(3) Soit D la droite passant par $(p, 0, 0)$ dirigée par $\overrightarrow{k}$ et D_θ la droite passant par O et dirigée par $m\cos(\theta)\overrightarrow{\imath} + m\sin(\theta)\overrightarrow{\jmath} + \overrightarrow{k}$.

a) Que représente D_θ pour S.

b) Soit Δ_θ la perpendiculaire commune de D et D_θ et $I(\theta)$ l'intersection de D_θ et Δ_θ. Trouver le lieu des points $I(\theta)$.

c) Tracer $I(\theta)$ avec MAPLE (utiliser spacecurve de la librairie plot).

d) Montrer que $I(\theta)$ est aussi inclus dans un ellipsoïde à déterminer.

EXERCICE 4.2.17. Calculer

$$\lim_n \sum_{k\in[1,n]} \sin(\frac{k}{n})\sin(\frac{k}{n^2})$$

$$\lim_n \sum_{k\in[0,n]} \sin^2(\frac{1}{\sqrt{k+n}})$$

EXERCICE 4.2.18.

(1) Soit $P = \sum_{k=0}^{10} X^k$. A l'aide de Maple, montrer que $(P(X+j))_{j\in[0,10]}$ constitue une base de $\mathbb{C}_{10}[X]$.

(2) Cas général : soit $P \in \mathbb{C}[X]$, $\deg(P) \neq 0$.
Montrer que $(P(X+j))_{j\in[0,n]}$ constitue une base de $\mathbb{C}_n[X]$.
Indication : Taylor.

(3) Montrer que $(P(i+j))_{(i,j)\in[0,n]^2}$ est inversible.

(4) Calculer l'inverse. (Indication : l'exprimer comme produit de deux matrices).

EXERCICE 4.2.19.

(1) Soit f continue telle que $f(0) \neq 0$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ existe.
Chercher $\displaystyle\lim_{u\to 0} \int_u^{+\infty} \frac{f(tx^2) - f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ où x est un réel fixé.

(2) Chercher $\displaystyle\lim_{u\to 0} \int_u^M \frac{\sin at \sin bt}{t}\,\mathrm{d}t$ quand u tend vers 0 et M vers l'infini.

(3) Chercher $\displaystyle\lim_{u\to 0} \int_u^M \frac{b\sin at - a\sin bt}{t^2}\,\mathrm{d}t$ quand u tend vers 0 et M vers l'infini.

EXERCICE 4.2.20.

(1) a) Soient les courbes $\mathcal{C}_1 : \rho = a\cos(\frac{\theta}{2})$ et $\mathcal{C}_2 : 4x^2 + y^2 = 4a^2$.
Tracer $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ (avec Maple).

b) Comparer leur longueur.

c) Calculer l'aire délimitée par $\mathcal{C}_1$.

(2) On définit la suite $v_{n+1} = v_n \,\mathrm{e}^{-v_n}$ et $v_0 \geqslant 0$.

a) Étudier la suite (v_n).

b) Donner un équivalent de v_n. On posera $w_n = \dfrac{1}{{v_{n+1}}^{\alpha}} - \dfrac{1}{{v_n}^{\alpha}}$.

c) Étudier $\sum v_n x^n$.

Exercice 4.2.21.

(1) D.S.F. (en série de sinus et cosinus) de la fonction f 2π-périodique égale à e^{at} pour $t \in]0, 2\pi]$.

(2) a) Soit $I(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{1-\mathrm{e}^{-u}} \sin(au)\,\mathrm{d}u$. Simplifier $I(a)$ avec des séries pour obtenir une expression sans intégrale.

b) Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-a} \sin(au)\,\mathrm{d}u$.

c) Déduire du 1 la valeur de $I(a)$.

Solution 1.1.1 (Yoann Roques) Note : ?
Examinateur : c'est celui de la salle W au 4è étage. Assez sympa, très patient et prend en considération toutes les idées sans pour autant dire si c'est une bonne idée ou une mauvaise.

(1) 1) On effectue une récurrence sur n (pour $n = 1$ c'est OK). On suppose la propriété au rang $n - 1$:
on est dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, A possède donc au moins une valeur propre λ_1.
Comme A et B commutent $E(\lambda_1)$ est stable par B, on note b l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ associé. On restreint à $E(\lambda_1)$. $b_{||E(\lambda_1)}$ possède une valeur propre μ_1 et on choisit un vecteur propre e_1 qui est donc un vecteur propre commun à A et B on choisit ensuite un supplémentaire à $\mathrm{Vect}(e_1)$ noté F.
On choisit A' et B' telles que si l'on complète e_1 en une base (avec des vecteurs de F) et on note Q la matrice de passage associée on a
$$QAQ^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & L \\ 0 & QA'Q^{-1} \end{pmatrix} \text{ de même pour } B : QBQ^{-1} = \begin{pmatrix} \mu_1 & L' \\ 0 & QB'Q^{-1} \end{pmatrix}.$$
A' et B' commutent (car A et B commutent) et on est dans $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$. On applique alors l'hypothèse à A' et B' ce qui nous donne une matrice P' telle que $P'A'P'^{-1}$ et $P'B'P'^{-1}$ sont triangulaires. On choisit alors $P = \begin{pmatrix} e_{11} & 0 \\ \dots & P' \end{pmatrix}$ qui convient (faire les produits matriciels par blocs).

(2) Il s'agit là de trouver une bonne base de départ et à l'arrivée.
On fait par récurrence sur n toujours.
- Pour $n = 1$ OK.
- Supposons la propriété vraie au rang $n - 1$:
on cherche e_1 et f_1 non nuls tels que $\exists \lambda_1$ et μ_1 tels que $Ae_1 = \lambda_1 f_1$ et $Be_1 = \mu_1 f_1$.
Montrons que cela est toujours possible :
  - si A est inversible :
  $\det(B - XA) = \det(A)\det(BA^{-1} - XI_n)$ et BA^{-1} possède une valeur propre μ_1 (on est dans $\mathbb{C}$). Soit e_1 un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}(B - \mu_1 A)$ car $\det(A)$ non nul alors avec $f_1 = Ae_1$ on a $Be_1 = \mu_1 Ae_1$, le couple (e_1, f_1) répond à la question.
  - Si A n'est pas inversible :
  e_1 dans $\mathrm{Ker}(A)$ non nul alors $\lambda_1 = 0$ et f_1 tel que $f_1 = Be_1$ si Be_1 non nul. On a alors $\mu_1 = 1$ sinon f_1 non nul et $\mu_1 = 0$.

  On a alors les premiers vecteurs des matrices de passage P et Q.
  Ensuite on récurre en faisant des produits par blocs comme en 1).

(3) Tout se voit sur un dessin pour f , on applique le TVI à $h(x) = f(x) - x$, $h(0) = f(0) \geqslant 0$, $h(1) = f(1) - 1 \leqslant 0$, h est continue car f est continue.
Donc $\exists c$ tel que $f(c) = c$. le point fixe est unique. En effet par l'absurde, soient (x, y) deux points fixes de f tels que $x < y$ alors $0 > x - y = f(x) - f(y) \geqslant 0$ par décroissance de f d'où une contradiction. Ensuite $g(c) = g \circ f(c) = f \circ g(c)$. Par unicité $g(c) = c$.

Solution 1.1.2 (Sébastien Lérique) Note : 13
Examinateur : le même que Yoann, et chuis assez d'accord avec la description.

(1) On fait une récurrence forte sur k :
- pour $k = 1$ ça marche bien.
- Si c'est vrai jusqu'à $k - 1$: on prend P vérifiant l'hypothèse. Soit le coefficient constant est non nul et alors P' vérifie l'hypothèse pour $k - 1$, on est content car $[2(k - 1) - 1] + 1 < 2k - 1$. Soit non, et on écrit $P = X^q Q(X)$ où le coefficient constant de Q est non nul : on lui applique la même chose, on compte les racines et c'est bon. Ça s'est fait sans trop d'indications.

Si $P = X(X^2-1)(X^2-2^2)(\ldots)(X^2-(k-1)^2) = X^{2k-1} + a_{k-1}X^{2k-3} + \cdots + a_1 X$ alors P a bien k coefficients non nuls et exactement $2k-1$ racines réelles distinctes.

(2) On cherche en fait une infinité de couples $(n, r), n \geqslant 0$ tels que $2^n \in [7.10^r; 8.10^r[$. C'est à dire

$$\ln 7 \leqslant n \cdot \ln 2 - r \cdot \ln 10 < \ln 8$$

On considère alors (grâce à un coup de pouce) $\mathcal{Q} = \{n \cdot \ln 2 - r \cdot \ln 10, (n, r) \in \mathbb{Z}^2\}$: c'est un sous-groupe de $\mathbb{R}$, et s'il était de la forme $a.\mathbb{Z}$ on aurait $\ln 2 = p.a$ et $\ln 10 = q.a$ donc $\frac{\ln 2}{\ln 10} \in \mathbb{Q}$ i.e. $2^q = 10^p$ ce qui pose un petit problème (il demande pourquoi à chaque étape). Donc $\mathcal{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, et ce qu'il nous faut maintenant c'est des n positifs. On utilise encore la densité : on prend un couple (n_0, r_0) suffisamment loin de $\ln 7$ et $\ln 8$ qui marche, dans le tiers du milieu par exemple soit

$$\ln 7 + \frac{1}{3}(\ln 8 - \ln 7) < a_0 = n_0 \ln 2 - r_0 \ln 10 < \ln 8 - \frac{1}{3}(\ln 8 - \ln 7). \tag{I}$$

Comme on a des termes de $\mathcal{Q}$ aussi petits qu'on veut avec $n \geqslant 1$, on peut les ajouter sans sortir de l'encadrement (et gagner au moins 1 sur n à chaque fois) :
on prend par exemple $\varepsilon = \dfrac{1}{|n_0|}.\dfrac{\ln 8 - \ln 7}{3}$ et $a_\varepsilon = n_\varepsilon \ln 2 - r_\varepsilon \ln 10$ tel que $|a_\varepsilon| < \varepsilon$. Quitte à changer le signe de a_ε, on peut s'arranger pour que $n_\varepsilon \geqslant 1$ alors

$$-|n_0|\varepsilon = -\frac{\ln 8 - \ln 7}{3} < |n_0|a_\varepsilon < \frac{\ln 8 - \ln 7}{3}$$

et, en additionnant cette inégalité à l'inégalité I on arrive à

$$\ln 7 < a_0 + a_\varepsilon = \underbrace{(n_0 + |n_0|.n_\varepsilon)}_{=n'} \ln 2 - \underbrace{(r_0 + |n_0|.r_\varepsilon)}_{=r'} \ln 10 < \ln 8$$

avec $n' > 0$.
On recommence avec $a_1 \neq a_0$ (on sait qu'il y a une infinité d'éléments de $\mathcal{Q}$ dans le tiers du milieu), on prend ε' suffisamment petit pour que $n'' > n'$ (avec le même processus). On construit ainsi une suite $(n^{(k)})$ strictement croissante pour arriver à une infinité de n positifs. (Inutile de dire que là-dessus il m'a pas mal aidé).

(3) J'ai pas eu le temps, et même en cherchant je vois pas trop comment faire. On pourrait commencer par montrer qu'il existe au moins une droite sur laquelle on trouve une infinité de points de S, puis par l'absurde... mais je débouche pas trop.
Soit E l'ensemble en question, supposons par l'absurde que E contienne 3 points A, B, C non alignés.

Soit $n = AB$, pour $D \in E$, on a $|DA - DB| \leqslant n$. DA et DB étant des entiers, E est contenu dans la réunion des ensembles $H_i = \{M, |MA - MB| = i\}$. H_i est soit une hyperbole ($i \in [1, n-1]$) soit contenue dans une droite ($i = 0, n$). De même, E est contenu dans la réunion des ensembles $K_j = \{M, |MA - MC| = j\}$, $j \in [0, m]$ où $m = AC$.

E est donc contenu dans la réunion des intersections des ensembles H_i et K_j. Or $H_i \cap K_j$ contient 4 points aux maximum, E serait donc fini, ce qui est impossible.

On a ainsi une contradiction donc tous les points de E sont alignés.

Solution 1.1.3 (Vincent Pécastaing) Note : 15
Examinateur : Apparemment le même examinateur que Tata. Colle à 14h, chaleur oppressante, le type me laisse bien seul au début...

(1) Pour le premier, faut pas avoir peur, on opère sur les lignes et colonnes en multipliant à gauche et à droite par des matrices élémentaires, en n'ayant droit qu'à $L_i \leftarrow L_i - \alpha L_k$ (multiplication à gauche par une matrice de transvection) et $C_i \leftarrow C_i - \beta C_k$ (multiplication à droite par une matrice de transvection), avec $i < k$ pour n'avoir que des matrices triangulaires supérieures et inférieures (transvections). C'est assez pénible à justifier, et on peut se sentir relativement alone.
Si $M = (m_{i,j})$ alors on distingue 2 cas
   - Si $m_{n,n} \neq 0$ alors tout d'abord on se ramène au cas où $m_{n,n} = 1$ en multipliant par une matrice d'homothétie. Ensuite, à l'aide de multiplications à gauche et à droite par des matrices de transvection, on fait apparaître des 0 dans les dernières ligne et colonne.
   - Si $m_{n,n} = 0$ on cherche un élément non nul dans la dernière lignes et dernière colonnes. On se ramène là aussi au cas où ces éléments sont égaux à 1 (on multiplie par des matrices d'affinité cette fois-ci). On fait apparaître des 0 sur la dernière ligne et dernière colonne.

   On recommence l'algorithme avec $m_{n-1,n-1}$, finalement, on obtient une matrice qui n'a que des 1 et des 0. Sur chaque ligne, il n'y a qu'un terme non nul, de même pour les colonnes. La matrice obtenue est donc une matrice de permutation.
   Pour l'unicité, on prend σ et τ qui conviennent, on voit que l'on peut se ramener à $TP_\sigma = P_\tau T'$ car le produit de deux matrices triangulaires supérieures est triangulaire supérieure (idem pour les matrices triangulaires inférieures).
   Soit e_1 le premier vecteur de base, $TP_\sigma e_1 = Te_{\sigma_1} = \sum_{i=1}^{\sigma_1} \lambda_i e_i$ et $P_\tau T' e_1 = P_\tau t'_{11} e_1 = t_{11} e_{\tau_1}$.
   On en déduit que $\tau_1 \leqslant \sigma_1$ et par symétrie on a égalité.
   Pour terminer, on fait une récurrence.

(2) Enfin, pour le deuxième, j'étais en train de me traiter de tous les noms pendant qu'il me le dictait : la veille, je m'étais motivé pour chercher les deux planches déjà tombées, puis échec, j'ai laissé tombé et j'ai atterri devant un film. Après coup, je ne sais pas si ça aurait été mieux, si j'avais fougéré dessus en le cherchant hier soir, je n'aurais pas abordé l'exo sereinement, alors que là, ça c'est passé nickel, j'avais pas mal d'idées, je n'allais pas me mettre direct dans une impasse.

Solution 1.1.4 (Bastien Mallein) Note : ?
Examinateur : Pas très jeune, très souriant, ne laisse pas dire de bêtises, mais laisse aller au bout de toutes les idées, donne des pistes au bon moment.

(1) $(\Rightarrow)$: Si $x \in \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} v$ alors $(u + tv)(x) = 0$ et comme $u + tv$ est inversible, $x = 0$. On a bien $\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} v = \{0\}$.
$(\Leftarrow)$: On procède par récurrence forte sur $\dim E$.
   - Si $\dim E = 1$, u et v sont des homothéties en dimension 1 et l'une d'entre-elles à un rapport non nul donc il existe bien t tel que $u + tv$ soit inversible.
   - On suppose la propriété vraie pour tout espace vectoriel de dimension $\leqslant n$. Soit E de dimension $n + 1$.
     - Si u est inversible, on écrit $u + tv = u \circ (\mathrm{Id} + tu^{-1} \circ v)$. Si $t \neq \dfrac{-1}{\lambda}$ où λ est une valeur propre non nulle de $u^{-1} \circ v$ alors $u + tv$ est inversible.
     - Si v est inversible, on procède de même avec : $u + tv = v \circ (t \,\mathrm{Id} + v^{-1} \circ u)$.
     - On suppose u et v non inversibles. Soit F un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$, montrons que $v_{|\operatorname{Ker} u}$ est injective : en effet, si $x \in \operatorname{Ker} u$ alors $v(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ vu l'hypothèse. v est donc un isomorphisme de $\operatorname{Ker} u$ sur $v(\operatorname{Ker} u)$. On considère u et v comme applications linéaires de E dans E en prenant des bases différentes

au départ et à l'arrivée : on prend au départ une base de F concaténée avec une base de $\operatorname{Ker} u$ et à l'arrivée, une base d'un supplémentaire de $v(\operatorname{Ker} u)$ complétée en une base de E. Dans ce cas, les matrices de u et v s'écrivent par bloc $\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} A' & 0 \\ B' & D' \end{pmatrix}$ avec D' inversible, et il suffit alors de trouver t non-nul tel que $A+tA'$ inversible ce qui est possible. En effet, dans la base de départ, si x admet la matrice $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ alors $u(x) = 0 \Leftrightarrow AX_1 = 0$ et $v(x) = 0 \Leftrightarrow A'X_1 = 0$ donc, u' et v' de matrices respectives A et A' vérifient $\operatorname{Ker} u' \cap \operatorname{Ker} v' = \{0\}$. On applique alors l'hypothèse de récurrence, il existe $t \neq 0$ tel que $A+tA'$ inversible donc $\begin{pmatrix} A+tA' & 0 \\ B+tB' & tD' \end{pmatrix}$ est inversible ce qui achève la récurrence.

(2) Grâce au T.V.I., on sait que f possède des points fixes dans $[a, 1b$ car $f(b) < b$ et $f(a) > a$. $f - \mathrm{Id}$ est continue donc $(f - \mathrm{Id})^{-1}(\{0\}$ est un fermé non vide de $[a, b]$, c'est un compact donc il contient ses bornes p et q.
Si $y \in [p, b]$ alors, grâce au T.V.I., il existe $x \in [a, p]$ tel que $y = f(x)$ donc $[p, b] \subset f([a, p])$. De même $[a, q] \subset f([q, b])$. On a ainsi

$$[a, q] \subset f([q, b]) \subset f([p, b]) \subset f^2([a, p]) \text{ et } [p, b] \subset f([a, p]) \subset f([a, q]) \subset f^2([q, b]).$$

Par le T.V.I. on sait qu'il existe $c \in [a, p]$ tel que $f(c) = b$ donc $f^2(c) = f(b) \leqslant a$. Si $c = a$ alors $f^2(a) \leqslant a$.
Je n'ai pas le temps de finir cet exo...

Solution 1.1.5 (David Fourquet) Note : ?
Examinateur : ?

(1) Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) > 0$ (le raisonnement est le même si $f(a) < 0$), on suppose que f ne s'annule pas sur $[a, b]$ avec $b = a + \dfrac{\pi}{\sqrt{c}}$ (par conséquent $f > 0$ sur $[a, b]$). Posons $y(x) = \sin[\sqrt{c}(x-a)]$ qui vérifie $y'' + cy = 0$ et $y(a) = y(b) = 0$, $y > 0$ sur $]a, b[$.
Soit $u = f'y - fy'$ (c'est le wronskien) alors $u' = f''y - fy'' = fy(c-g) < 0$ donc u est strictement décroissante sur $[a, b]$ mais $u(a) = -f(a)\sqrt{c}\cos 0 < 0$ et $u(b) = -f(b)\sqrt{c}\cos\pi > 0$ ce qui est contradictoire.
Conclusion : f s'annule au moins une fois sur $[a, b]$ i.e. f s'annule au moins une fois sur tout intervalle de longueur $\geqslant \dfrac{\pi}{\sqrt{c}}$ donc f s'annule une infinité de fois sur $\mathbb{R}$.

(2) On pose $\alpha_i = \mathrm{e}^{a_i}$, le déterminant cherché ressemble alors à un déterminant de Vandermonde.
Soit $f(x) = \begin{vmatrix} \alpha_1^{b_1} & \dots & \alpha_1^{b_n} \\ \vdots & & \vdots \\ x^{b_1} & \dots & x^{b_n} \end{vmatrix}$ (on a rangé les b_i dans l'ordre croissant, quitte à faire une permutation). On remarque deux choses

- $f(\alpha_i) = 0$ pour $i \in [\![1, n-1]\!]$,

– $f(x) = \Delta_1 x^{b_1} + \cdots + \Delta_n x^{b_n}$ en développant par rapport à la dernière ligne.

Prouvons maintenant le lemme suivant :

LEMME : soit $g(x) = a_0 + a_1 x^{\beta_1} + \cdots + a_n x^{\beta_n}$ où $0 < \beta_1 < \ldots < \beta_n$ alors g a au plus n racines > 0.

Dém : on procède par récurrence sur n.

- $n = 0$ OK !
- $P(n-1) \Rightarrow P(n)$: on utilise Rolle à l'envers, si $g(x)$ a au moins $n+1$ racines alors
$$g'(x) = a_1\beta_1 x^{\beta_1 - 1} + \cdots + a_n\beta_n x^{\beta_n - 1} = x^{\beta_1}\left[a_1\beta_1 + \cdots + a_n\beta_n x^{\beta_n - \beta_1}\right]$$
aurait au moins n racines ce qui en contradiction avec l'hypothèse de récurrence.

f a donc au maximum $n-1$ racines or $f(\alpha_i) = 0$ entraîne qu'on les a toutes par conséquent $f(\alpha_n) \neq 0$.

Solution 1.1.6 (Rémi Boutonnet) Note : 15

Examinateur : Sympa et comprend absolument tout ce que vous faites.

(1) Bon ben on prend un polynôme P de E et on veut trouver une boule de centre P et incluse dans E. Le choix de la norme sera fait en fonction de P.
J'ai vraiment la flemme de continuer aujourd'hui, c'est trop chiant de taper du texte mathématiques... En gros si on prend Q de norme suffisamment petite, on peut se démerder pour que, entre chaque racines consécutives de P, $P + Q$ ait le signe de P. Idem avant la première racine, et après la dernière. Ainsi $P + Q$ change n fois de signe et est de degré n.

(2) a) récurrence.
b) On s'inspire de Gauss et du 1. C'est pas évident, et j'ai pas eu le tps de finir.

Solution 1.2.1 (Mikael Rabie) Note : 9

Examinateur : : plus très jeune, inexpressif, adepte du "en êtes-vous sûr ?". Il semblerait qu'il campe dans la même salle que l'an dernier, vu les commentaires de Cleynen...

(1) $\Rightarrow$ (2) : soit x vep. associé à $r(u)$ et de norme 1 : on a alors $||u(x)|| = r(u) < 1$.

(2) $\Rightarrow$ (1) : il faut fabriquer la norme en question, pour cela on considère la base (x_i) de u dans laquelle u est trigonalisable et on la choisit orthogonale, en posant $||x_1|| = 1$ on a $||\sum \alpha_i x_i|| = \sum |\alpha_i|.||x_i||$. Il suffit maintenant de choisir les $||x_i||$ de manière récurrente : on a $||u(x_i)|| = \lambda_i ||x_i|| + \sum_{k=1}^{i-1} |a_{k,i}|.||x_k||$ (avec $a_{k,i}$ coefficients de la matrice de u, $\lambda_i \leqslant r(u) < 1$). En prenant
$$\|x_i\| > \frac{2}{1 - r(u)} \sum_{k=1}^{i-1} |a_{k,i}|.||x_k||,$$

on a alors $\frac{||u(x_i)||}{||x_i||} < \frac{r(u)+1}{2}$, d'où pour tout x, $\frac{||u(x)||}{||x||} < \frac{r(u)+1}{2}$ en passant à la borne supérieure : $N(u) \leqslant \frac{r(u)+1}{2} < 1$.

(1) $\Rightarrow$ (3) : $N(u^n) \leqslant N(u)^n$, et on passe à la limite.

(3) $\Rightarrow$ (2) : Par l'absurde (mais j'ai malheureusement pas eu le temps d'arriver jusque là) : s'il existe $1 \leqslant \lambda$ vap., alors $1 \leqslant N(u)^n$.

Solution 1.2.2 (Rémi Boutonnet) Note : 18

Examinateur : d'âge moyen, ouvert à toute proposition. Il m'a demandé ce que je voulais comme école et m'a dit que je devrait arriver à avoir une ENS (bon signe...).

(1) Ok.

(2) Ok si on l'appelle S, $S = q.\,\mathrm{e}^{ik\beta}$ si q divise k, $S = 0$ sinon.

(3) Ça vaut a_0.

(4) Il faut dire que A est compact et même réunion d'au plus $2n+1$ segments disjoints, donc il est légitime de parler de sa longueur que l'on note $l(A)$ voila une question intéressante. Une fois de plus j'ai pas trop osé utiliser les autres question, mais on me l'a encore suggéré.
Si P est de moyenne nulle $a_0 = 0$ et donc $\sum_{j=0}^{n} P(\frac{2j\pi}{n+1} + \beta) = 0$, donc pour tout β il existe j tel que $\frac{2j\pi}{n+1} + \beta$ soit dans A. Ainsi on peut noter $A_i = (\beta \in [0, 2\pi[| \beta + \frac{2j\pi}{n+1} \in A)$. La réunion des A_i (pour i entre 0 et n) est alors égale à $[0, 2\pi[$, d'où $\sum_{j=0}^{n} l(A_j) >= 2\pi$. je vous laisse finir.

Solution 1.2.3 (Yoann Roques) Note : ?

Examinateur : jeune, lunettes la barbe de 3 jrs, je pense que c'était le même que Rémi.

(1) On va utiliser le théorème d'inversion globale :
- h est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ car f et g sont de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- h est injective en effet soient (x, y) et (x', y') deux couples tels que $h(x, y) = h(x', y')$, alors $x - x' = y' - y$ et $f(x) - f(x') = g(y') - g(y)$.
  Par l'absurde supposons $x \neq x'$ (et donc $y \neq y'$). On a alors $\dfrac{f(x) - f(x')}{x - x'} = \dfrac{g(y) - g(y')}{y - y'}$. On utilise alors l'égalité de Taylor Lagrange $\exists (c, d) \in ([x, x']$ ou $[x', x], [y, y']$ ou $[y', y])$ tels que $\dfrac{f(x) - f(x')}{x - x'} = f'(c)$ et $\dfrac{g(y) - g(y')}{y - y'} = g'(d)$. Ce qui nous donne une contradiction avec l'hypothèse $\forall (x, y)\ f'(x) \neq g'(y)$. donc $x = x'$ et par suite $y = y'$. D'où l'injectivité.
- On a $\det(Jac(h)) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ f'(x) & g'(y) \end{pmatrix} = g'(y) - f'(x) \neq 0$.

Donc par le théorème d'inversion globale h est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathrm{Im}(h)$.

(2) Soient $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. On cherche $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\begin{cases} x + y = u \\ f(x) + g(y) = v \end{cases}$. On va donc essayer de montrer que $\varphi_u(x) = f(x) + g(u - x)$ a pour image $\mathbb{R}$:
$f'(x) \geqslant k > 0$. donc comme $f(x) - f(0) = \int_0^x f'(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_0^x k\,\mathrm{d}x = kx$ pour $x \geqslant 0$. Donc f tend vers $+\infty$ en $+\infty$. De même $f(0) - f(x) = \int_x^0 f'(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_x^0 k\,\mathrm{d}x = -kx$.D'où $f(x) \leqslant f(0) + kx$ pour $x \leqslant 0$. Par suite f tend vers $-\infty$ en $-\infty$.
f est croissante donc $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$. g est bornée donc $f(x) - M \leqslant \varphi_u(x) \leqslant f(x) + M$. Donc $\mathrm{Im}\,\varphi_u = \mathbb{R}$. Par Suite, $\mathrm{Im}(h) = \mathbb{R}^2$.

Solution 1.2.4 (Arnaud Galimberti) Note : ?
Examinateur : ?

(1) $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arc. En effet, l'application f qui à une matrice fait correspondre son déterminant est continue et si $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ était connexe par arc alors $f(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}))$ serait connexe par arc or si on prend $A = I_2$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $f(A) = 1$, $f(B) = -1$ donc 0 serait dans l'image de f ce qui est impossible.

(2) Oui, $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ est connexe par arc. On va relier toute matrice de $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ à I_2. Soit $M \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$, si M a des valeurs propres, elles sont de même signe.
 – Si M n'a pas de valeur propre réelles alors pour tout $t \in [0, 1]$, $\det(tI_2 + (1-t)M)$ ne s'annule jamais donc $f\ : t \in [0, 1] \mapsto tI_2 + (1-t)M$ est une application continue de $[0, 1]$ dans $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ qui vérifie $f(0) = M$ et $f(1) = I_2$.
 – Si M a deux valeurs propres positives, le raisonnement ci-dessus s'applique.
 – Si M a deux valeurs propres négatives alors, en posant R_θ la rotation d'angle θ et $g(\theta) = R_\theta M$, $g(0) = M$ et $g(\pi) = -M$ puis on utilise le point précédent.

(3) Là, c'est un peu plus difficile. On utilise la décomposition polaire. Si $A \in \mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ alors $A = OS$ où $O \in \mathcal{O}^+(n)$ (matrice orthogonale de déterminant > 0) et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ (matrice symétrique définie positive). En effet, on a $A^{\mathrm{T}}A = S^2$, il suffit de prendre $S = \sqrt{A^{\mathrm{T}}A}$ et $O = AS^{-1}$.
L'application $(O, S) \in \mathcal{O}^+(n) \times \mathcal{S}_n^{++}(n) \mapsto OS \in \mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ est continue et surjective, pour prouver la connexité de $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$, il suffit donc de prouver que $\mathcal{O}^+(n)$ et $\mathcal{S}_n^{++}(n)$ sont connexes par arcs.
 – Cas de $\mathcal{S}_n^{++}(n)$: on sait que $S \in \mathcal{S}_n^{++}(n)$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont > 0. $S = PDP^{-1}$, on pose $S(t) = P[(1-t)D + tI_n]P^{-1}$, $t \mapsto S(t)$ est un chemin continu inclus dans $\mathcal{S}_n^{++}(n)$. $S(0) = S$ et $S(1) = I_n$. Toutes les matrices de $\mathcal{S}_n^{++}(n)$ sont donc reliées par un chemin continu passant par I_n et contenu dans $\mathcal{S}_n^{++}(n)$. On en conclut que $\mathcal{S}_n^{++}(n)$ est connexe par arcs.
 – Cas de $\mathcal{O}^+(n)$: là, cela devient plus acrobatique. $O \in \mathcal{O}^+(n)$ est une matrice normale (i.e. elle commute avec sa transposée). Elle est donc $\mathbb{C}$-diagonalisable et toutes ses valeurs propres sont de module 1 (cf. compléments du cours...). Sur $\mathbb{R}$, elle est semblable à une matrice $\mathrm{Diag}(I_k, R_1, \ldots, R_h)$ où les R_i sont des matrices de rotation d'angle θ_i : $O = P\,\mathrm{Diag}(I_k, R_1, \ldots, R_h)P^{-1}$. On pose $O(t) = P\,\mathrm{Diag}(I_k, R_1(t), \ldots, R_h(t))P^{-1}$ où $R_i(t)$ est la rotation d'angle $(1-t)\theta_i$. $O(t)$ est dans $\mathcal{O}^+(n)$, $t \mapsto O(t)$ est continue, $O(0) = O$, $O(1) = I_n$. Comme dans le cas de $S_n^{++}(n)$, on en déduit que $\mathcal{O}^+(n)$ est connexe par arcs.

Conclusion : $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

Solution 1.2.5 (Sébastien Lérique) Note : 7
Examinateur : cheveux longs en queue de cheval, un peu désolé de ce que je fais parce je lui fais aucune démonstration propre...

(1) Cf. fonctions splines.

Solution 1.2.6 (Bastien Mallein) Note : ?
Examinateur : cheveux courts et noirs, très gentil mais ne parle vraiment pas fort.

(1) On cherche $(u_n), \lambda$ tel que $T(u_n) = \lambda u_n$.
Posons $p = \min\{n \in N* \mid |u_n| > 0\}$, alors l'égalité au rang p s'écrit $\frac{1}{p}u_p = \lambda u_p$, avec

$|u_p| > 0$, d'où $\mathrm{Sp}(T) \subset \{\frac{1}{p}, p \in N*\}$.

L'autre sens est direct, on pose $u_n = 0$ pour $n < p$, $u_p = 1$, et $u_n = \frac{1}{\frac{n}{p}-1} \sum_{k=1}^{n-1} u_k$, qui est la seule valeur propre à une constante multiplicative près, la preuve étant par récurrence. Pour calculer les vap, on constate, en développant $\sum_{k=1}^{n} k^p = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^p$ que $T(n^p) = P(n)$, avec $P \in R_p[X]$, de coefficient dominant $\frac{1}{p+1}$, donc la matrice M de la restriction aux suites polynômes de degré inférieur ou égal à $p-1$ de T est une matrice triangulaire, et $M - \frac{1}{p} I_p$ est de rang $n-1$. Par conséquent, le noyau est de dimension 1, donc non réduit au vecteur nul. Or, les seuls polynômes candidats à l'intégration du noyau sont de la forme $\prod_{i=1}^{p}(n-i)$, car s'annule en $1, \ldots, p-1$, d'où l'égalité.

(2) Soit $x \in \mathrm{Ker}\{(T - \frac{1}{p}\,\mathrm{Id})^2\}$. Soit $x \in \mathrm{Ker}\{(T - \frac{1}{p}\,\mathrm{Id})\}$, soit $(T(x) - \frac{1}{p}x) \in \mathrm{Ker}\{(T - \frac{1}{p}\,\mathrm{Id})\}$. Soit n tel que x_n premier élément non-nul. Si $n < p$, on a u_n non-nul, si $n \geqslant p$, on a $u_p = 0$ donc $x \in \mathrm{Ker}\{(T - \frac{1}{p}\,\mathrm{Id})\}$. Par conséquent, $\mathrm{Ker}\{(T - \frac{1}{p}\,\mathrm{Id})^2\} = \mathrm{Ker}\{(T - \frac{1}{p}\,\mathrm{Id})\}$.

(3) Par récurrence, on a $\mathrm{Ker}\{(T - \frac{1}{p}\,\mathrm{Id})^k\} = \mathrm{Ker}\{(T - \frac{1}{p}\,\mathrm{Id})\}$, donc en prenant le polynôme caractéristique de T restreint au sous-espace stable, on a $P = \prod_{k=1}^{n}(\lambda_i - X)^{\omega_i}$, les vap étant réelles pour T, en utilisant le lemme des noyaux on a $E = \sum E_{\lambda_i}(T)$, avec la remarque préliminaire.

Solution 1.2.7 (Stéphane Caron) Note : 6

Examinateur : Je n'ai pas le temps de tout rédiger maintenant, les remarques sur l'examinateur viendront plus tard.

(1) C'est un vulgaire calcul de différentielle, il faut juste faire attention à ne pas se prendre les pieds dans le tapis. On définit $g_k : X \mapsto X^k$: comme

$$(X + hY)^k - X^k = h \sum_{i=0}^{k-1} X^i Y X^{k-1-i} + O(h^2),$$

on a $g_k'(X)(Y) = \sum_{i=0}^{k-1} X^i Y X^{k-1-i}$. On pose alors $\alpha_k = \mathrm{Tr} \circ g_k$:

$$\alpha_k'(X)(Y) = \mathrm{Tr}'(g_k(X))(g_k'(X)(Y)) = \mathrm{Tr}(g_k'(X)(Y)) = k\mathrm{Tr}(Y X^{k-1}).$$

Alors, $(\alpha_k \circ X)'(t) = (\alpha_k'(X(t)))(X'(t)) = k\mathrm{Tr}(X'(t)X(t)^{k-1}) = 0$, comme attendu.

(2) On considère le polynôme caractéristique de $X(t)$. En notant Y l'inconnue des polynômes,

$$\chi_{X(t)} = Y^2 - \mathrm{Tr}(X(t))Y + \det(X(t)).$$

On note également $\lambda(t)$ et $\mu(t)$ les valeurs propres de $X(t)$. $\mathrm{Tr}(X(t)^k)$ est indépendante de t, donc (en supposant λ et μ dérivables)

$$\forall k \geqslant 0 \quad \lambda'\lambda^k + \mu'\mu^k = 0.$$

De plus, $\det(X(t)) = \lambda(t)\mu(t)$, de dérivée $\lambda'\mu + \mu'\lambda$: comme par ailleurs $\lambda'\lambda + \mu'\mu = 0$ et $\lambda' + \mu' = 0$, en sommant on obtient

$$\det(X(t))' = (\lambda' + \mu')(\lambda + \mu) = 0.$$

$\chi_{X(t)}$ est ainsi indépendant de t, donc ses racines aussi. Il reste néanmoins à prouver que λ et μ sont bien dérivables...

Solution 1.2.8 (Vincent Pécastaing) Note : 14

Examinateur : cheveux blonds courts, maigre, la quarante cinquantaine, un fort accent de l'est, ça met une bonne ambiance matheuse dans la salle (genre soviétique i. Il laisse bien réfléchir, ne vient pas chipoter quand il voit qu'on a compris. Il a été très sympa à la fin, comme il n'y avait personne après moi, on a parlé un peu et c'est limite si on partait prendre un verre...

(1) Soit φ un tel morphisme. Then $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathbb{U}$, indeed :
- If $z = \mathrm{e}^{i\theta}$ is such as $|\varphi(z)| < 1$, alors, par continuité du morphisme on peut trouver $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ tel que $|\varphi(\mathrm{e}^{2i\pi r})| < 1$, mais alors puisque φ est multiplicative, $\varphi(1) = 1 = \varphi(\mathrm{e}^{2i\pi r})^q$, d'où $|\varphi(e^{2i\pi r})| = 1$, contradictoire. Idem pour > 1, of course.
- Du coup, on peut choisir $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue (là il a insisté pour que je lui sorte que le cercle unité est connexe par arc, gné ?) telle que :
  $\forall \theta \in \mathbb{R},\ \varphi(e^{i\theta}) = \exp[i\psi(\theta)]$.
- L'idée est alors de montrer que ψ est additive et de conclure car on connaît bien ce genre d'application ...
  L'hypothèse sur φ se traduit alors par $\forall \theta, \theta' \in \mathbb{R}\,,\ \psi(\theta+\theta') = \psi(\theta)+\psi(\theta') \mod(2\pi)$.
  Or, l'application $(\theta, \theta') \mapsto \psi(\theta + \theta') - \psi(\theta) - \psi(\theta')$ est continue sur $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $2\pi\mathbb{Z}$, elle est donc constante. Là, ça lui paraissait pas clair (ça se voit bien quand même, non ?), je lui ait donc détaillé :
  Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{Z}$ est continue, alors si par l'absurde f était non constante on aurait etc...
  Quitte à translater comme il faut, on peut supposer qu'on a pris $\psi(0) = 0$ ($\varphi(1) = 1$).
  Ainsi on a montré que ψ est additive. D'où l'existence d'un réel λ tel que $\psi = \lambda\,\mathrm{d}$
  Là c'est presque torché : comme $\theta \mapsto \varphi(\mathrm{e}^{i\theta})$ est 2π-périodique, λ est nécessairement entier, donc φ est de la forme $\varphi(z) = z^k$, $k \in \mathbb{Z}$.
  Inversement toutes ces applications sont bien des morphismes continus qui conviennent.

(2) Je n'ai pas la fin de l'histoire. On prend Φ un tel morphisme. Histoire de meubler un peu, je lui dit que le déterminant rond Φ est un morphisme comme ceux que l'on vient d'étudier, je ne pensais pas que ça servirait. Après une petite solitude, il me demande si on ne pourrait pas réduire les $\Phi(z)$. Comme on a un morphisme et que $\mathbb{U}$ est commutatif (!), Φ transporte la commutativité, et $\mathrm{Im}(\Phi)$ est un sous groupe commutatif. On pense bien entendu à la trigonalisation simultanée.
MAIS, il y a mieux.
Soit Φ un tel morphisme, on pose $\varphi(t) = \Phi(\mathrm{e}^{it})$, φ vérifie la propriété $\varphi(t+s) = \varphi(t)\varphi(s)$ (produit matriciel). $\varphi(0) = I_2$ et sur $[0, \alpha]$, $A = \displaystyle\int_0^\alpha \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ est inversible.
En effet, si $\varphi(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}$ alors $a(0) = 1 = d(0)$ et $b(0) = c(0) = 0$. Par continuité, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour $t \in [0, \alpha]$, $a(t)$ et $d(t) > \dfrac{1}{2}$, $|b(t)|$ et $|c(t)| < \dfrac{1}{2}$. Dans ce cas
$$\det \int_0^\alpha \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\alpha a(t)\,\mathrm{d}t \times \int_0^\alpha d(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^\alpha b(t)\,\mathrm{d}t \times \int_0^\alpha c(t)\,\mathrm{d}t > 0.$$
On a alors
$$\int_0^\alpha \varphi(t+s)\,\mathrm{d}t = \left(\int_0^\alpha \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right)\varphi(s) = \left(\int_s^{s+\alpha} \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right)$$
donc, en multipliant par A^{-1}, on obtient $\varphi(s) = A^{-1}\left(\displaystyle\int_s^{s+\alpha} \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right)$ qui est dérivable.
On dérive donc la relation $\varphi(t + s) = \varphi(t)\varphi(s)$ puisqu'on a le droit maintenant d'où

$\varphi'(s) = \varphi'(0)\varphi(s)$. La résolution de cette équation différentielle donne $\varphi(t) = A\,\mathrm{e}^{tB}$ où $B = \varphi'(0)$. Comme $\varphi(0) = I_2$, on en déduit que $A = I_2$, φ est aussi 2π-périodique donc $\mathrm{e}^{2\pi B} = I_2$. Montrons que B est diagonalisable.
Supposons que $B = P\begin{pmatrix}\lambda & \mu\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}P^{-1}$ (i.e. B admet λ comme valeur propre double). $B = P(\lambda I_2 + \mu N)P^{-1}$ donc

$$\mathrm{e}^{2\pi B} = P\,\mathrm{e}^{2\pi\lambda}(I_2 + \mu N)P^{-1} = \mathrm{e}^{2\pi\lambda}\,I_2 + \mathrm{e}^{2\pi\lambda}\,\mu PNP^{-1} = I_2.$$

En multipliant par P^{-1} à gauche et P à droite, on obtient $\mathrm{e}^{2\pi\lambda}\,I_2 + \mathrm{e}^{2\pi\lambda}\,\mu N = I_2$ donc $\mu = 0$ et $\lambda \in i\mathbb{Z}$.
Conclusion : que B ait une valeur propre double ou deux valeurs propres distinctes, B est diagonalisable et $B = P\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}P^{-1}$ avec $\lambda_k \in i\mathbb{Z}$ pour $k \in \{1,2\}$. On en déduit que $\varphi(t) = P\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{ik_1t} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{ik_2t}\end{pmatrix}P^{-1}$ puis que $\Phi(z) = P\begin{pmatrix}z^{k_1} & 0\\ 0 & z^{k_2}\end{pmatrix}P^{-1}$.
PS : cette méthode s'applique à l'identique dans le cas de la première question.

Solution 1.2.9 (Bastien Mallein) Note : ?
Examinateur : L'examinateur est sympa et ouvert à la discussion, il s'assure que la question a bien été compris, et ponctue toute remarque faite par un d'accord sonore. D'ailleurs, la colle n'a été que ça, de la discussion, des preuves avec les mains...
On distingue plusieurs cas :
- M diagonalisable, on écarte les cas immédiats où $M = \pm I_2$ et où U_n est vecteur propre de M.
  $M = P\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}P^{-1} = PDP^{-1}$. On pose $V_n = P^{-1}U_n$ alors la suite V_n est définie par $V_0 = P^{-1}U_0$ et $V_{n+1} = \dfrac{DV_n}{\|PDV_n\|}$. Si $V_n = \begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix}$ et si $|\lambda| > |\mu|$ (on ne peut avoir $|\lambda| = |\mu|$ car $\lambda\mu = 1$ et on a écarté le cas $\lambda = \mu$) alors

$$a_{n+1} = \frac{\lambda a_n}{\|PDV_n\|},\ b_{n+1} = \frac{\mu b_n}{\|PDV_n\|}$$

  donc, comme $b_0 \neq 0$ alors $b_n \neq 0$ pour tout n, de même pour a_n donc $\left|\dfrac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right| = \left|\dfrac{\mu}{\lambda}\right| \times \left|\dfrac{b_n}{a_n}\right|$ et par conséquent, $\dfrac{b_n}{a_n} \to 0$. Comme les vecteurs U_n sont normés, on en déduit que $b_n \to 0$. On peut alors conclure :
  - Si $\lambda > 0$ alors a_{n+1} et a_n sont de même signe, que l'on peut supposer positif (quitte à changer le premier vecteur de la base diagonalisante) et

$$a_{n+1} = \frac{\lambda a_n}{\sqrt{(\alpha\lambda a_n + \gamma\mu b_n)^2 + (\beta\lambda a_n + \delta\mu b_n)^2}} = \frac{1}{\sqrt{(\alpha + \gamma\frac{\mu b_n}{\lambda a_n})^2 + (\beta + \delta\frac{\mu b_n}{\lambda a_n})^2}} \to \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

    donc la suite (U_n) converge vers le vecteur propre unitaire associé à la valeur propre λ (il y a deux vecteurs qui répondent à la question, celui qui convient est déterminé par le signe de la décomposition de U_0 sur les axes des vaps.
  - Si $\lambda < 0$ alors les signes des termes a_{n+1} et a_n sont alternés, la suite (U_n) n'a pas de limite.
- M trigonalisable : $M = P\begin{pmatrix}\pm 1 & 1\\ 0 & \pm 1\end{pmatrix}P^{-1}$.

– Si M n'admet que 1 comme valeur propre alors, en conservant les notations ci-dessus,

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{\sqrt{[\alpha(a_n+b_n)+\gamma b_n]^2 + [\beta(a_n+b_n)+\delta b_n]^2}},$$
$$b_{n+1} = \frac{b_n}{\sqrt{[\alpha(a_n+b_n)+\gamma b_n]^2 + [\beta(a_n+b_n)+\delta b_n]^2}}.$$

soit $\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \dfrac{a_n+b_n}{b_n} = 1 + \dfrac{a_n}{b_n}$ d'où $\dfrac{a_n}{b_n} \to +\infty$ et $b_n \to 0$.

Conclusion : là aussi, la suite (U_n) converge vers le vecteur propre unitaire associé à 1.

– Si M n'admet que -1 comme vap, (U_n) n'a pas de limite.

– M admet des valeurs propres complexes. Comme M est à coefficients réels, les valeurs propres de M sont conjuguées et leur produit vaut 1 donc elles sont de la forme $\mathrm{e}^{\pm i\theta}$ avec $\theta \in]0,\pi[$. M est $\mathbb{C}$-diagonalisable mais on a mieux, en fait M est semblable à une matrice de rotation : $M = PR_\theta P^{-1}$. La suite (U_n) n'a pas de limite mais on peut distinguer deux cas :
  – Si $\dfrac{\theta}{\pi} \in \mathbb{Q}$ alors cette suite est périodique.
  – Si $\dfrac{\theta}{\pi} \notin \mathbb{Q}$ alors $\{U_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans le cercle unité.

Solution 1.2.10 (Joseph Feneuil) Note : ?

Examinateur : très sympa, un léger accent russe et ne peut pas s'empêcher de bouger.

Solution RMS :

Soit $A \in H$, la suite (A^k) est contenue dans H qui est compact donc, il existe φ une extractrice telle que $A^{\varphi(k)} \to B \in H$. On peut supposer que $\varphi(k+1) - \varphi(k) \geqslant 2$ quitte à faire une autre extraction. Par continuité du passage à l'inverse on obtient

$$\lim_{k\to+\infty} A^{\varphi(k+1)-\varphi(k)} = B.B^{-1} = I_n = A \lim_{k\to+\infty} A^{\varphi(k+1)-\varphi(k)-1}.$$

On ainsi $A^{-1} = \lim\limits_{k\to+\infty} A^{\varphi(k+1)-\varphi(k)-1} \in H$ car H est fermé.

Conclusion : H est stable par produit et inverse donc H est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Ce qui suit permet de préciser les propriétés de H mais s'avère inutilement compliqué pour la résolution de l'exercice.

– Montrons tout d'abord que toutes les matrices de H ont des valeurs propres de module 1 :
  Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ pour $A \in H$ alors $AX = \lambda X$ où X est un vecteur propre de A. Soit $A_p = A^p$, on sait qu'il existe une suite extraite $(A_{\varphi(p)})$ qui converge vers $B \in H$. Or $A^{\varphi(p)}X = \lambda^{\varphi(p)}X \to BX$. La suite $(\lambda^{\varphi(p)})$ converge donc on a déjà $|\lambda| \leqslant 1$. Si $|\lambda| < 1$ alors $BX = 0$ donc B ne serait pas inversible ce qui est exclu.
  Conclusion : $\forall A \in H$, $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{U}$.

– Montrons maintenant que toute matrice de H est diagonalisable :
  Soit $A = PJP^{-1}$ où J est la réduite de Jordan de A en supposant A non diagonalisable.
  Calculons J_1^p où $J_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$. $J_1 = \lambda I + N$ et $J_1^p = \lambda^p I + p\lambda^{p-1}N + \cdots$ et on ne peut extraire de suite convergente de (J_1^p) car $p|\lambda^{p-1}| \to +\infty$ quand $p \to +\infty$.
  Conclusion : par l'absurde, on a prouvé que A était diagonalisable.

– Soit $A = P\,\mathrm{Diag}(\mathrm{e}^{i\theta_k})P^{-1} \in H$, la suite (A^p) est une suite de H.
  – Si $\theta_k/\pi \notin \mathbb{Q}$ alors on sait que la suite $(\mathrm{e}^{ip\theta_k})$ est dense dans $\mathbb{U}$, on appelle $I \subset [\![1,n]\!]$ les entiers vérifiant ceci.
  – Si $\theta_k/\pi \in \mathbb{Q}$ alors il existe p_k tel que $\mathrm{e}^{ip_k\theta_k} = 1$, on pose $J = [\![1,n]\!] \setminus I$.

Quitte à renuméroter les éléments de la base diagonalisante, on peut supposer que $J = [\![1, h]\!]$ et $I = [\![h+1, n]\!]$ avec la convention $h = 0$ si $J = \emptyset$.
Soit $p = \text{P.P.C.M.}(p_k)_{k\in J}$ ($p = 0$ si $J = \emptyset$) et considérons la suite (A^{pm-1}).
Si $A = P \begin{pmatrix} D_J & 0 \\ 0 & D_I \end{pmatrix} P^{-1}$ alors $A^{pm-1} = P \begin{pmatrix} D_J^{-1} & 0 \\ 0 & D_I^{pm-1} \end{pmatrix} P^{-1}$. Comme les termes de la diagonale de D_I^{pm} sont denses dans $\mathbb{U}$, on peut en extraire une suite qui va tendre vers I_n et par conséquent $D_I^{pm-1} \to D_I^{-1}$.
En effet, on commence par θ_{h+1} : on extrait une suite qui converge vers 1 de la suite $\left(\mathrm{e}^{ipm\theta_{h+1}}\right)$. Soit φ une extractrice, les suites $\left(\mathrm{e}^{ip\varphi(m)\theta_{h+l}}\right)$ ne convergent peut-être pas mais on sait que l'on peut en extraire des suites convergentes. $\mathrm{e}^{ip\varphi(m)\theta_{h+2}} \to \mathrm{e}^{ip\theta'_{h+2}}$ et là on recommence le même processus, soit $\theta'_{h+2} \in \pi\mathbb{Q}$ soit $\theta'_{h+2} \notin \pi\mathbb{Q}$ et on termine par une récurrence finie.
Il existe alors une extraction φ telle que $A^{p\varphi(m)-1} \to A^{-1} \in H$ ce qui permet de conclure que H est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Solution 1.2.11 (Guillem Cazassus) Note : ?
Examinateur : Jeune avec l'accent de l'est, et je confirme il laisse vraiment seul. Pour la petite histoire un prof est venu assister (la trentaine peut-être) et le gars lui demande "vous êtes élève de sup ?"
Indications :
2. Montrer que K n'est pas troué i.e. que son complémentaire est connexe. Le fait que K soit compact devrait entraîner la connexité par arcs (c'est vrai ça Jimmy ? NON !).
On pourra démontrer et utiliser le principe du maximum : Si $P \in \mathbb{C}[x]$ et U est un ouvert borné de $\mathbb{C}$ alors $\sup_{z\in U} |P(z)| = \sup_{z\in fr(U)} |P(z)|$.
Commentaires :
Pour des polynômes P de la forme $X^2 + c$, l'ensemble K est une fractale célèbre : c'est un ensemble de Julia. Voir les figures Julia 1 et Julia 2 :

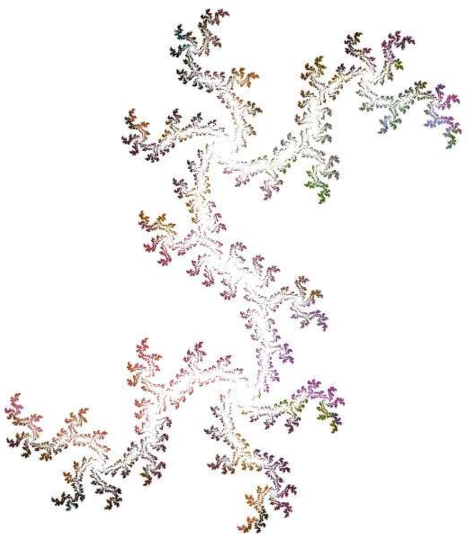

FIG. 1. Julia 1

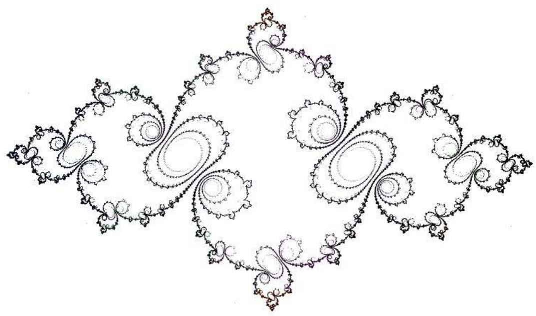

FIG. 2. Julia 2

C'est joli, hein ! J'avais fait mon TPE sur des truc comme ça en 1ere, y'a une autre figure voisine c'est l'ensemble de Mandelbrot : au lieu de fixer c, on fixe $u_0 = 0$ et l'ensemble est l'ensemble des points c tels que la suite reste bornée. Voyez plutôt :
Y'a eu des tonnes de travaux et de médailles fields (pour prouver des histoires de connexité) sur ces trucs là. Et j'imaginais pas du tout que c'était à ma portée de démontrer des trucs comme

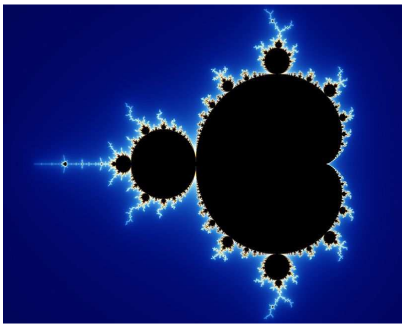

FIG. 3. Mandelbrot

ça. Et au début, connaissant la gueule qu'ils avaient ces ensembles, j'ai flippé !
Voilà voilà pour la ptite histoire ... je posterai la solution plus tard.

Solution 1.3.1 (David Fourquet) Note : ?
Examinateur : Attention sur cet oral si on demande quelle ENS vous préférez il y a un piège.... Sinon examinateur pas causant du tout, qui écoute vraiment que dalle et qui cherche pas à suivre ce que vous dites, je conseille vraiment de tout écrire au tableau : les justifications orales lui plaisent pas trop...
Il essaie aussi de déstabiliser avec des questions débiles .

(1) a) $D = \text{Vect}(f)$ $(f \neq 0)$ est stable par T ssi $T(f) = \lambda f$. Or $T(f) = \lambda f$ entraîne $f = \lambda f'$ d'où
– si $\lambda \neq 0$ alors $f(x) = C\,\mathrm{e}^{x/\lambda}$ et $f(0) = 0 \Rightarrow f = 0$,
– si $\lambda = 0$ alors $f = 0$
et dans les deux cas, $f = 0$ ce qui est impossible.

b) Soit E un sous-espace stable par T de dimension n, $(f_1, \dots, f_n)$ une base de E et A la matrice de T.
D'après Cayley-Hamilton, $P_A(T) = 0$ soit $a_n T^n(f_i) + \cdots + a_0 f_i = 0$ pour tout i.
Soit $g_i = T^n(f_i)$ alors g_i est solution d'une équation différentielle d'ordre n et satisfait aux conditions initiales $g_i(0) = g_i'(0) = \ldots = g_i^{(n-1)}(0) = 0$ donc, d'après Cauchy-Lipschitz, $g_i = 0$ soit $f_i = 0$ ce qui est impossible.

(2) On a $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = A\left[1 + \dfrac{\alpha_1 - \beta_1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$. Soit $b_n = \dfrac{a_n}{A^n n^{\alpha_1 - \beta_1}}$ alors

$$\begin{aligned}\frac{b_{n+1}}{b_n} &= \left(1 + \frac{\alpha_1 - \beta_1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(1 - \frac{\alpha_1 - \beta_1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\ &= 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

d'où $\ln b_{n+1} - \ln b_n = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. La série $\sum \ln b_{n+1} - \ln b_n$ converge, on en déduit que la suite $\ln b_n$ converge donc $a_n \sim c A^n n^{\alpha_1 - \beta_1}$.

Solution 1.3.2 (Rémi Boutonnet) Note : 17
Examinateur : cool, d'âge moyen (35-40), ouvert.

(1) Ok. (mais le pire c'est que j'avais tellement la tête dans cul que j'ai fait un détour par les intégrales simples... ?)

(2) Là je me suis un peu réveillé et je lui ai sorti que l'expression de V me faisait penser à la norme 2 (qui est en général sympa avec les coeff de Fourier). Du coup j'ai posé $g(x,y) = f(x) - f(y)$. On a alors : $\dfrac{V(f)}{T^2} = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T ||g(t,.)||_2^2\,\mathrm{d}t$. Un petit coup de "Père sifal" (à lire vite), et on est amené à calculer les coeff de Fourier de $g(t,.)$, qui sont égaux à ceux de $-f$ (sauf le zéroième qui vaut $f(t) - c_0(f)$). Ainsi après avoir sorti de l'intégrale tous les termes qui ne dépendent pas de t on a :

$$\begin{aligned}\frac{V(f)}{T^2} &= \frac{1}{T}\int_0^T |f(t) - c_0(f)|^2 dt + \sum_{n\neq 0} |c_n(f)|^2 \\ &= 2\sum_{n\neq 0} |c_n(f)|^2\end{aligned}$$

encore Parseval et ça turch. On trouve : $V(f) = 2T^2 \sum\limits_{n\neq 0} |c_n(f)|^2$.

(3) Ben là au début je suis parti dans des inégalité tordues (IAF...) et quand j'ai commencé à ramer il m'a fait le coup du "faites un pas en arrière..." du coup j'ai vu qu'avant la question 3 il y en avait eu deux autres et ça marche bien :
Grâce au 2 et à F lipschitzienne, en utilisant $c_n(f') = nc_n(f)\dfrac{2\pi}{T}$, on a

$$\begin{aligned}V(f') &= 2T^2 \sum_{n\neq 0} |c_n(f)|^2. \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \\ &\geqslant \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 V(f).\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}V(f') = \iint_{[0,T]^2} |f'(s) - f'(t)|^2\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t &= \iint_{[0,T]^2} |F(f(s)) - F(f(t))|^2\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \\ \leqslant \iint_{[0,T]^2} k^2 |f(s) - f(t)|^2\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = k^2 V(f)\end{aligned}$$

d'où $\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2 V(f) \leqslant k^2 V(f)$. Comme f est supposée non constante alors le 1 nous dit que $V(f) > 0$ d'où $\dfrac{2\pi}{T} \leqslant k$ soit $T \geqslant \dfrac{2\pi}{k}$.

Solution 1.3.3 (Denis Lafarge) Note :?
Examinateur :?

(1)

Solution 1.3.4 (Sébastien Lérique) Note :?
Examinateur : sympa, je l'avais vu la veille au DMA à côté de la salle W, il a l'air de faire de la recherche (comme the farge : 30-35 ans, un peu coiffé en pétard).
Là ce fut la cata à cause de mon ignorance des résultats élémentaires sur les matrices antisymétriques...

(1) Il suffit montrer que $I_n - X$ est inversible : $\det(I_n - X) = P_X(1) \neq 0$ car les vap d'une matrice antisymétrique sont toutes imaginaires pures (ce que j'ignorais : on regarde $\imath \cdot X$ qui est hermitienne, donc ses vaps sont réelles et c'est ok). Ensuite ya plein de façons de montrer que l'inversion est continue.

(2) C'est bidon.

(3) Il m'a fait faire le cas $n = 2$, $n = 3$, puis il suffit de montrer qu'une matrice antisymétrique de taille n est semblable à

$$\begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_q \end{pmatrix}$$

où les $J_i \in \mathrm{SO}(2 \textit{ ou } 3)$, puis ça doit se faire en utilisant les cas particuliers précédents (il m'a dit ça en sortant de toute façon...).

Solution 1.3.5 (Arnaud Galimberti) Note : ?
Examinateur : ?

Solution 1.3.6 (Vincent Pécastaing) Note : 16
Examinateur : de la salle U/V, jeune, pas coiffé (vraiment pas ! limite on se demande si il ne se décoiffe pas le matin devant sa glace), portrait typique du matheux tête dans les nuages, très sympa une fois qu'on lui a montré qu'on sait de quoi on parle. M'a demandé à la fin qu'est-ce qu'il m'intéresserait de faire plus tard.

(1) Il suffit de prendre la primitive d'ordre r de $P^{(r)}$ qui prend les valeurs a_i soit

$$P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{r-1}\frac{X^{r-1}}{(r-1)!} + \int_0^X \frac{(X-t)^{r-1}}{(r-1)!} P^{(r)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

On vérifie alors que $P \in E_n$. L'unicité est immédiate.

(2) f est une fonction polynomiale de (μ, a) donc f est continue.

(3) Immédiat car $E_n(r) = f^{-1}(\mathbb{C}^{n-r-1} \times \{0\}^{r+1})$ fermé comme image réciproque d'un fermé par une application continue.

Solution 1.3.7 (Joseph Feneuil) Note : ?
Examinateur : sympa, grand, un peu imposant.

(1) $(v_1, \dots, v_r)$ est liée ssi il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ non tous nuls tels que $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r = 0$.
On normalise le vecteur $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ pour avoir $\lambda_1^2 + \cdots + \lambda_r^2 = 1$.
Soit $(v_1^n, \dots, v_r^n)$ une suite de vecteurs de W qui converge vers $(v_1, \dots, v_r)$, montrons que cette limite est dans W. Soit $(\lambda_1^n, \dots, \lambda_r^n)$ les coefficients normalisés de chaque combinaison linéaire. La sphère unité de $\mathbb{R}^r$ est compacte donc on peut en extraire une suite convergente $(\lambda_1^{\varphi(n)}, \dots, \lambda_r^{\varphi(n)})$ vers $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$. On a ainsi

$$\lambda_1^{\varphi(n)} v_1^{\varphi(n)} + \cdots + \lambda_r^{\varphi(n)} v_r^{\varphi(n)} = 0$$

et, en passant à la limite $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r = 0$ i.e. la famille est liée et W est fermé.
W^c le complémentaire de W est ouvert.

(2) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on écrit $A = (v_1, \dots, v_n)$ sous forme de vecteurs colonnes. Notons $W'_\sigma = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid (v_{\sigma_1}, \dots, v_{\sigma_r}) \text{ libre}\}$. Compte tenu de la première question, W'_σ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
$\mathrm{Rg}(A) \geqslant r \Leftrightarrow \exists \sigma \in \mathfrak{S}_n \mid (v_{\sigma_1}, \dots, v_{\sigma_r})$ libre donc, si on note $O_r = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Rg}(A) \geqslant r\}$ alors $O_r = \displaystyle\bigcup_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} W'_\sigma$ est un ouvert.

Solution 1.3.8 (Guillem Cazassus) Note : 16

Examinateur : En regardant ma carte d'identité, il remarque que je viens de Saint-Gaudens : j'ai de suite compris que c'était un mec bien. M'a laissé seul dans la salle pendant 10 minutes pour la première question : "ça, c'est pour la mise en bouche". Pour la suite de l'exo, m'a laissé(voire même incité à) l'arnaquer avec des jolis dessins (l'exo aurait pu devenir très lourd...) tout en étant très rigoureux à d'autres moments (genre quand j'oubliais de prouver la continuité en 0...).

(1) Notons $F(x) = \{t \geqslant 0 | t.x \in A\}$. Le fait que O soit intérieur à A entraîne l'existence d'une boule $\overline{\mathcal{B}}(O, \alpha) \subset A$ ($\alpha > 0$). Ceci montre que $\alpha \in F(x)$.
D'autre part $F(x)$ est majoré par 1, donc $f(x)$ est bien défini et $\alpha \leqslant f(x) \leqslant 1$.

(2) Ici, des jolis dessins ont suffi à le convaincre :

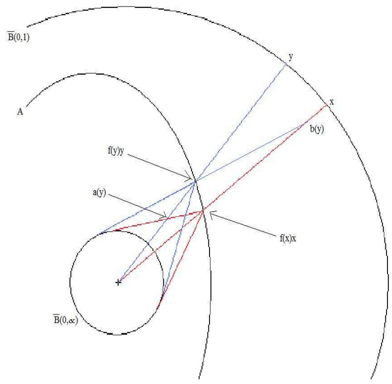

FIG. 4. joli-dessin

On fixe $x \in \mathcal{S}$ et on prend un $y \in \mathcal{S}$ qui va tendre vers x.
On se place dans le plan contenant O, x et y et on définit $a(y)$ et $b(y)$ comme sur le dessin (on a représenté en bleu l'enveloppe convexe de $\overline{\mathcal{B}}(O, \alpha) \cup \{f(y)y\} \subset A$ et en rouge celle de $\overline{\mathcal{B}}(O, \alpha) \cup \{f(x)x\} \subset A$).
On a donc l'encadrement $\|a(y)\| \leqslant f(y) \leqslant \|b(y)\|$, et le fait que $\|a(y)\|$ et $\|b(y)\|$ tendent vers $f(x)$ quand y tend vers x assure la continuité de f en x.

(3) On définit $g \in \mathcal{F}(\mathcal{B}, A)$ par $g(x) = \left\{ f(\frac{x}{\|x\|})x \ si \ x \neq 00 \ si \ x = 0 \right\}$
- g est bien définie,
- $\|g(x)\| \leqslant \|x\|$ montre que g est continue en 0.
- Sur $\mathcal{B} - \{0\}$, g est la composée de fonctions continues.
- la fonction $h \in \mathcal{F}(A, \mathcal{B})$ définie par $h(x) = \left\{ \frac{1}{f(\frac{x}{\|x\|})}x \ si \ x \neq 00 \ si \ x = 0 \right\}$ est définie,

continue pour les mêmes raisons et il s'avère que $h = g^{-1}$.
h est donc un homéomorphisme.

(4) bonus : Soit $g \in \mathcal{F}(A, B)$ une telle fonction. Soit $y \in B$ et (y_n) une suite convergeant vers y. La suite $(g^{-1}(y_n))$ a au moins une valeur d'adhérence car A est compact, et toute valeur d'adhérence de cette suite, ayant nécessairement pour image y, vaut $g^{-1}(y)$. Ainsi cette suite converge vers $g^{-1}(y)$, ce qui assure la continuité de g^{-1}.

Solution 1.4.1 (Denis Lafarge ?) Note : ?

Examinateur : très jeune (genre 2*12 ans), souriant, calme : donne des indications sous forme de questions (cf exercice : que pensez vous du cas α réel ?).

(1) Cf. compléments du cours sur l'intégration des relations de comparaison.

(2) φ n'est pas intégrable car $\lim_{x\to+\infty} x^2\varphi(x) = +\infty$.

On fait alors une I.P.P. :

$$\int_1^x e^{\alpha t}\,t^\beta\,dt = \left[\frac{1}{\alpha}\,e^{\alpha t}\,t^\beta\right]_1^x - \frac{\beta}{\alpha}\int_1^x e^{\alpha t}\,t^{\beta-1}\,dt.$$

Si α et β sont réels, ça marche car $e^{\alpha x x^{\beta-1}} = o\left(e^{\alpha x}\,x^\beta\right)$ et le lemme précédent s'applique.
Si α et β sont complexes, cela se complique...
On pose $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$ et $\beta = \beta_1 + i\beta_2$ et on reprend l'intégration par partie ci-dessus et on en fait une deuxième :

$$\int_1^x e^{\alpha t}\,t^\beta\,dt = \frac{1}{\alpha}\,e^{\alpha x}\,x^\beta - \frac{e^\alpha}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha^2}\,e^{\alpha x}\,x^{\beta-1} + \frac{\beta}{\alpha^2}\,e^\alpha + \frac{\beta(\beta-1)}{\alpha^2}\int_1^x e^{\alpha t}\,t^{\beta-2}\,dt.$$

On a aussi $e^{\alpha x}\,x^{\beta-2} = o\left(e^{\alpha_1 x}\,x^{\beta_1-1}\right)$ donc

$$\int_1^x e^{\alpha t}\,t^{\beta-2}\,dt = o\left(\int_1^x e^{\alpha_1 t}\,t^{\beta_1-1}\,dt\right)$$

et, vu le cas réel traité en préambule, $\int_1^x e^{\alpha_1 t}\,t^{\beta_1-1}\,dt \sim e^{\alpha_1 x}\,x^{\beta_1-1}$ donc, on peut réécrire l'intégration par parties ci-dessus sous la forme

$$\int_1^x e^{\alpha t}\,t^\beta\,dt = \frac{1}{\alpha}\,e^{\alpha x}\,x^\beta - \frac{\beta}{\alpha^2}\,e^{\alpha x}\,x^{\beta-1} + o\left(e^{\alpha_1 x}\,x^{\beta_1-1}\right)$$

ce qui se traduit par $\int_1^x e^{\alpha t}\,t^\beta\,dt \sim \frac{1}{\alpha}\,e^{\alpha x}\,x^\beta$.

Solution 1.4.2 (Sébastien Lérique) Note : 18
Examinateur : sympa, aide quand il faut, me demande à la fin qu'est-ce qui me motive à venir dans une ENS, et si je connaissais l'existence de Ker Lann

(1) On a : $\frac{P'}{P} = \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j}{X - a_j}$ (cf proposition 1.5.11 page 36) donc, si $z \in A' \setminus A$, $P'(z) = 0$ et

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j}{z - a_j} = 0 = \sum_{j=1}^n \alpha_j\frac{\bar z - \bar a_j}{|z - a_j|^2} \Rightarrow \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j z}{|z - a_j|^2} = \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j a_j}{|z - a_j|^2}.$$

Si on choisit $\frac{1}{\mu} = \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j}{|z - a_j|^2}$ alors, la dernière relation signifie que : $\forall z \in A' \setminus A$, z est barycentre des a_j affectés des coefficients $\frac{\mu\alpha_j}{|z - a_j|^2}$ ce qui signifie encore que A' est contenu dans l'enveloppe convexe de A (ce qui était évident pour toutes les racines multiples de P).

(2) C'est la méthode de Newton pour trouver les racines d'un polynôme. La suite converge de manière quadratique vers λ_p, sauf si c'est une racine de P', auquel cas on a juste $x_{n+1} - \lambda_p = O(x_n - \lambda_p)$. Avec une fonction quelconque (il doit y avoir des hypothèses de convexité), ça a l'air de marcher pareil, mais yavait plus trop de temps. De toute façon c'est tout dans le Jimmy dans les activités algorithmiques je crois...

Solution 1.4.3 (Arnaud Galimberti) Note : ?
Examinateur : ?

(1) C'est le produit scalaire associé à la base canonique de $\mathcal{M}_{d,r}(\mathbb{R})$.

(2) Immédiat.

(3) $< MA, B >= \mathrm{Tr}(B^{\mathrm{T}}MA) = \mathrm{Tr}[(M^{\mathrm{T}}B)^{\mathrm{T}}A] =< A, M^{\mathrm{T}}B >$.

(4) Soit $f(X) = N(AB - BX)^2$ alors

$$\begin{aligned} f(X) &= \mathrm{Tr}[(B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} - X^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}})(AB - BX)] \\ &= \mathrm{Tr}(B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}AB) - 2\,\mathrm{Tr}(B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}BX) + \mathrm{Tr}(X^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}BX) \end{aligned}$$

d'où

$$f(X+H) = f(X) - 2\,\mathrm{Tr}(B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}BH) + 2\,\mathrm{Tr}(X^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}BH) + 2\,\mathrm{Tr}(H^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}BH)$$

et si X réalise un minimum de f, la différentielle de f en X doit être nulle donc

$$\forall H \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R}),\ \mathrm{Tr}(B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}BH) = \mathrm{Tr}(X^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}BH)$$

soit $X^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}B = B^{\mathrm{T}}AB$ et en prenant les transposées, $B^{\mathrm{T}}BX = B^{\mathrm{T}}AB$.
Réciproquement : si X_0 vérifie $B^{\mathrm{T}}BX_0 = B^{\mathrm{T}}AB$ alors

$$f(X_0 + H) = f(X_0) + 2\,\mathrm{Tr}(H^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}BH) \geqslant f(X_0).$$

Solution 1.4.4 (Yoann Roques) Note : ?
Examinateur : sympa et patient comme beaucoup à l'ENS.

(1) Soit $\varphi\ : t \in [0,1] \mapsto f(u + t(v-u))$, φ est $\mathcal{C}^1$ et $\varphi'(t) = (\nabla f(u + t(v-u))|v-u)$. Or

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_0^1 [t\alpha\|v-u\|^2 + (\nabla f(u)|v-u)]\,\mathrm{d}t$$

en appliquant l'inégalité (1). En effet, on a écrit

$$\begin{aligned} (\nabla f(u + t(v-u))|v-u) &= (\nabla f(u + t(v-u)) - \nabla f(u)|v-u) + (\nabla f(u)|v-u) \\ &\geqslant \frac{\alpha}{t}\|t(v-u)\|^2 + (\nabla f(u)|v-u). \end{aligned}$$

On obtient alors directement l'inégalité demandée.

(2) On a donc

$$f(u) \geqslant f(0) + \frac{\alpha}{2}\|v\|^2 - \|\nabla f(0)\|.\|v\| \to +\infty \text{ quand } \|v\| \to +\infty$$

donc $\lim\limits_{\|u\|\to+\infty} f(u) = +\infty$.
Soit $F = \{v \in K \mid f(v) \leqslant f(v_0)\}$. F est un compact (fermé borné) donc f atteint son minimum en un point $u_0 \in F$ et ceci est bien entendu le minimum de f sur K.

(3) – ($\Leftarrow$) : en utilisant l'inégalité 2, on a :

$$\begin{aligned} f(u) &\geqslant f(u_0) + \frac{\alpha}{2}\|u-u_0\|^2 + (\nabla f(u_0)|u-u_0) \\ &\geqslant f(u_0) + \frac{\alpha}{2}\|u-u_0\|^2 \geqslant f(u_0) \end{aligned}$$

donc u_0 réalise bien le minimum de f sur K.

– ($\Rightarrow$) : comme $f_K(u_0 + t(u-u_0)) - f_K(u_0) \geqslant 0$ pour $t \in [0,1]$ (K est un convexe) alors

$$\lim_{t\to 0} \frac{f_K(u_0 + t(u-u_0)) - f_K(u_0)}{t} = (\nabla f(u_0)|u-u_0) \geqslant 0$$

c.q.f.d.

Solution 1.4.5 (Vincent Pécastaing) Note : 16

Examinateur : jeune, sympa, demande des précisions quand on est un peu vague, et toujours l'éternelle question à la fin de l'oral.

(1) J'ai décalé la sommation pour des raisons de commodité.

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\frac{1}{n}} [f(\frac{k}{n} + t) - f(\frac{k}{n})] \, \mathrm{d}t.$$

Y a la Tayle qui traîne dans le coin ... On a pour tous n , t dans $[0, \frac{1}{n}]$ et $0 \leqslant k \leqslant n-1$: $f(\frac{k}{n}+t) - f(\frac{k}{n}) = tf'(\frac{k}{n}) + \varepsilon_{k,n}(t)$ where forall k, n such as $0 \leqslant k \leqslant n-1$, $\varepsilon_{k,n}(t)$ is a big O of t^2. Mais on a besoin d'être plus précis sur cette application $\varepsilon_{k,n}$.

En fait, c'est le reste Taylor intégral d'ordre 2 de f en $\frac{k}{n}$: $\varepsilon_{k,n}(t) = \frac{1}{2}\int_0^t uf''(\frac{k}{n}+u)\,\mathrm{d}u$ donc avec M norme infinie de f'', à un facteur près, en utilisant l'inégalité de la moyenne, $|\varepsilon_{k,n}(t)| \leqslant Mt^2$

On s'y attendait, mais du moins ça montre bien que la majoration du grand O est uniforme, ce qui apporte un certain confort.

Du coup,

$$u_n = \frac{1}{2n^2} \sum_{k=0}^{n-1} f'(\frac{k}{n}) + \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\frac{1}{n}} \varepsilon_{k,n}(t) \, \mathrm{d}t$$

On commence à voir le bout mais ce n'est pas encore fini :

La deuxième somme est le TG d'une série AC car $\left| \int_0^{\frac{1}{n}} \varepsilon_{k,n}(t)\,\mathrm{d}t \right|$ est majorée (à une constante multiplicative près) par $\dfrac{M}{n^3}$ donc, la somme est un grand O de $\frac{1}{n^2}$.

On voit alors qu'une CN à la convergence de $\sum u_n$ est : $f(0) = f(1)$, car si on avait $f(0) \neq f(1)$, alors

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2n^2} f'(\frac{k}{n}) \sim \frac{f(1) - f(0)}{2n},$$

ce qui est impossible car $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{2n^2} f'(\frac{k}{n}) = u_n - \sum\limits_{k=0}^{n-1} \displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} \varepsilon_{k,n}(t)\,\mathrm{d}t$ est le TG d'une série convergente.

Il faut montrer que cette condition est aussi suffisante :

il me l'a fait redémontrer pendant la colle mais je crois que c'est au programme de sup, si la fonction est $\mathcal{C}^1$, l'erreur dans la méthode des rectangles (calcul d'intégral) est en $\dfrac{1}{n}$. Donc, si $f(0) = f(1)$, alors $\dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} f'(\frac{k}{n})$ est un grand O de $\dfrac{1}{n}$, donc u_n est la somme de deux suites qui sont TG de séries sommables : tout baigne.

(2) Je me suis senti assez "t'es seul". Jusqu'à ce qu'il finisse par me dire de considérer la suite $v_n = |u_n - c|$ où c est un point fixe de f. Un calcul rapide montre que (v_n) est décroissante (écrire $c = \dfrac{c + f(c)}{2}$). D'où (v_n) tend en décroissant vers $a \geqslant 0$. Là il y a trois cas :

– First : A partir d'un certain rang, les termes de (u_n) viennent tous de la gauche et (u_n) tend donc en croissant vers $c - a$, qui est donc un point fixe de f.

– Second : Idem à droite.

– Third : Cas malsain où aussi loin qu'on aille, les termes de (u_n) oscilleront toujours à un moment, quantificateurement :
$\forall N,\ \exists n \geqslant N \mid u_n \geqslant c + a$ et $u_{n+1} \leqslant c - a$ ou dans l'autre sens.
On va se débarrasser de ce cas :
On écrit donc absurdement que $\forall N,\ \exists n \geqslant N \mid |u_{n+1} - u_n| \geqslant 2a$ i.e. $|u_n - f(u_n)| \geqslant 4a$.
Or,$|u_n - f(u_n)| = |u_n - c + f(c) - f(u_n)| \leqslant 2|u_n - c|$. Ceci est contradictoire car $|u_n - c| \to a$.

Solution 1.4.6 (David Fourquet) Note : ?
Examinateur : ?

Solution 1.4.7 (Guillem Cazassus) Note : ?
Examinateur : Jeune, sympa et intéressé par toutes les pistes qu'on propose. Par contre m'a fait redémontrer que la norme induite par la norme euclidienne d'un matrice sdp est sa plus grande valeur propre (quel culot !). A la fin demande pourquoi on est intéressé pas les ENS et fais de la pub pour Ker Lann.
• A est sdp donc $\exists U \in O(\mathbb{R}^n)\ :\ A = U.D.U^T$, où $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$.
Posons alors $Y = U^T \cdot X = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Avec ces notations, $\langle A.X|X\rangle \,.\, \langle A^{-1}.X|X\rangle = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i.y_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n \frac{y_i^2}{\lambda_i}\right) = \sum_i y_i^4 + \sum_{i<j} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j} + \frac{\lambda_j}{\lambda_i}\right) y_i^2.y_j^2$.
Or une étude rapide de $x \mapsto x + \frac{1}{x}$ montre que $\frac{\lambda_i}{\lambda_j} + \frac{\lambda_j}{\lambda_i} \geqslant 2$, d'où la première inégalité.
• Il reste maintenant à majorer le tout. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\langle AX|X\rangle \langle A^{-1}X|X\rangle \leqslant \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} \|X\|^4 ,$$

qui est une majoration du même type mais moins fine (comparer x et $\frac{x+2+\frac{1}{x}}{4}$).
L'inégalité étant homogène, il suffit de la démontrer pour $\|X\| = 1$. On pose alors $t_i = y_i^2$, de sorte que $\sum_i t_i = 1$, le but étant de faire apparaître des barycentres ...

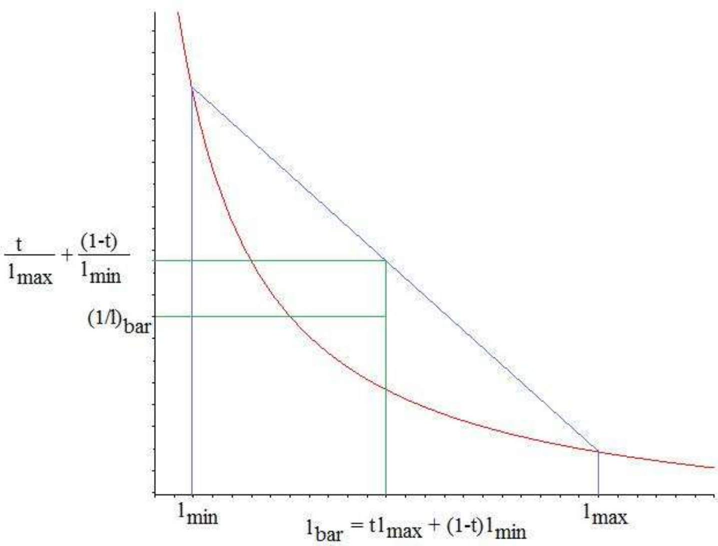

FIG. 5. dessin...

On pose $\lambda_{bar} = \sum_i t_i \cdot \lambda_i$ et on va majorer $\sum_{i=1}^n \frac{t_i}{\lambda_i}$ par $\frac{t}{\lambda_{max}} + \frac{1-t}{\lambda_{min}}$, où $t = \frac{\lambda_{bar}-\lambda_{min}}{\lambda_{max}-\lambda_{min}}$, en utilisant la convexité de $\dfrac{1}{x}$ (voir dessin)
Un petit calcul montre que $\frac{t}{\lambda_{max}} + \frac{1-t}{\lambda_{min}} = \frac{\lambda_{min}+\lambda_{max}-\lambda_{bar}}{\lambda_{min}\cdot\lambda_{min}}$.
Ainsi $\langle A \cdot X | X\rangle \cdot \langle A^{-1} \cdot X | X\rangle \leqslant \frac{\lambda_{bar}\cdot(\lambda_{min}+\lambda_{max}-\lambda_{bar})}{\lambda_{min}\cdot\lambda_{min}}$.
L'étude du trinôme $x \mapsto \frac{x\cdot(\lambda_{min}+\lambda_{max}-x)}{\lambda_{min}\cdot\lambda_{min}}$ montre qu'il atteint son maximum en $\frac{\lambda_{min}+\lambda_{max}}{2}$ et que ce maximum vaut $\frac{1}{4}(\sqrt{\frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}}} + \sqrt{\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}})^2$.

Solution 1.5.1 (Stéphane Caron) Note : 14
Examinateur : très sympa, attentif pendant qu'on cherche, n'hésite pas à donner des indications en cas de pépin. A noter que, je ne sais pas si la blague était délibérée, mais une fois le **2.a** démontré il m'a félicité "d'avoir exhibé mon q", avant de se trouver un peu gêné par la formulation...

(1) a) $\sqrt[2]{L} = L$.
   b) $\sqrt[2]{L} = \emptyset$.
(2) a) On raisonne sur les chemins du graphe associé à l'automate.
   Pour le sens direct, en notant $n = |u|$ on a $i \rightarrow^{u^2} f \in F$: alors, si $(q_0, ..., q_{2n})$ désigne le chemin associé, l'état q_n convient.
   Pour le retour, on a $i \rightarrow^{u} q$ et $q \rightarrow^{u} f \in F$, donc $i \rightarrow^{u^2} f \in F$.
   b) On écrit $\sqrt[2]{L} = \sum_{q\in Q} L(\mathcal{B}_q) \cap L(\mathcal{C}_q)$.
(3) On généralise le cas précédent en prenant $k-1$ états intermédiaires sur le chemin de i à f. La démo est sensiblement la même.
(4) La réponse est oui, mais attention : une union infinie de langages rationnels n'est pas rationnelle. Ici, on montre qu'en fait il s'agit d'une union finie : en notant $N = |Q|$, on a en effet $u^k \in L \Rightarrow \exists k' \leqslant N \mid u^{k'} \in L$. La preuve de cette propriété est identique à celle du lemme de l'étoile : si $k > N$ on met en évidence un cycle et on simplifie.
   In fine, on a donc
$$\sqrt{L} = \sum_{k\leqslant N} \sqrt[k]{L}.$$

Solution 1.5.2 (Bastien Mallein) Note : ?
Examinateur : très sympa, accepte les raisonnements avec les mains.

Solution 2.1.1 (Bastien Mallein) Note : 14
Examinateur : Un homme aux cheveux poivres, la barbe plutôt sel, en collier. Grigis à coup sûr, bien qu'il se tienne bien droit, le simple fait de parler semble être un effort pour lui.

(1) a) On suppose $|\alpha| \geqslant 1$, $|\alpha^m| \leqslant H\frac{|\alpha|^m-1}{|\alpha|-1} < H\frac{|\alpha|^m}{|\alpha|-1}$, donc c'est ok par simplification.

b) On suppose $P = QR$, avec $Q, R \in Z[X]$ non constants, on a $P(n) = Q(n)R(n)$ et $Q(n) = a\prod_{j=1}^{p}(n-\alpha_j)$, avec $|n-\alpha_j| \geqslant 1$ car α_j racine de P, or $a \in Z^*$ donc $|Q(n)| > 1$ de même pour $R(n)$ donc $P(n)$ non premier

(2) Faudrait pas exagérer non plus.
Pour les amateurs, on trouve $f(x,y,z) = yz^2 + 3xy + x^3 - x + c$...

Solution 2.1.2 (David Fourquet) Note : 12
Examinateur : ...
Voici une proposition de démonstration (à arranger...)
- A est compact, soit $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une famille d'éléments de A dense dans A (on recouvre A par des boules de rayon $1/n$, on en extrait une famille finie (Borel-Lebesgue) et on prend la réunion de l'ensemble des centres de ces boules).
- Soit $(f_n) \in L^{\mathbb{N}}$.
  - $(f_n(a_0))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de A, on en extrait une suite convergente $(f_{\varphi_0}(n)(a_0))$.
  - Par récurrence, on extrait de $(f_{\varphi_0\circ\ldots\circ\varphi_p(n)}(a_{p+1}))$ une suite convergente et on pose $\psi_p = \varphi_0 \circ \ldots \circ \varphi_p$.
  - Soit $g_p = f_{\psi_p(p)}$ une suite extraite de la suite (f_n) (c'est le procédé diagonal) alors pour tout $i \in \mathbb{N}$, les suites $(g_p(a_i))_{p\in\mathbb{N}}$ convergent, on note $f(a_i)$ leur limite.
- Comme $g_p(A) \subset A$ pour tout p et qu'il existe $B(a,r) \subset A$ alors les applications linéaires (g_p) sont uniformément bornées sur $B(a,r)$ et, par translation, sur $B(0,r)$. Il en résulte qu'elles sont uniformément lipschitziennes et que $g_p \xrightarrow[A]{C.U.}$ (théorème de Dini).
- Soit $a \in A$, $(a_{\theta(n)})$ une suite de $A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers a, on définit f sur A par

$$\begin{aligned} f(a) &= \lim_{p\to+\infty}\left(\lim_{n\to+\infty} g_p(a_{\theta(n)})\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{p\to+\infty} g_p(a_{\theta(n)})\right) \end{aligned}$$

  par le théorème de double limite. f est définie sur A, $f(A) \subset A$ et f se prolonge à tout l'espace en une application linéaire.

Conclusion : L est compact.

Solution 2.1.3 (Maxime Chammas) Note : 14
Examinateur : parler sans espérer une réponse de sa part (mon oral le plus foiré de la semaine et même de tous les concours.
On pose, pour $x \in E$: $g_x(y) = f(x,y)$ et $h_x(y) = f(y,x)$. On sait alors que $h_x = \lambda_x g_x$ car $\operatorname{Ker} g_x \subset \operatorname{Ker} h_x$.
- Si $f(x,x) = 0$ pour tout x de E alors $f(x+y, x+y) = 0 = f(x,y) + f(y,x)$ donc f est antisymétrique.
- Sinon il existe x tel que $f(x,x) \neq 0$ et $\lambda_x = 1$ pour cet élément car $h_x(x) = \lambda_x g_x(x)$.
  Soit $y \in E$, on sait que $h_y = \lambda_y g_y$, $\operatorname{Ker} g_x \neq \{0\}$ car $g_x(x) \neq 0$. Si $y \notin \operatorname{Ker} g_x$ alors $f(x,y) \neq 0$ et, comme $f(x,y) = f(y,x)$,

$$h_y(x) = f(x,y) = \lambda_y f(y,x) = \lambda_y f(x,y) \Rightarrow \lambda_y = 1.$$

On a ainsi $\forall y \notin \operatorname{Ker} g_x$, $\forall z \in E$, $k(y) = f(y,z) - f(z,y) = 0$. Comme $\operatorname{Ker} g_x^c$ est dense dans H, ce résultat s'étend à tout élément y de E.
Conclusion : $f(y,z) = f(z,y)$ pour tous couple $(y,z) \in E^2$ donc f est symétrique.

Solution 2.2.1 (Sébastien Lérique) Note : 8.5
Examinateur : âgé, cheveux gris-blanc, sympa quand il a envie, mais me laisse volontiers chercher pendant 5-10 min sans rien dire.

(1) On note a, b les 2 solutions. On a $q = ab$ et $-p = a + b$ et par l'opération du saint-esprit (enfin pas tout à fait parce qu'on sait que ça va être réel) on regarde $\frac{p^2}{q} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2$, et on a $\frac{p^2}{q} \in \mathbb{R} -]0;4[$ On remarque ensuite que le cas $\frac{p^2}{q} = 0$ est exclu, et on a une condition nécessaire :
$$\frac{p^2}{q} \in \mathbb{R}^+ - [0;4[$$
Dans l'autre sens, on prend α tel que $\alpha \cdot q$ soit réel positif, et on considère l'équation $\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + p\frac{x}{\alpha} + q = 0 \Leftrightarrow x^2 + p\alpha x + q\alpha^2 = 0$ (dont les racines sont α fois celles de l'équation d'avant). Alors $\Delta = \alpha^2 p^2 - 4\alpha^2 q$ or $\frac{p^2}{q} = \frac{\alpha^2 p^2}{\alpha^2 q} \in \mathbb{R} - [0;4[$, le dénominateur est réel, donc le numérateur aussi et on peut distinguer les cas sur delta qui est réel...
Autre version : les solutions vont s'écrire $a = \dfrac{1}{2}(-p+\delta)$ et $b = \dfrac{1}{2}(-p-\delta)$ où $\delta^2 = p^2 - 4q$. a et b ont même argument ssi $\delta = kp$ avec $k \in]-1,1[$ (immédiat en faisant un dessin), ceci est encore équivalent à $\delta^2 = k^2p^2$ où $k^2 \in [0,1[$. On trouve alors directement la C.N.S. $\dfrac{p^2}{4q} \in [4, +\infty[$.

(2) Pour la 2-ième question, idem, on trouve
$$\frac{p^2}{q} \in]0;4].$$
Autre version : ici, la C.N.S. va s'écrire $\delta = ikp$ où $k \in \mathbb{R}$ soit $\delta^2 = -k^2p^2$ et on obtient simplement la C.N.S.

Solution 2.2.2 (Bastien Mallein) Note : 14
Examinateur : cheveux blancs, grosses lunettes, très sympa (Henry ?). A noter que je suis passé à 6h, il a donc une remarquable résistance aux vannes, au moins en série 1

(1) Soit x un vecteur propre associé à λ alors, comme $x \neq 0$,
$$\|g(x) - x\| = |\lambda - 1|.\|x\| < \|x\| \Rightarrow |\lambda - 1| < 1.$$
De même, x est vecteur propre de g^p associé à λ^p donc $|\lambda^p - 1| < 1$. Ceci est vrai pour $p \in \mathbb{Z}$.
– La suite $(\lambda^p)_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée donc $|\lambda| < 1$.
– La suite $(\lambda^p)_{p\in-\mathbb{N}}$ est bornée donc $|\lambda| > 1$.
On a ainsi $|\lambda| = 1$.
Soit $\lambda = e^{i\theta}$, $\lambda^p = \cos(p\theta) + i\sin(p\theta)$ et $|\lambda^p - 1|^2 = 2 - 2\cos(p\theta)$. Comme $p \in \mathbb{Z}$, on peut choisir $\theta \in [0, \pi]$ sans perte de généralité.
– Si $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ alors il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $p\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ donc $\cos(p\theta) \leqslant 0$ et $|\lambda^p - 1| > 1$ ce qui est écarté.
– Si $\dfrac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \pi$ alors $|\lambda - 1| > 1$, écarté là aussi.
Conclusion : il ne reste plus que $\theta = 0$ soit $\lambda = 1$.

(2) On utilise les déterminants de Gramm.
Si on pose $x_1' = x_1 + \sum_{i\geqslant 2} \lambda_i x_i$, on montre que $G(x_1', x_2, \ldots, x_n) = G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$:
On s'interesse à la première colonne :

$$(x_1'|x_j) = \sum_{i\geqslant 2}(x_1|x_j) + \sum_{i\geqslant 2} \lambda_i(x_i|x_j) \text{ et } (x_1'|x_1') = (x_1|x_1') + \sum_{i\geqslant 2} \lambda_i(x_i|x_1'),$$

on retranche à la première colonne la somme des $\lambda_i \times C_i$ pour $i \geqslant 2$ (où C_i désigne la $i$ème colonne), on fait ensuite la même opération avec les lignes pour trouver :

$$G(x_1', x_2, \ldots, x_n) = G(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

On trouve aussi : $G(\lambda x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lambda^2 G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en mettant λ en facteur sur la première ligne et sur la première colonne.
Tout vecteur x de E s'écrit

$$x = \lambda e_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

où $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ est la projection de x sur H et e_0 est un vecteur unitaire orthogonal à H. En utilisant les propriétés du 2. on obtient :

$$\begin{aligned} G(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) &= G(\lambda e_0, x_1, \ldots, x_n) \text{ première propriété} \\ &= \lambda^2 G(e_0, x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ deuxième propriété} \\ &= \lambda^2 G(x_1, x_2, \ldots, x_3) \text{ car } (e_0|x_i) = 0. \end{aligned}$$

Or $|\lambda| = \mathrm{d}(x, H)$ ce qui permet de conclure.

(3) Encore un grand classique : soit $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, on a

$$\begin{aligned} s^n P(\alpha) - s^n P(k) &= -s^n P(k) \\ &= \sum_{l=0}^{n} a_l (r^l s^{n-l} - s^n k^l) \\ &= \sum_{l=1}^{n} a_l s^{n-l}(r^l - (sk)^l) = (r - sk)N \end{aligned}$$

où N est un entier. Comme $r \wedge s = 1$ alors $(r - sk) \wedge s = 1$ donc $r - sk$ divise $P(k)$.

Solution 2.2.3 (David Fourquet) Note : 13
Examinateur : ...
Soit $g(x,t) = \mathrm{e}^{-tx} \dfrac{\sin t}{t}$, $\dfrac{\partial g}{\partial t}(x,t) = -\mathrm{e}^{-tx} \sin x$ et $a > 0$.
– g est continue sur $]0, +\infty[^2$,
– $\dfrac{\partial g}{\partial t}$ est continue sur $]0, +\infty[^2$,
– Sur $]0, +\infty[\times[a, +\infty[$, $\left|\dfrac{\partial g}{\partial t}(x,t)\right| \leqslant \mathrm{e}^{-ax}$ intégrable
le théorème de dérivation sous le signe intégral s'applique donc

$$f'(t) = -\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx} \sin x \,\mathrm{d}x = \frac{-1}{1+t^2}.$$

Par intégration, on en déduit que $f(t) = C - \operatorname{Arctan} t$. Or $|f(t)| \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{t} \to 0$ quand $t \to +\infty$ donc $C = \dfrac{\pi}{2}$.

Pour en déduire l'intégrale demandée, il suffit de prouver que $f(0)$ est bien définie (immédiat par I.P.P.) et que f est bien continue en 0 :

$$\left|\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x - \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \left|\int_0^{n\pi} \frac{\sin x}{x}\left(1 - \mathrm{e}^{-tx}\right)\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{n\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{n\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}x\right|.$$

Or $\displaystyle\int_{n\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=n}^{+\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}x$ qui est le reste d'une série alternée donc majorée par son premier terme soit

$$\left|\int_{n\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \left|\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{n}$$

en majorant $\left|\dfrac{\sin x}{x}\,\mathrm{e}^{-tx}\right|$ par $\dfrac{1}{n\pi}$.

On choisit alors n assez grand pour que $\dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3}$ et $\left|\displaystyle\int_{n\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3}$ puis, on exploite la continuité de $f_n(t) = \displaystyle\int_0^{n\pi} \frac{\sin x}{x}\left(1 - \mathrm{e}^{-tx}\right)\mathrm{d}x$ en 0 pour choisir t assez petit pour que $|f_n(t)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Conclusion : f est bien continue en 0 donc

$$f(0) = \frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x.$$

C'est un exercice assez classique mais qui n'est pas très commode.

Solution 2.2.4 (Maxime Chammas) Note : 14

Examinateur : ...

(1) C'est une blague ? Eh bien non !
$u^*(H) \subset H \Leftrightarrow u(H^\perp) \subset H^\perp \Leftrightarrow H^\perp = \operatorname{Vect}(x)$ où x est un vecteur propre de u.
Conclusion : les hyperplans stables par u sont les $\operatorname{Vect}(x)^\perp$ où x est un vecteur propre de u.

(2) a) Penser à prendre la famille $]a, b[$ où $(a, b) \in \mathbb{Q}^2$, $a < b$. $\mathbb{Q}$ est dénombrable ainsi que $\mathbb{Q}^2$ donc cette famille est bien dénombrable.
   – Si $O =]c, +\infty[$ ou $]-\infty, d[$, c'est bidon (pareil pour $O = \mathbb{R}$).
   – Sinon $O =]c, d[$ et $c < x < d$. Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ alors il existe $a \in]c, x[\cap \mathbb{Q}$ et $b \in]x, d[\cap \mathbb{Q}$. $]a, b[$ convient.

b) Soit A' l'ensemble des points isolés de A. Si $a \in A'$ alors il existe O intervalle ouvert tel que $A \cap O = \{a\}$. En utilisant la question précédente, il existe $O_a \subset O$ tel que $a \in O_a$ et $O_a \in \mathcal{O}$.
Si $a' \in A'$, $a' \neq a$, de même, on met en évidence $O_{a'} \in \mathcal{O}$.
On peut ainsi définir $f : a \in A' \mapsto O_a \in \mathcal{O}$. f est injective donc A' est dénombrable.

c) Injectivité : par l'ABSURDE !

Soit $x < x'$ tels que $f(x) = f(x')$, on pose $y = \dfrac{x+x'}{2}$. $y \neq x$, $y \neq x'$ d'où

$$|x-y| < |x-x'| \text{ et } |f(x)-f(y)| < 0 \text{ arr rrg !}$$

On s'est arrêté là.

Solution 2.3.1 (Marc Houllier) Note : 17

Examinateur : J'ai eu Langevin. Comme en physique, une colle où le cours sert encore beaucoup.

(1) Mon quadrilatère au tableau est presque un losange,et il se fout de la gueule de mes carrés. Je commence par dire qu'il y a plein d'angles qu'on connaît, mais bon j'abandonne pour proposer de développer un produit scalaire avec Chasles, mais comme j'arrive pas à démarrer, je propose les complexes et ça lui plaît plus. On exprime avec les affixes que

$$\begin{array}{ll} p=(a+b)/2+i(a-b)/2 & q=(b+c)/2+i(b-c)/2 \\ r=(c+d)/2+i(c-d)/2 & s=(d+a)/2+i(d-a)/2 \end{array}$$

ce qui permet d'obtenir

$$r-p = \frac{(c+d)-(a+b)}{2} + i\frac{(b+c)-(a+d)}{2} = \alpha + i\beta$$
$$s-q = \frac{(a+d)-(b+c)}{2} + i\frac{(c+d)-(a+b)}{2} = -\beta + i\alpha$$

$(p-r) = i(s-q)$, et PR et QS sont donc orthogonales et de même longueur.

Il me demande : "Pouvez vous en dire plus sur $PQRS$?". Je dis qu'on pourrait chercher si c'est un carré, en calculant $(p+r)/2$ et $(q+s)/2$ on trouve qu'il faut que $ABCD$ soit un parallélogramme.

(2) Vu sa question bizarre je me contente d'abord d'essayer de simplifier l'expression et la suite est constante ... pour la calculer j'essaie un changement en $\tan(t/2)$ qui donne une fraction rationnelle en t^2, c'est faisable mais bof. Il me propose un changement en tan(t) qui marche mieux.

On pose $u = nt$ donc $u_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{du}{1+\sin^2 u}$, puis avec le changement de variable $u = \tan t$, on trouve $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

(3) Bon ben astuce : comme on sait que

$$\frac{\cos 5t}{\cos^5 t} = 1 - 10\tan^2 t + 5\tan^4 t$$

alors $\dfrac{\cos 5t}{\cos^5 t}$ est polynôme en $\tan^2(t)$ et qu'on a les deux racines, en regardant le coeff dominant on trouve que la somme vaut 10/5.

Solution 2.3.2 (Vincent Belz) Note : 11

Examinateur : géomètre...

(1) Avec les angles ou avec les produits vectoriels ou avec les aires, ou avec les déterminants, c'est au choix, on peut même en trouver d'autres.

En fait, chaque produit représente 2 fois l'aire du triangle !

(2) La CNS est $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OA}$ sont de même sens ce qui est encore équivalent à
$$\det(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}),\ \det(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}),\ \det(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA}) \text{ de même signe}$$
et, en termes de nombres complexes, que $\mathrm{Im}(\overline{a}b)$, $\mathrm{Im}(\overline{b}c)$, $\mathrm{Im}(\overline{c}a)$ soient de même signe.

Solution 2.3.3 (Kaïs Boubaker) Note : 11
Examinateur : géomètre...

(1) Par translation on se ramène que cas où $z = 0$, la relation devient $a\bar{b} = c\bar{d} = k \in \mathbb{R}$. A et B sont sur une même droite passant par l'origine, de même pour C et D. On écarte le cas où les 4 points sont sur une même droite. Le produit $OA.OB$ est égal au produit $OC.OD$ soit $\dfrac{OA}{OC} = \dfrac{OD}{OB}$ i.e. les triangles OAD et OCB sont semblables donc $(\widehat{AD, AB}) = (\widehat{CD, CB})$ ce qui signifie que les points A, B, C, D sont cocycliques.

(2) La fonction intégrée n'est pas définie, il y a peut-être une erreur d'énoncé (? ? ?). Si on change le signe sous la racine, Maple donne π comme résultat...

(3)

Solution 2.3.4 (Vincent Pécastaing) Note : 13.5
Examinateur : Bon, ben on doute sur l'identité de l'examinateur, il y a des chances que ça soit Grigis : cheveux blanc, taille moyenne et un peu grassouillet. Il était relativement mou, mais je n'irai pas jusqu'à le qualifier de "déchet de l'humanité"...
Après concertation, il semblerait que Stéphane et moi ayons en fait eu M. Langevin et non M.Grigis, apparemment ils tournent de façon circulaire et : Math 1 avec Rosso $\Rightarrow$ Math 2 avec Langevin. (Stéphane a eu Math 2 avant Math 1) Ce qui a semé le trouble est l'absence de géométrie dans deux planches de Langevin !

(1) Il faut exprimer $\cos(2\pi/5)$ et $\cos(4\pi/5)$, pour cela, on symétrise : soit $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$, alors on a $\omega^{-2}+\omega^{-1}+1+\omega+\omega^2 = 0$, Euler et on développe $\cos(2\alpha)$ pour obtenir un trinôme dont $\cos(2\pi/5)$ est racine. En considérant le signe, $\cos(2\pi/5) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ et $\cos(4\pi/5) = -\frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

(2) Pour l'intégrale, la gorge nouée, je lui dit qu'on peut décomposer la fraction rationnelle, gros blanc, puis j'ai une idée : on fait le changement de variable $t = 1/u$, comme P est symétrique, ça donne : $\int_0^{+\infty} \frac{t^2-1}{P(t)}dt = -\int_0^{+\infty} \frac{u^2-1}{P(u)}du$, donc l'intégrale est nulle. (il reconnaît que ça court-circuite bien la question, et je commence à être en confiance)

(3) En fait là, il me demande de généraliser le résultat. J'ai un peu de mal et il me dit que la définition de polynôme symétrique que j'utilise : $P(t) = t^{\deg P}P(1/t)$ est un cas particulier d'une caractérisation, et il me donne sa définition à lui : c'est la question suivante. Au passage, il oublie sa question initiale...

(4) On pose $Q(X) = X^{\deg P}P(\frac{1}{X})$. Q et P ont même degré, donc il suffit de montrer qu'ils ont les mêmes racines avec même ordre de multiplicité. Pour le premier point, pas de problème (si ce n'est qu'il m'a d'abord donné la question avec $P(\frac{1}{X})$, ce qu'il a corrigé quand je bloquais...). Puis je me retourne vers lui et je lui dis que je vois pas comment montrer qu'il y a le même ordre de multiplicité. Il me répond (au bout d'un moment) que c'est normal dans la mesure où ce qu'il m'a dit n'est pas exact, et il me demande un contre-exemple. Je lui sors $(X - i)^2$. (on a intérêt à prendre ses racines sur le cercle unité) Donc il faut rajouter l'hypothèse P à racines simples (ce qui débilise un peu le résultat je trouve ...)
Enfin, l'ensemble en question est un idéal de $\mathbb{Z}[X]$, il me demande quels sont les idéaux

de $\mathbb{Q}[X]$, ce sont le idéaux monogènes (engendrés par un seul élément) ($\mathbb{Q}[X]$ est un anneau principal, c'est plus classe). Petite arnaque qu'il m'incite à faire : l'idéal en question et donc engendré par un élément, comme P est dedans et qu'il est irréductible, c'est qu'il engendre l'idéal. Il suffit alors de voir que $X^{\deg P}P(\frac{1}{X})$ est de même degré que P et qu'il est dans l'idéal, donc il existe un entier k tel que $P = kX^{\deg P}P(\frac{1}{X})$, et en considérant le terme constant de P et son coefficient dominant : $a_0 = ka_n$ et $a_n = ka_0$, d'où $k \in \{-1, 1\}$.

Solution 2.3.5 (Stéphane Caron) Note : 9

Examinateur : par élimination : il était ouvert au dialogue et m'a donné des indications (donc $\neq$ Grigis), il n'y avait pas de géométrie dans son exo (donc $\neq$ Langevin **erreur !**) et ce n'était pas Rosso qui était dans la salle à côté avec le Pec. *In fine*, ce devait donc être M. Henry : plutôt sympa, n'hésitant pas à m'encourager quand je suggérais une piste qui lui plaisait, et j'ai trouvé son exo intéressant.

Sans coup férir, on parachute Y un supplémentaire de X dans E (qui n'est pas nécessairement de dimension finie) : $\mathrm{Vect}(X) \oplus Y = E$. Ça ne lui déplaît pas, donc on continue. On traite ensuite quelques petits cas :

– $X = \{a\}$: on prend $f(a) = 1$, $f_{|Y} = 0_{\mathcal{L}(Y)}$: OK.
– $X = \{a, b\}$:
  – Si X est une partie libre, on prend $f_{|\,\mathrm{Vect}(x)} = a^* + b^*$ et $f_{|Y} = 0_{\mathcal{L}(Y)}$;
  – Sinon, $b = \lambda a$, on prend $f(a) = \lambda^{-1/2}$ et $f_{|Y} = 0_{\mathcal{L}(Y)}$.

On voit que si $X = \{a_1, ..., a_n\}$ est libre, $f_{|\,\mathrm{Vect}(X)} = a_1^* + \cdots\ a_n^*$ et $f_{|Y} = 0_{\mathcal{L}(Y)}$ convient.

Si X est liée, on essaie une récurrence finie, mais il n'a pas l'air de trop apprécier. Bon, je propose de partir sur des polynômes pour détendre l'atmosphère : il me dit que c'est une bonne idée, mais qu'il faut adopter un **point de vue** plus global. S'ensuit un petit speech sur les deux approches différentes : construction explicite de la solution (ce que j'essaie de faire) et approche par l'absuuuuuuurde. Il me recommande cette dernière approche. Supposons donc $\forall f \in E^* \quad \prod_{x\in X} f(x) \neq 1$.

Là, pour simplifier, il me dit de remplacer $= 1$ par $\neq 0$ et, par l'absurde, cela donne $\forall f \in E^* \quad \prod_{x\in X} f(x) = 0$. Donc $\exists x \in X \mid f(x) = 0$. J'essaie de nouveaux polynômes à une inconnue, il me dit que je suis encore en train de dériver. Il me demande ensuite si, étant donné un vecteur $a \neq 0$, on peut trouver $f \in E^*$ qui vaut 1 pour a. Je lui montre que oui à l'aide de la base duale de $\mathrm{Vect}(a)$ (il en profite pour me faire remarquer que j'ai besoin d'un supplémentaire pour définir f).

Bref, indication plus explicite que la précédente : considérer les $f_x \in E^* \mid f_x(x) = 1$. J'écris alors $f = \sum_{x\in X} \lambda_x f_x$: il ne me le reproche pas, on continue. On a alors :

$$\forall f \in E^*,\ f = \sum_{x\in X} \lambda_x f_x \quad \prod_{x\in X} \left(\sum_{x\in X} \lambda_x f_x\right)(x) = 0.$$

Il en profite pour me faire remarquer que, comme les indices sont muets, cette écriture est légitime ; Puis il a des remords et me fait réécrire

$$\forall f \in E^*,\ f = \sum_{x\in X} \lambda_x f_x \quad \prod_{y\in X} \left(\sum_{x\in X} \lambda_x f_x\right)(y) = 0.$$

Voilà notre polynôme à n inconnues (un conseil donc : quand on parle de polynôme, ne pas se borner à ceux d'une seule inconnue dont on a l'habitude). Je lui dis que la fonction polynomiale associée est identiquement nulle, donc que le polynôme est nul. Il a l'air content mais m'entraîne quand même sur un terrain plus général :

– L'anneau des polynômes sur un anneau intègre est-il toujours intègre ?
  – Sur le moment, je n'ai pas de réponse catégorique à lui apporter : je regarde comment on montre l'intégrité pour une inconnue et vois qu'il faut une infinité de racines.
– Il me demande si la condition "fonction polynomiale nulle" entraîne "polynôme nul".
  – Je lui réponds que non avec un exemple dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$: $\prod_{i=0}^{p-1}(X-i)$.
– Curieux, il me demande si je reconnais ce polynôme. Comme je ne suis pas d'humeur très joueuse, je lui propose de le calculer. Il me dit que non, qu'il n'y a pas de temps à perdre et que c'est $X^p - X$ (théorème de Fermat). Mais c'est bien sûr !
– Retour sur les polynômes à n inconnues : la nullité de la fonction polynomiale entraîne-t-elle celle du polynôme ? Je lui propose de voir un polynôme de $\mathbb{K}[X_1,...,X_n]$ comme un polynôme à une inconnue sur $\mathbb{K}[X_1,...,X_{n-1}]$, qui est un anneau intègre avec une infinité d'éléments distincts, puis de récurer. Il me le concède, mais me fait sentir qu'il y a plus élégant.

Il conclut en me disant qu'on a implicitement utilisé d'autres propriétés de $\mathbb{C}$ comme la commutativité, puis retour à l'exo.

$$\prod_{y\in X}\left(\sum_{x\in X}\lambda_x f_x(y)\right)=0.$$

De par l'intégrité, l'un des polynômes est nul : $\sum_{x\in X}\lambda_x f_x(y)=0$, ce qui est contradictoire car

$$f_y(y)=1 \quad\Rightarrow\quad \underbrace{\sum_{x\neq y} f_x(y)}_{=0}+\underbrace{f_y(y)}_{=1}\neq 0.$$

In fine, $\exists f\in E^* \mid \prod_{x\in X} f(x)\neq 0$. Nous nous sommes quittés là-dessus. Le reste ne pose pas de réelle difficulté : $X=a_1,...,a_n$ et posons $a_1,...,a_p$ une base de $\mathrm{Vect}(X)$: on a $\prod_{i=1}^n f(a_i)=\mu\neq 0$ et on peut écrire

$$f(a_k)=\sum_{i=1}^p \lambda_{i,k} f(a_i).$$

On a un polynôme P à p inconnues tel que $P(f(a_1),...,f(a_p))=\mu$ et qui s'écrit $P=\sum_{i=(i_1,...,i_p)}\alpha_i X_1^{i_1}\cdots X_p^{i_p}$, où $i_1+\cdots+i_p=p$. Par suite,

$$P(\frac{f(a_1)}{\mu^{1/p}},...,\frac{f(a_p)}{\mu^{1/p}})=1.$$

On définit enfin f' par $f'(a_i)=\frac{f(a_i)}{\mu^{1/p}}$ pour avoir, comme attendu, $\prod_{x\in X} f'(x)=1$.

Solution 2.3.6 (Vincent Païs) Note : 13.5

Examinateur : Langevin, j'ai bien aimé même s'il m'a posé de la géométrie.

(1) a) On écrit les complexes sous la forme $\exp(i\theta)$ et on calcule en factorisant $(c-a)$ et $(c-b)$ par $\exp(\frac{i(\theta_c+\theta_a)}{2})$ et $\exp(\frac{i(\theta_c+\theta_b)}{2})$. On trouve

$$d=\left(\frac{\sin(\frac{\theta_c-\theta_a}{2})}{\sin(\frac{\theta_c-\theta_b}{2})}\right)^2.$$

Pour l'interprétation géométrique on exprime le fait que $\mathrm{Arg}(d)=0$ et on obtient la relation entre angle au sommet et angle au centre

$$(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})=2(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})$$

b) On fait le produit vectoriel de la relation recherchée par $\Omega\vec{A},\Omega\vec{B},\Omega\vec{C}$ et on arrive à un système dont la solution est $(\sin(2A),\sin(2B),\sin(2C))$ (à une constante multiplicative près) en notant A,B et C les angles du triangle ABC.

(2) On linéarise $(\cos x)^5$ (on peut utiliser les formules d'Euler et du Binôme, ça évite les formules trigos) et voilà.

(3) Question à deux minutes de la fin. J'ai juste dit que par parité les termes d'indice pair sont nuls mais je n'ai pas la réponse.
On pourrait utiliser que $(\sin^n)'(\frac{\pi}{2}) = 0$ alors que $(\sin^2 .)'(\frac{\pi}{2}) = -2$...

Solution 2.3.7 (Mikael Rabie) Note : 10
Examinateur : Par élimination, je dirais Henry, mais je ne suis pas sur.

(1) On trouve 2.

(2)
- En dimension finie, on a l'inclusion $\operatorname{Ker} f^n \subset \operatorname{Ker} f^{n+1}$, d'où l'existence d'un k tel que $\operatorname{Ker} f^k = E$, ce qui implique bien la nilpotence de f.
- En dimension infinie, on montre d'abord que $\dim \operatorname{Ker} f^n = n$ par récurrence, par double inégalité :
  l'inclusion $\operatorname{Ker} f^n \subset \operatorname{Ker} f^{n+1}$ entraîne $\dim \operatorname{Ker} f^n \leqslant \dim \operatorname{Ker} f^{n+1}$, et on sait que l'égalité entraîne la stationnarité du noyau, ce qui contredirait l'hypothèse d'union égale à E.

On utilise alors l'égalité $\dim \operatorname{Ker} f \circ g = \dim \operatorname{Ker} g + \dim(\operatorname{Im} g \cap \operatorname{Ker} f)$ avec $g = f^n$ d'où $\dim \operatorname{Ker} f^{n+1} = \dim \operatorname{Ker} f^n + \dim(\operatorname{Im} f^n \cap \operatorname{Ker} f) \leqslant \dim \operatorname{Ker} f^n + 1$ d'où l'égalité vu la remarque ci-dessus.
Ainsi on a bien $\dim \operatorname{Ker} f^{n+1} n + 1$, d'où l'égalité recherchée.
On va alors construire une base (b_n) dans la même idée que la transformée de Jordan :
- (b_0) dans $\operatorname{Ker} f$.
- (b_{n+1}) dans $\operatorname{Ker} f^{n+1} - \operatorname{Ker} f^n$ tel que $f(b_{n+1}) = b_n$ ce qui est possible car $b_{n+1} \in \operatorname{Ker} f^{n+1} - \operatorname{Ker} f^n$ implique $f^{n+1}(b_{n+1}) = 0$ et $f^n(b_{n+1}) \neq 0$, soit $f^n(f(b_{n+1})) = 0$ et $f^{n-1}(f(b_{n+1})) \neq 0$, d'où $f(b_{n+1}) \in \operatorname{Ker} f^n - \operatorname{Ker} f^{n-1} = \operatorname{Vect}(b_n)$. Il suffit juste de trouver "le bon scalaire" à b_{n+1} et c'est terminé de par l'hypothèse des inclusions : il existe k tel que $y \in \operatorname{Ker} f^{k+1} - \operatorname{Ker} f^k$ et on trouve son antécédent dans $\operatorname{Vect}(b_{k+1})$.

Solution 2.3.8 (Nicolas Le Moigne) Note : 15.5
Examinateur : j'ai cru longtemps qu'en fait c'était Grigis. Une spectatrice parisienne....
L'examinateur est sympa mais pas bavard du tout jusqu'à ce que je me débloque tout seul. C'était mon premier oral à l'X et le matin on avait piscine.... j'avais qu'une envie c'était d'aller me coucher. D'un point de vue note je n'aurais jamais été aussi généreux.
Idées : les x_i sont tous distincts sinon malaise. Après voir le cas $n = 1$, $n = 2$ pour voir un peu plus loin ("euh oui, mais rapidement je vous prie...", ouais d'autant plus que c'est pas la panacée).... Finalement on conjecture une certaine constance du polynôme que l'on vérifie par récurrence. Puis il faut faire apparaître la fraction rationnelle de $1/P(x)$: le $1/P'(x_i)$ m'y a fait penser...
Pour $k \leqslant n-1$ on décompose $\dfrac{X^k}{P(X)}$ ce qui donne

$$\frac{X^k}{P(X)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^k}{P'(x_i)(X - x_i)}$$

on multiplie par X, on substitue x et X et on fait tendre x vers $+\infty$ d'où

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^k}{P'(x_i)} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \leqslant n-2 \\ 1 & \text{si } k = n-1 \end{cases}$$

donc $\sum_{i=1}^{n} \dfrac{(X - x_i)^{n-1}}{P'(x_i)} = 1.$

Solution 2.4.1 (Clément Bresson) Note : 9.5

Examinateur : "D'artagnan", certainement à assimiler à Rosso.

(1) On pose λ valeur propre de u et $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$ un vecteur propre associé. On a alors $u(x_i) \in W_{i+1}$ et $u(x) = \lambda x$. Par conséquent, $u(x_i) = \lambda x_{i+1}$ et par conséquent, en posant $y = \sum_{i=1}^{n} \alpha^{-i} x_i$, on a $u(y) = \lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha^{-i} x_{i+1} = \alpha\lambda y$, d'où $\alpha\lambda$ valeur propre de u.

(2) La transformation d'Abel a encore frappé. On pose $U_k = \sum_{p=k}^{+\infty} u_p$. La suite (U_k) converge vers 0.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \alpha_k u_k &= \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (U_k - U_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k U_k - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k U_{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_k - \alpha_{k-1}) U_k + \alpha_n U_{n+1} \\ \left| \sum_{k=0}^{n} \alpha_k u_k \right| &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_k - \alpha_{k-1}) \|U_k\| + \alpha_n \|U_{n+1}\|.\end{aligned}$$

On obtient alors $\|v_n\| \leqslant \dfrac{1}{\alpha_n} \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_k - \alpha_{k-1}) \|U_k\| + \|U_{n+1}\|$. Le premier terme tend vers 0 (même argument que pour Césaro) et on a vu que le deuxième avait une limite nulle donc $v_n \to 0$.

Solution 2.4.2 (Marc Houllier) Note : 16.5

Examinateur : Rosso, assez sympathique et attentif.

(1) Cf. thebast.

(2) On peut se servir ici du théorème de double limite :

$$\begin{aligned}\frac{c_n}{b_n} - f(\beta) &= \frac{c_n}{b_n} - \sum_{p=0}^{+\infty} a_p \beta^p \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p}\end{aligned}$$

où $u_{n,p} = \begin{cases} a_p \left(\dfrac{b_{n-p}}{b_n} - \beta^p \right) & \text{si } p \leqslant n \\ a_p \beta^p & \text{si } p > n \end{cases}.$

À p fixé, quand $n \to +\infty$, $\dfrac{b_{n-p}}{b_n} \to \beta^p$ donc $\lim_{n \to +\infty} u_{n,p} = 0$, il reste à majorer $|u_{n,p}|$ par le terme général d'une série convergente indépendante de n.

– Soit $\beta < \gamma < R$ alors il existe N tel que $\forall n \geqslant N$, $\left| \dfrac{b_{n-1}}{b_n} \right| \leqslant \gamma$.

– Soit $M = \max_{q \leqslant N} \gamma^{q+1-N} \left| \dfrac{b_q}{b_{q+1}} \times \cdots \times \dfrac{b_{N-1}}{b_N} \right|$ (un peu parachuté ici). À vérifier...

Alors $|u_{n,p}| \leqslant |a_p| \left(M\gamma^p + |\beta|^p \right)$ qui est bien le terme général d'une série convergente. Le théorème de double limite s'applique ce qui permet de conclure.

Solution 2.4.3 (Vincent Belz) Note : 8.5
Examinateur : Rosso, le jumeau de d'Artagnan (on ne peut toujours pas savoir, hein)

(1) $X^{\mathrm{T}}ABX$ est une matrice d'ordre 1, elle est égale à sa transposée donc

$$X^{\mathrm{T}}ABX = (X^{\mathrm{T}}ABX)^{\mathrm{T}} = X^{\mathrm{T}}BAX$$

donc $X^{\mathrm{T}}SX = 2X^{\mathrm{T}}ABX$.
Maintenant, après d'Artagnan, c'est Zorro, sous les traits de Pierrick qui intervient :
Soit λ une valeur propre de B et X un vecteur propre associé alors

$$\underbrace{X^{\mathrm{T}}SX}_{>0} = 2X^{\mathrm{T}}A\lambda X = \lambda \underbrace{2X^{\mathrm{T}}AX}_{>0}$$

donc $\lambda > 0$ et ceci est valable pour toutes les valeurs propres de B donc B est définie positive.

(2) Qu'entend-on par $f'(c)$?
- Si c'est la dérivée d'une fonction de $]-R, R[$ dans $\mathbb{C}$ alors c'est assez élémentaire. En effet, supposons que $\mathrm{Re}(f'(c)) > 0$ alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall x \in]c-\varepsilon, c+\varepsilon[$, $\mathrm{Re}(f'(x)) > 0$. Si x et y sont dans ce voisinage alors, avec par exemple $x < y$, $\mathrm{Re}(f(y) - f(x)) = \mathrm{Re}\left(\int_x^y f'(t)\,\mathrm{d}t\right) > 0$ ce qui donne l'injectivité de f.
- Si par contre on entend par cette question la $\mathbb{C}$-dérivée de f en un point c du disque de convergence, cela dépasse le cadre du programme...

Solution 2.4.4 (Sébastien Lérique) Note : 11.5
Examinateur : C'était M. Rosso (d'Artagnan), pas très parlant mais très gentil.

(1) OK, on montre que c'est un idéal.

(2) On sait que $\Pi_A \in \mathcal{P}$ $\forall x \in V$, donc $\forall x \in V$, $\mu_x | \Pi_A$. On suppose par l'absurde que μ_x n'est jamais Π_A , c'est donc toujours un diviseur propre. On appelle $R_1, ..., R_q$ les diviseurs propres de Π_A , et $E_k = \mathrm{Ker}(R_k(A))$:

$$\forall x \in V, x \in \mathrm{Ker}(\mu_x(A)) = E_{k_x}$$

donc

$$V = \bigcup_{k=1}^{q} E_k$$

ce qui est impossible (ça il me l'a fait redémontrer, ça a pris un peu de temps).

(3) Il suffit d'avoir $p > q$ pour que ça marche encore.

Solution 2.4.5 (Kaïs Boubaker) Note : 12.5
Examinateur : cheveux noirs, longs, sympathique et souriant, laisse réfléchir mais guide un peu.
Par contraposée, on montre que f n'est pas surjective si et seulement si $\deg \pi_A < \deg P_A$.
($\Rightarrow$) Si f n'est pas surjective alors il existe H hyperplan de $\mathbb{K}^n$ tel que $\mathrm{Im}\, f \subset H$. Si on écrit $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$ est l'équation de H alors

$$\begin{aligned}
&\forall (X,Y) \in \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n, && a_1X^{\mathrm{T}}Y + \cdots + a_nX^{\mathrm{T}}A^{n-1}Y = 0\\
\Leftrightarrow &\forall (X,Y) \in \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n, && X^{\mathrm{T}}\left(a_1I_n + \cdots + a_nA^{n-1}\right)Y = 0\\
\Leftrightarrow & && a_1I_n + \cdots + a_nA^{n-1} = 0
\end{aligned}$$

en prenant $\overline{X} = (a_1I_n + \cdots + a_nA^{n-1})\,Y$.
On en déduit que le polynôme $P = a_1 + \cdots + a_nX^{n-1}$ est annulateur par conséquent on a bien $\deg \pi_A \leqslant \deg P = n-1 < \deg P_A = n$.

($\Leftarrow$) Si $\pi_A = a_1 + \cdots + a_k X^{k-1}$ avec $k \leqslant n$ alors $a_1 I_n + \cdots + a_k A^{k-1} = 0$ soit $\forall (X, Y) \in \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n$, $a_1 X^{\mathrm{T}} Y + \cdots + a_k X^{\mathrm{T}} A^{k-1} Y = 0$ donc $\mathrm{Im}\, f \subset H$ hyperplan d'équation $a_1 x_1 + \cdots + a_k x_k = 0$.

Solution 2.4.6 (Vincent Pécastaing) Note : 13.5

Examinateur : 8h : c'était Rosso à coup sûr, mais je l'avais vu discuter au petit déj avec la Lange et apparemment il a dû lui filer un ou deux exos ... Je confirme cependant la tendance : c'est un examinateur très sympa, il nous laisse nous exprimer, sourit assez fréquemment ce qui met relativement une bonne atmosphère, on se croit un peu comme pendant une colle de l'année.

Voilà, voilà, le volume vaut $V(a, b, c) = \frac{1}{6}abc$, on commence par écarter le cas $\alpha\beta\gamma = 0$, on exprime le fait que M est dans le tétraèdre : si $\phi(x, y, z) = 0$ est l'équation du plan passant par A, B et C, alors on doit avoir $\phi(M) \leqslant 0$, de plus, en considérant le gradient de V, M ne peut être dans l'intérieur du tétraèdre, on se place alors dans le cas où il est sur la face (A, B, C) (sinon, on a un tétraèdre aplati...) d'où $\phi(\alpha, \beta, \gamma) = 0$. Ne pas oublier que c'est a, b et c qu'on cherche, on voit aussi qu'il doivent être positifs (strictement). Grâce à $\phi(\alpha, \beta, \gamma) = 0$, on élimine a dans l'expression du volume, et on se ramène à minimiser le critère$F(b, c)$, sous la contrainte $(b, c) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ où F est une fraction rationnelle à deux indéterminées. On est sur un ouvert, donc on a une condition nécessaire d'extremalité : $\nabla F(b, c) = 0$, on obtient ainsi que **si** a, b, c conviennent alors il s'agit forcément du triplet $(3\alpha, 3\beta, 3\gamma)$ (c'est à dire M à un tiers de la grande diagonale du pavé).

Si F admet un extremum, alors il s'agit d'un minimum (si on prend $b = c \to +\infty$, alors $F(b, c) \to +\infty$, donc il n'existe pas de maximum). Pour mq F admet bien un extremum, je lui ait sorti la condition suffisante $rt - s^2 > 0$ avec les notations de Monge, il avait l'air d'apprécier mais moi un peu moins (suffit de voir la tête de F ...), en fait il vaut mieux remarquer que $\phi(M) = 0$ entraîne que $a \geqslant \alpha > 0$ idem avec b et c on peut alors utiliser l'argument F continue sur un compact : si b et c deviennent trop grand, alors F aussi, donc on se ramène à un compact de $(\mathbb{R}_+^*)^2$ et ça se passe bien pour l'existence d'un minimum atteint pour $x = 3$.

Solution 2.4.7 (Stéphane Caron) Note : 8

Examinateur : M. Rosso, fidèle à sa description générique : un d'Artagnan très sympathique et, dans mon cas, très compréhensif...

Je précise que, par un curieux concours de circonstances, nous nous étions déjà vu le matin même lors d'un petit-déjeuner en tête-à-tête (Cause : ouverture du self à 8h alors que nous devions avoir mangé avant).

Commentaire : Apparemment, cet exo est un classique. Malheureusement, j'étais semble-t-il dans un état second.

Ne voyant d'abord pas trop comment procéder, je lui propose de traiter des petits cas pour voir ce qui se passe. Pas de bol : je traite le cas $n = 2$ qui n'apporte *a* priori pas d'info sur la généralisation ; ceci me fait perdre du temps car, voyant que je n'étais pas sûr de moi et que quelques vannes commençaient à m'échapper, il me fait traiter tous les sous-cas exhaustivement.

On en vient ensuite au cas général : il s'attendait visiblement à ce que je sache déjà montrer que deux matrices trigonalisables qui commutent sont simultanément trigonalisables. Ce n'était malheureusement pas le cas. Il m'a donc laissé chercher un peu, mais en pensant au cas "diagonalisables" je cherchais des sep. alors qu'il suffit ici d'un vep. commun pour conclure par récurrence. Bref, il me montre le truc, puis on passe au cas général.

Par la suite, j'étais le nez dans le guidon et il a dû me donner des indications pour les passages non-évidents, voire même évidents ($AB - BA$ homothétie $\Rightarrow AB = BA$). En gros, l'idée est de se ramener à un sep. de C sur lequel les restrictions de A et B commutent, donc sont simultanément trigonalisables, ce qui permet d'amorcer une récurrence.

In fine, on arrive au bout de l'exercice mais je n'ai quasiment rien trouvé par moi-même. Je commence presque à m'excuser, arguant d'un petit déjeuner trop précipité, et il conclut en me disant que "c'est la vie, ça arrive à tout le monde"... Soirée PROZAC en perspective !

– Montrons par l'absurde que C n'est pas inversible :
  La première relation donne $I_n = ABC^{-1} - BAC^{-1}$. Or C commutant avec A et B, il en est de même de C^{-1} donc
  $$\mathrm{Tr}(ABC^{-1}) = \mathrm{Tr}(AC^{-1}B) = \mathrm{Tr}(BAC^{-1}) \text{ en utilisant la propriété } \mathrm{Tr}(MN)\,\mathrm{Tr}(NM).$$
  On a ainsi $\mathrm{Tr}(I_n) = 0$ ce qui est absurde (on a bien sûr supposé que $n \geqslant 1$!).
  Conclusion : $\mathrm{Ker}\, c \neq \{0\}$.
– On va maintenant prouver ce résultat par récurrence sur n. La propriété au rang 1 est immédiate, on la suppose vraie au rang n.
  On appelle respectivement a, b, c les endomorphismes de $\mathbb{C}^{n+1}$ de matrice A, B, C. Soit $a' = a_{||\,\mathrm{Ker}\, c}$ et $b' = b_{||\,\mathrm{Ker}\, c}$ (a et b stabilisent $\mathrm{Ker}\, c$ vu qu'ils commutent avec c). Pour tout $x \in \mathrm{Ker}\, c$, $ab(x) - ba(x) = c(x) = 0$ donc a', b' commutent. On sait alors qu'ils admettent un vecteur propre commun que l'on note e_1. En complétant (e_1) en une base de $\mathbb{C}^{n+1}$, on écrit les matrices de a, b, c dans cette base : $A_1 = \begin{pmatrix} \lambda & L \\ 0 & A'_1 \end{pmatrix}$, $B_1 = \begin{pmatrix} \mu & L' \\ 0 & B'_1 \end{pmatrix}$, $C_1 = \begin{pmatrix} 0 & L \\ 0 & C'_1 \end{pmatrix}$.
  Le produit matriciel par blocs donne les relations $A'_1B'_1 - B'_1A'_1 = C'_1$, $A'_1C'_1 = C'_1A'_1$ et $B'_1C'_1 = C'_1B'_1$. On utilise alors l'hypothèse de récurrence :
  $$A'_1 = PTP^{-1},\ B'_1 = PT'P^{-1},\ C'_1 = PT''P^{-1}$$
  d'où $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & L_1 \\ 0 & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix}$, de même pour B_1 et C_1.

Conclusion : a, b, c sont trigonalisables dans la même base.

Solution 2.4.8 (Vincent Païs) Note : 11.5

Examinateur : Rosso : sympathique, contrairement à son exo sur lequel j'ai galéré.

Face à une question aussi vague, ma première idée est de remarquer que comme on est sur $\mathbb{C}$ les matrices sont trigonalisables et on remarque que si A et B anticommutent alors elles ne peuvent pas être trigonalisées dans la même base. C'est bien beau mais ça ne nous avance pas vraiment.

Rosso me guide alors une première fois en me demandant "Est qu'il y a une condition sur n pour que deux matrices puissent anticommuter ?"

En fait en utilisant le déterminant on obtient la relation $\det(A)\det(B) = (-1)^n \det(B)\det(A)$, ce qui montre que n est pair.

Du coup on écrit n sous la forme $2^k.n'$ où n' est un nombre impair et Rosso me dit alors que le résultat est $2k + 1$. Reste à le démontrer.

Je n'ai pas réussi à arriver à ce résultat mais j'ai démontré quelques résultats :

– Si λ est valeur propre de A_i alors $-\lambda$ l'est aussi (on multiplie $(A_i - \lambda\,\mathrm{Id})$ à gauche et à droite par A_j et on utilise les déterminants).
– Du coup le polynôme caractéristique peut être mis sous la forme $Q(X)Q(-X)$ et on peut écrire grâce au lemme des noyaux et Cayley-Hamilton $\mathrm{Ker}(Q(A_i))$ et $\mathrm{Ker}(Q(-A_i))$ sont complémentaires, et en plus on a $A_j(\mathrm{Ker}(Q(A_i)) = \mathrm{Ker}(Q(-A_i))$ et réciproquement.

La planche s'est arrêtée là, je ne sais pas vraiment comment on pouvait finir l'exo et j'ai la flemme d'y réfléchir. Si quelqu'un a une idée ...

Solution 2.4.9 (Rémi Boutonnet) Note : 15

Examinateur : il est présent et souriant.

Ben pour la question, ça revient a trouver une forme linéaire qui ne s'annule pas sur K. Comme

le noyau d'une forme linéaire est un hyperplan, il suffit de trouver un hyperplan H tel que son intersection avec K soit vide.
Pour ça, on prend x dans K et on regarde l'orthogonal de (x), mais il faut avant tout choisir un bon x.
Là il m'a dit "que pensez vous de la distance entre O et K ?" Ben elle est atteinte en un certain x. On va montrer que ce x convient (i.e. que l'orthogonal de (x) n'intersecte pas K).
Notons H son orthogonal.
Par l'absurde, si y est dans H et K alors, pour tout t de $[0,1]$, $ty+(1-t)x$ est dans K. Et grâce a brad Pythagore, si on prend la norme au carré de ce vecteur, on voit que quand t tend vers 0, la norme au carré tend vers celle de x par valeur inférieures. x ne peut donc réaliser la plus petite distance à O. contradiction, donc H n'intersecte pas K.
Ensuite on prend l qui a x associe 1 et qui est nulle sur H. On montre aisément grâce à la convexité que l fonctionne.
Le bonus ça me rappelle une question de ds, mais j'avais oublié la solution. du coup j'ai opté pour un truc "artisanal".

Solution 2.4.10 (Mikael Rabie) Note : 12
Examinateur : Comme attendu, je me retrouve face à Rosso, très sympa, très compréhensif (j'étais crevé et pressé d'être en vacances...)
Il semblerait que l'exercice est classique (et que François l'avait donné en colle il y a deux ans à Marc...), la fatigue sans doute m'a laissé avancer lentement au tableau. Avis aux 5/2, si vous ne voulez pas ratez les oraux de l'X, faites du sport pendant l'année (ou du moins plus que moi).

(1) On remarque que pour $n \geqslant k$, $P(n) = \binom{n}{k}$, $0 \leqslant n < k$, $P(n) = 0$, $n < 0$, $P(n) = (-1)^k \binom{k-n-1}{k}$ (i.e., avec le coefficient binomial généralisé, $P(n) = \binom{n}{k}$.

(2) On a les P_k qui forment une base de $\mathbb{R}[X]$ par croissance de 1 des degrés des polynômes. On raisonne alors par récurrence sur k en remarquant que $P_k(n+1) - P_k(n) = P_{k-1}(n)$:
 – La propriété est triviale pour $k = 0$;
 – Les P_k étant une base, il existe d'uniques λ_i tels que $Q(X) = \sum_{i=0}^{k+1} \lambda_i P_i(X)$. Il suffit de montrer alors que les λ_i sont entiers.
 $Q(X+1) - Q(X) = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i P_{i-1}(X)$ est de degré k et à valeurs entières sur k entiers consécutifs, d'où par récurrence les λ_i , $i > 0$ sont entiers. On a alors également $\lambda_0 = Q(n) - \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i P_i(n) \in \mathbb{Z}$.

(3) On pose $\frac{P}{Q} = E + R$, où E est la partie entière et R le reste de la fraction.
On montre par récurrence sur le degré de E qu'il est à valeur entière sur $\mathbb{N}$ et que $R = 0$:
 – Si $\deg E = 0$, on a $\lim_{n\to\infty} R(n) = 0$, d'où E est un entier : en effet $\lim_{n\to+\infty} \frac{P}{Q}(n) = E$ et comme c'est une suite d'entiers, E est aussi un entier. $\lim_{n\to+\infty} R(n) = 0$ car $\deg R < 0$ donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N$, $|R(n)| < 1$. Or $R(n) = \frac{P}{Q}(n) - E$ est la différence de 2 entiers par conséquent $R(n) = 0$. R s'annule pour une infinité de valeurs de n donc $R = 0$ ce qui prouve le résultat dans ce cas.

– Sinon on s'intéresse à $\dfrac{P(X+1)}{Q(X+1)} - \dfrac{P(X)}{Q(X)} = E(X+1) - E(X) + R(X+1) - R(X)$. $\deg E(X+1) - E(X) \leqslant \deg E(X) - 1$, on applique donc l'hypothèse de récurrence à cette différence. On en déduit que $R(X+1) = R(X)$ puis $R(X+n) = R(X)$ pour tout entier n. En prenant la limite quand $n \to +\infty$, on en déduit que $R(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc $R = 0$ ce qui achève la récurrence.

Conclusion : $\dfrac{P}{Q} = E$ donc $Q|P$.

Solution 2.4.11 (Nicolas Le Moigne) Note : 12.5
Examinateur : très gentil et souriant. Deux spectateurs parisiens.....
On césarotte, cauchyse (convergence) et surtout, on fait par l'ABSURDE (deux fois si mes souvenirs sont bons)... ça marche on est content mais on se dit qu'on est un peu lent. Peut-être y-a-t il plus simple ? ? ? ?

– Tout d'abord, si on montre que $S_n \to l$ alors $M_n \to l$ donc $T_n \to l$.
– On sort alors le gros arsenal (c'est normal pour l'X). Si $\limsup\limits_{n\to+\infty} S_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \sup\limits_{p\geqslant n} S_p = +\infty$ (plus grande des valeurs d'adhérences de la suite (S_n) alors $\limsup\limits_{n\to+\infty} T_n = \lim\limits_{n\to+\infty} T_n = +\infty$.
  De même pour $\liminf$ donc les valeurs d'adhérence de (S_n) sont bornées.

Solution 2.5.1 (Stéphane Caron) Note : ?
Examinateur : très sympa, il a détendu l'atmosphère dès mon entrée dans la salle par quelques petites vannes bien senties. Silencieux et prenant pas mal de notes pendant l'exposé, il s'est avéré plus joueur sur la partie questions, notamment en me laissant le choix des armes ("alors, vous êtes plutôt *partitions* ou *graphes* ?").

Solution 3.1.1 (Laure Leroy) Note : ?
Examinateur : Salle L208, examinateur plutôt sympa, mais pas très causant (et je ne comprenais pas forcement ses indications). Alors convoquée a 15h, quand j arrive devant la salle, la personne avant moi n'est toujours pas rentrée. A noter que les 2 personnes avant moi sont les mêmes que pour la physique le matin même. Il est écrit sur la porte d entrée qu il n y a pas de préparation et que l'on va faire au moins 2 exercices. Je rentre a 16h, la fille d'avant me dit qu'elle a eu un exo de malade, rassurant....

(1) On utilise l'indication et on permute intégrale et sommation puis on utilise le théorème de convergence dominée et on intègre. On trouve (je crois) $\ln 2 - \frac{1}{2}$.
On écrit successivement

$$\begin{aligned}\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \frac{(-1)^{i+j}}{i+j} &= \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \int_0^1 (-1)^{i+j} t^{i+j-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{t} \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} (-t)^{i+j}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{1}{t}\left(\sum_{i=1}^n (-t)^i\right)^2 \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{t}\frac{t^2(1+(-t)^n)^2}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{t}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t + r_n = \ln 2 - \frac{1}{2} + r_n\end{aligned}$$

où $r_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t(2(-t)^n + (-t)^{2n})}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t \to 0$ soit par le T.C.D. soit directement par une majoration.

(2) a) Comme je ne savais pas trop comment partir, il me demande ce que signifie A positive. Je lui réponds $X^T A X \geqslant 0$ et il est content. On prend un vecteur unicolonne X de taille p, que l'on complète en X' par des 0 pour obtenir un vecteur de taille n et on montre que $X^T A_p X = X'^T A X'$et donc $\geqslant 0$

b) Sens direct : idem. Il me fait remarquer que $X^T A X > 0$, $\forall X \neq 0$.
Réciproque : Récurrence sur n. J'arrivais pas à finir. Il faut considérer le produit scalaire associé dans des bases orthonormées, je n'ai pas tout compris...
On prouve par récurrence finie sur k que $A_k = L_k D_k U_k$ où L_k est une matrice triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale, $U_k = L_k^{\mathrm{T}}$ et $D_k = \mathrm{Diag}(\frac{\det A_p}{\det A_{p-1}})$.
– Si $k = 1$ c'est immédiat (et on pose par convention $\det A_0 = 1$).
– On écrit alors que $A_{k+1} = \begin{pmatrix} L_k & 0 \\ C'^{\mathrm{T}} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D_k & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_k & C' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_k & C \\ C^{\mathrm{T}} & a_{k+1,k+1} \end{pmatrix}$ avec $C' = D_k^{-1} L_k^{-1} C$. On prend alors les déterminants de part et d'autre d'où $\det D_k . b = \det A_{k+1}$ ce qui donne $b = \dfrac{\det A_{k+1}}{\det A_k}$.
On a donc $A = LDU$ et D est définie positive donc il en est de même pour A.

Solution 3.1.2 (Rémi Boutonnet) Note : 14
Examinateur : barbu, sympa. exos classiques. pas de préparation

(1) Variation des constantes, c'est bourrin.
Pour la décomposition on utilise la décomposition en série on utilise l'équation, et ça marche et on est content, on peut passer à un exo plus marrant...
On cherche le développement en série de Fourier de $|\sin x|$ qui est une fonction paire, de période π. Comme cette fonction est continue, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, le théorème 7.15 page 292 s'applique et on a

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos 2kx}{4k^2-1}.$$

On cherche alors une solution sous la forme $y_0 = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k \cos 2kx$ d'où, par analyse-synthèse, on trouve

$$b_k = \frac{4}{\pi(4k^2-1)^2} \text{ si } k \geqslant 1 \text{ et } b_0 = \frac{2}{\pi}.$$

Conclusion : toutes les solutions sont 2π-périodiques et s'écrivent :

$$y = \lambda \cos x + \mu \sin x + \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(4k^2-1)^2} \cos 2kx.$$

(2) On commence par regarder le cas $p = 2$. Pour cela on montre que les espace images sont en somme directe. j'ai la flemme d'en dire plus mais ça se fait bien et pas trop de difficultés à le généraliser.

Comme $\sum_{i=1}^{p} u_i = \mathrm{Id}$ alors

$$\mathrm{Im}\left(\sum_{i=1}^{p} u_i\right) \subset \sum_{i=1}^{p} u_i(E) \subset E$$

d'où l'égalité à tous les niveaux donc $\sum_{i=1}^{p} u_i(E) = E$ et $\sum_{i=1}^{p} \dim u_i(E) \leqslant n$. On en déduit l'égalité

$$\sum_{i=1}^{p} \dim u_i(E) = \dim E$$

donc les $u_i(E)$ sont en somme directe.

De plus $\sum_{i=1}^{p} u_i \circ u_j = u_j$ en composant à droite par u_j donc, pour tout $x \in E$,

$$\sum_{i=1}^{p} \underbrace{u_i(u_j(x))}_{\in \mathrm{Im}\, u_i} = \underbrace{u_j(x)}_{\in \mathrm{Im}\, u_j}$$

et comme la somme est directe on obtient $u_i \circ u_j = \delta_{ij} u_j$ i.e. les u_i sont des projecteurs associés à une décomposition en somme directe.

Solution 3.1.3 (Jean Baptiste Peyrat) Note : ?

Examinateur : sympa mais peu bavard. 10 minutes de préparation. J'ai eu le temps de faire le premier exercice et il m'a donné la suite quand j'étais au tableau.

(1) Bon on commence en douceur avec l'exercice 1. Déjà, on pose $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n+k)^\alpha}$

- Si $\alpha \leqslant 0$ alors u_n ne tend pas vers 0 donc la série diverge
- Si $0 < \alpha \leqslant 1$ alors $u_n \geqslant \frac{1}{(n+1)^\alpha}$ donc la série diverge
  On se place donc avec $\alpha > 1$
- On peut minorer u_n : $u_n \geqslant \frac{n}{(2n)^\alpha} \sim \frac{1}{2^\alpha} \times \frac{1}{(n)^{\alpha-1}}$ donc la série diverge si $1 < \alpha \leqslant 2$
- On peut majorer u_n : $u_n \leqslant \frac{n}{(n+1)^\alpha} \sim \frac{1}{(n)^{\alpha-1}}$ donc la série converge si $\alpha > 2$

Conclusion :
$\alpha \leqslant 2 \Leftrightarrow$ la série diverge
$\alpha > 2 \Leftrightarrow$ la série converge

Je m'embrouille un peu sur l'exercice 2, mais pas vraiment de difficulté.

(2) a) ... La justification est laissée au lecteur.

b) On va montrer que $\operatorname{Im} p \circ q = \operatorname{Im} p \bigcap \operatorname{Im} q$.
Soit $x \in E$. On a $p \circ q(x) = p(q(x)) = q(p(x))$ donc on a la première inclusion.
Pour l'autre sens, on prend $x \in \operatorname{Im} p \bigcap \operatorname{Im} q$ d'où $x = p(a) = q(b)$. Et donc $p(p(a)) = p(a) = p(q(b)) = x$ d'où la deuxième inclusion.

c) On va montrer que $\operatorname{Ker} p \circ q = \operatorname{Ker} p + \operatorname{Ker} q$.
Bon dans un sens c'est débile.
Pour l'autre inclusion, on prend $x \in \operatorname{Ker} p \circ q$ et on écrit que $x = x - p(x) + p(x)$ et on a bien $\operatorname{Ker} p \circ q \subset \operatorname{Ker} p + \operatorname{Ker} q$.

(3) Bon, Lebesgue fait son apparition...
On pose $f_n(t) = \mathrm{e}^{-2t} \times \sum\limits_{p=n}^{+\infty} a_p \frac{t^p}{p!}$.
Cette fonction est continue sur $[0; +\infty]$.
Elle converge simplement vers la fonction nulle.
On majore la somme par e^t et on a immédiatement l'hypothèse de domination.
Un petit coup de Lebesgue, on intervertit limite et intégrale et poum pastèque ça fait 0 et on est content !

(4) Et pour finir en beauté, de la topologie ! Je n'ai pas eu le temps de faire la réciproque.

$\Rightarrow$ Bon c'est vraiment débile, on prend une suite qui converge, la fonction est continue donc tout va bien.

$\Leftarrow$ Contre-exemple (merci Marc) :
on prend la fonction $f(x)$ définie par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{x} & \text{sinon} \end{cases}$. Le graphe est fermé et f est discontinue.

Solution 3.1.4 (Benjamin Thorent) Note : ?
Examinateur : plutôt sympa mais ne parle pour ainsi dire pas durant l'oral... Y a qu'à un moment où il m'a donné une astuce pour pouvoir continuer... Il ressemble assez à ça : ugeek : et pour de vrai...

(1) Le truc c'est d'introduire f^*f. D'abord l'arnaque euh pardon l'analyse, si on a un tel couple alors $f^*f = g^*u^*ug = g^2$. Puis on utilise le fait que si M symétrique positive alors il existe un unique S symétrique positive tq $M = S^2$ (l'existence est facile pour l'unicité on raisonne en endomorphisme et comme S et M commutent on regarde S^2 en restriction au sous-espace propre de M associé à la valeur propre λ, c'est $\lambda \operatorname{Id}$ et alors il y a pas trente six choix pour s). Or ici, c'est exactement le cas donc comme on connaît f^*f, on peut construire g de manière unique. Il suffit donc de vérifier que $u = fg^{-1}$ ($g = u^{-1}f$ donc il est inversible donc le truc précédent est bien défini) est dans $\mathcal{O}(E)$. Pour ce faire, on évalue $uu^* = fg^{-2}f^*$; or, $g^2 = f^*f$ donc $uu^* = ff^{-1}f^{*-1}f^* = \operatorname{Id}$; donc Youpi ! Et en plus on a l'unicité gratis grâce au lemme...

(2) a) $D =]0, 1[$ est immédiat.

b) $g \ : t \mapsto \dfrac{t^{x-1}}{1+t} \in \mathrm{L}^1(]0, +\infty[)$. On va appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégral :

– $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x, t) = \dfrac{t^{x-1} \ln t}{1+t} \in \mathcal{C}(]0, 1[\times]0, +\infty[)$.

– Soit $[a, b] \subset]0, 1[$ alors si $t \in]0, 1[$, $\left|\frac{\partial g}{\partial x}\right| \leqslant t^{a-1} \ln t$ et si $t \geqslant 1$, $\left|\frac{\partial g}{\partial x}\right| \leqslant \dfrac{t^{b-1}}{1+t} \ln t$ hypothèse de domination.

Conclusion : f est dérivable et $f'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}\ln t}{1+t}\,\mathrm{d}t.$

Solution 3.1.5 (Ulysse Richert) Note : ?
Examinateur : Le type énervant. Il dit quasiment rien, quand il voit que tu rames il te balance des questions de cours mais ne réagit pas de toute façon. Il m'a laissé poireauter un temps fou sur le premier exo avant de me dire qu'on passait au suivant, sans me donner de solution. Accessoirement, ça doit être le même que The Part.

(1) a) Pas de problème de convergence en 0, on s'intéresse à la borne infinie. On fait le changement de variable $y = x^2$ puis une I.P.P.

$$\begin{aligned}\int_1^X \mathrm{e}^{-ix^2}\,\mathrm{d}x &= \int_1^{X^2} \mathrm{e}^{-iy}\,\frac{\mathrm{d}y}{2\sqrt{y}}\\ &= \left[\frac{i\,\mathrm{e}^{-iy}}{2\sqrt{y}}\right]_1^{X^2} + \frac{i}{4}\int_1^X \frac{\mathrm{e}^{-iy}}{y^{3/2}}\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

La partie toute intégrée admet une limite en $+\infty$ et l'intégrale converge grâce au critère de Riemann.

b) Trivial au sens propre : il existe milles et uns exos qui démontrent ça, la façon la plus courte devant être de la multiplier par elle-même puis passer en polaire.

c) Aucune idée.

On procède comme pour le calcul du b) : on pose $I(\varepsilon) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(\varepsilon+i)x^2}$ pour $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}I(\varepsilon)^2 &= \left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(\varepsilon+i)x^2}\,\mathrm{d}x\right)\times\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(\varepsilon+i)y^2}\,\mathrm{d}y\right)\\ &= \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(\varepsilon+i)x^2}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{e}^{-(\varepsilon+i)y^2}\,\mathrm{d}y\\ &= \iint_{[0,+\infty[^2} \mathrm{e}^{-(\varepsilon+i)(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\pi/4}\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(\varepsilon+i)r^2}\,r\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta\\ &= \frac{i\pi}{4(\varepsilon+i)}\end{aligned}$$

car la fonction $f(x,y) = \mathrm{e}^{-(\varepsilon+i)(x^2+y^2)}$ est continue, intégrable et intégrable séparément.
Par une I.P.P. comme ci-dessus, on a

$$I(\varepsilon) = \int_0^1 \mathrm{e}^{-(\varepsilon+i)t^2}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2(\varepsilon+i)}\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-(\varepsilon+i)t^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Montrons que $I(\varepsilon) \to I(0)$ quand $\varepsilon \to 0$:
– $|\,\mathrm{e}^{-(\varepsilon+i)t^2}\,| \leqslant 1$ et $\varepsilon \mapsto \mathrm{e}^{-(\varepsilon+i)t^2}$, $t \mapsto \mathrm{e}^{-(\varepsilon+i)t^2}$ sont continues donc $\varepsilon \mapsto \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-(\varepsilon+i)t^2}\,\mathrm{d}t$ est continue.
– $\left|\dfrac{\mathrm{e}^{-(\varepsilon+i)t^2}}{t^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{t^2}$ et on a aussi continuité des applications $\varepsilon, t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-(\varepsilon+i)t^2}}{t^2}$ donc $\varepsilon \mapsto \dfrac{1}{2\varepsilon}\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-(\varepsilon+i)t^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est continue.

Conclusion : I s'est donc prolongée de la sorte en une fonction continue en 0.

En utilisant le résultat précédent, on a $I(-(\varepsilon+i))^2 = \dfrac{\pi}{4(\varepsilon+i)}$ soit en prenant la limite quand $\varepsilon \to 0$, $I^2 = -i\dfrac{\pi}{4}$ soit $I = \pm\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\dfrac{1-i}{\sqrt{2}} = C - iS$. Il reste à déterminer le signe de S (par exemple). Or, par le changement de variable $x = t^2$ on obtient $S = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ que l'on écrit sous forme d'une série

$$S = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^{\pi}\frac{\sin u}{\sqrt{u+n\pi}}\,\mathrm{d}u$$

où on a posé $x = n\pi + u$. S étant la somme d'une série alternée (vérification immédiate), S est du signe du premier terme qui est positif.

Conclusion : $S = C = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$.

(2) Cf le Jimmy, page 240.

Solution 3.1.6 (Lotfi Yelles) Note : ?

Examinateur :

- Sympa, avec un fort accent (soviétique ou germanique ou peut être ibérique qui sait !) et donnant des indications quand il le faut. Sort de temps en temps de la salle.
- Laisse 10 min de préparation.
- Il semblerait que pour une même série, les examinateurs d'une même équipe ne changent pas de salle.
- Convoqué à 8h, passe en deuxième à 8h 50.

(1) a) Si α est racine alors α^2 aussi et par récurrence, α^{2^k}.

- Si $|\alpha| > 1$ ou $0 < \alpha < 1$ alors on obtient un infinité de racines ce qui est contradictoire.
- Si $\alpha = 0$ alors 1 est racine et $P(4) = P(2)P(1)$ entraîne que 4 est racine, ce qui est impossible vu la première question.

Conclusion : $|\alpha| = 1$ et $\alpha \neq 1$.

b) On a l'équivalence $|\,\mathrm{e}^{i\theta} - 1| = 1 \Leftrightarrow \theta = \pm\dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$ (en effet $\mathrm{e}^{i\theta} - 1 = \mathrm{e}^{i\theta/2}\,2\cos\theta/2$ donc $\cos\theta/2 = \pm 1$ et $\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$).

Soit maintenant α une racine de P, $\alpha = \mathrm{e}^{i\theta}$ avec $\theta \notin \{0, \pm\frac{2\pi}{3}\}$. Alors $\mathrm{e}^{i\theta/2}$ est aussi racine (en prenant $x^2 = \mathrm{e}^{i\theta}$) et, par récurrence $\mathrm{e}^{i\theta/2^n}$ aussi, ce qui est impossible.

Les seules racines de P sont donc j et $\overline{j} = j^2$.

c) $Q(X) = 1 + X + X^2$ est solution et comme on cherche des polynômes à coefficients réels, j et j^2 ont même ordre de multiplicité. On a donc $P = \lambda(1 + X + X^2)^n$ mais en reportant dans la relation $P(X^2) = P(X)P(X-1)$ alors $\lambda = 1$.

(2) il m'a donné la formule de la somme du dénominateur que je ne connaissais plus. J'ai proposé après décomposition de faire le calcul en passant par les séries entières, mais il a préféré que je le fasse avec des équivalents.

On décompose la fraction rationnelle $\dfrac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{4}{2n+1}$. On écrit ensuite

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+1)(2n+1)} &= 2\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-1+\frac{1}{N+1}-4\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2n+1}\\ &= 4\sum_{n=1}^{2N+1}\frac{(-1)^n}{n}+3+\frac{1}{N+1}\to 3-4\ln 2.\end{aligned}$$

Solution 3.1.7 (Denis Lafarge) Note : ?

Examinateur : même examinateur que The Loft. À noter que le hors programme ne fait pas peur à l'examinateur (pire qu'aux ENS !).

(1) a) La réponse est immédiate si on utilise la réduction de Jordan, sinon, c'est un peu plus long !

b) Si $M\in\operatorname{Ker}\varphi$ alors $AM=-MB$. Supposons que $\operatorname{Ker}\varphi\neq\{0\}$. On montre par une récurrence immédiate que $A^kM=M(-B)^k$ donc, pour tout $P\in\mathbb{C}[X]$, $P(A)M=MP(B)$. Si on prend $P=P_{-B}$ polynôme caractéristique de $-B$ alors $P_{-B}(A)M=0$. La matrice $P_{-B}(A)$ n'est pas inversible, elle admet donc 0 comme valeur propre. On sait que les valeurs propres de $P_{-B}(A)$ sont les $P_{-B}(\alpha_i)$ où les α_i sont les valeurs propres de A. Il existe i tel que α_i soit racine de P_{-B} ce qui est impossible vu que A et B ont des valeurs propres à partie réelle <0.
Conclusion : $\operatorname{Ker}\varphi=\{0\}$.

c) On a

$$\begin{aligned}\varphi(M_0) &= A\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{tA}\,C\,\mathrm{e}^{tB}\,\mathrm{d}t+\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{tA}\,C\,\mathrm{e}^{tB}\,\mathrm{d}tB\\ &= \int_0^{+\infty}\left(A\,\mathrm{e}^{tA}\,C\,\mathrm{e}^{tB}+\mathrm{e}^{tA}\,C\,\mathrm{e}^{tB}\,B\right)\mathrm{d}t\\ &= \left[2\,\mathrm{e}^{tA}\,C\,\mathrm{e}^{tB}\right]_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}\left(\mathrm{e}^{tA}\,C\,\mathrm{e}^{tB}\,B+A\,\mathrm{e}^{tA}\,X\,\mathrm{e}^{tB}\right)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

après une intégration par parties. On arrive alors à $\varphi(M_0)=2C-\varphi(M_0)$ soit $\varphi(M_0)=C$.

(2) On remarque tout d'abord que $m=n=1$ et $m=2$, $n=3$ sont solutions, on suppose alors que $m\geqslant 3$ et $n\geqslant 4$.

– Dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ on a $2^n+1=0$ donc n doit être impair et, pour $n\geqslant 3$, en écrivant $3^m-1=2(3^{m-1}+3^{m-2}+\cdots+1)=2^n$ alors $3^{m-1}+3^{m-2}+\cdots+1=2^{n-1}$ soit, dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $(-1)^{m-1}+(-1)^{m-2}+\cdots+1=0$ donc m doit être pair.
– Soit $n=2p+1$ et $m=2q$, $p\geqslant 2$ et $q\geqslant 2$. On a à résoudre $2^{2p+1}+1=3^{2q}$ soit $2\times 4^p+1=9^q$. Or en examinant les congruences de 4^p modulo 9, alors $4^{3k}\equiv 1[9]$ donc $p\equiv 1[3]$.
– On arrive alors à $2\times 4\times 4^{3k}+1=9^q$ soit encore $8^{2k+1}+1=(8+1)^q$ qui se développe en

$$8^{2k+1}=8^q+\binom{q}{1}8^{q-1}+\cdots+8q\Rightarrow 8^{2k}=8^{q-1}+\cdots+q$$

donc q est divisible par 8...

Conclusion : les seules solutions sont $m=n=1$ et $m=2$, $n=3$.

(3) On considère les intégrales $I_k = \displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\mathrm{d}t}{[1+t^2\sin^2 t]^{3/2}}$. En faisant le changement de variable $u = t - k\pi$ on obtient

$$I_k = \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}u}{[1+(u+k\pi)^2\sin^2 u]^{3/2}} = 2\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}u}{[1+(u+k\pi)^2\sin^2 u]^{3/2}}$$

par symétrie.

On minore I_k par $2\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}u}{[1+(k+1)\pi)^2u^2]^{3/2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{4+(k+1)^2\pi^4}}$ terme général d'une série divergente.

Conclusion : l'intégrale diverge.

Solution 3.1.8 (Sarah Diot-Girard) Note : ?

Examinateur : Toujours le même examinateur que Lotfi.

(1) a) $S(1)$ converge donc $R \geqslant 1$ et, si $x > 1$ alors $\dfrac{x^{2n+2}}{n(n+1)(2n+1)} \to +\infty$ d'où $R \leqslant 1$ et en conclusion, $R = 1$.

On décompose en éléments simples, on se retrouve avec trois séries, on reconnaît un DSE pour les deux premières ($-\ln(1-x^2)$ de mémoire pour le premier :

$$\frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{4}{2n+1}.$$

d'où

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+2}}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+2}}{n+1} - 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+2}}{2n+1} \\ &= -x^2\ln(1-x^2) - \ln(1-x^2) - x^2 - 2x\ln\frac{1+x}{1-x} + 4x^2 \end{aligned}$$

b) On reconnaît $6f(1)$, on justifie la continuité de la série entière en 1 (par convergence uniforme), puis un petit calcul de limite bien sympathique (oupa). Bref, du calcul... On trouve finalement $6S(1) = 6(3 - 4\ln 2)$.

(2) Le deuxième exo, je crois qu'on l'a fait avec Jimmy, sinon la solution est dans le Méthodix...

Solution 3.1.9 (Arnaud Galimberti) Note : ?

Examinateur : russe ou un truc comme ça, je l'ai eu l'an dernier mais il était beaucoup plus sympa cette année.

(1) Tout est dans le Méthodix algèbre p146-147 dans mon édition.

a) Sur $P(x)$, on effectue pour $i > 1$: $C_j \leftarrow C_j - C_1$.
Du coup on obtient $\deg P \leqslant 1$.

b) Donc on a $P(x) = \lambda x + \mu$ et on sait que $P(-b) = (a-b)^n$ et $P(-c) = (a-c)^n$. On en déduit donc pour $b \neq c$: $A = P(0) = \mu$.
Pour $b = c$, on écrit $A = bJ + (a-b)I$. On justifie que J est diagonalisable et on connaît ses valeurs propres ($J^2 = nJ$) et on déduit $\det A$.
Le polynôme caractéristique vient de la formule du déterminant en remplaçant a par $a - \lambda$. Et le polynôme minimal est $\Pi(X-\lambda)$ pour $\lambda \in Sp(A)$.
Le passage d'une formule à l'autre se fait en posant $f(x,y) = x(a-y)^n$.

(2) J'ai essayé de calculer $I'(x)$. Il avait l'air content de l'idée, j'ai persisté dans les calculs, il avait encore l'air content mais j'ai pas pu finir. Il m'a juste rassuré en disant que ce n'était pas faisable en 20 minutes.

a) $1-2x\cos t+x^2=(x-\cos t)^2+\sin^2 t=g(x,t)$ donc g est continue et strictement positive sur $(\mathbb{R}\setminus\{-1,+1\})\times[0,\pi]$. On en déduit que I est définie et continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,+1\}$.
On vérifie que I est définie en -1 et en $+1$, ainsi I est définie sur $\mathbb{R}$ car $g(1,t)=2-2\cos t=4\sin^2 t/2$ et $\ln g(1,t)\underset{0}{\sim}\ln t$ qui est une fonction intégrable sur $]0,\pi]$.

b) Par de simples changements de variables, on déduit les égalités suivantes :

$$I(-x)=I(x),\ I(1/x)=I(x)-2\pi\ln|x|,\ 2I(x)=I(x)+I(-x)=I(x^2)$$

(pour la dernière relation, on utilise le fait que $(1+2x\cos t+x^2)(1-2x\cos t+x^2)=1-2x^2\cos 2t+x^4$).
Supposons maintenant que $|x|<1$: alors $I(x)=\dfrac{1}{2}I(x^2)$ et par récurrence $I(x)=\dfrac{1}{2^n}I\left(x^{2n}\right)$. En passant à la limite (I est continue), on obtient $I(x)=0$.
Si $|x|>1$ alors $I(x)=I(1/x)+2\pi\ln|x|=2\pi\ln|x|$.
Enfin, si $|x|=1$, on se sert de la formule $2I(x)=I(x^2)$ et donc $2I(1)=I(1)$ donc (comme I est paire) $I(1)=I(-1)=0$.

Remarque : on peut tout reprendre avec des sommes de Riemann.

Solution 3.1.10 (Olivia Pessinet) Note : ?
Examinatrice : Mme Pages, sympa, elle m'a aidée quand je savais pas faire, et elle s'est pas énervée alors que je comprenais pas très vite...par contre son exo est tordu. Apparemment elle aime bien les polynômes.
On suppose pour la suite que $\lambda\geqslant 0$.

(1) $n=1$: on a $P^2(X)=\lambda^2+X(X+1)$. Si $\lambda\neq\dfrac{1}{2}$ on n'a pas de solution, sinon $P=X+\dfrac{1}{2}$ convient.
$n=2$: on a $P^2(X)=\lambda^2+X(X+1)(X+2)(X+3)=X^4+6X^3+11X^2+6X+\lambda^2$ et on cherche P sous la forme $P=\varepsilon X^2+aX+\lambda$ avec $\varepsilon=\pm1$. On obtient l'égalité

$$P^2(X)=X^4+6X^3+11X^2+6X+\lambda^2=X^4+2\varepsilon aX^3+(2\lambda\varepsilon+a^2)X^2+2a\lambda X+\lambda^2$$

d'où le système $\varepsilon a=3$, $2\lambda\varepsilon+a^2=11$, $a\lambda=3$. Comme $\lambda\geqslant 0$, on en déduit immédiatement que $\varepsilon=1$, $a=3$ et $\lambda=1$. Le polynôme $P=X^2+3X+1$ convient.

(2) En factorisant ça marche tout seul :

$$(P(X)-\lambda)(P(X)+\lambda)=\prod_{i=0}^{2n-1}(X+i)$$

d'où si on note I^+ les racines de $P+\lambda$ et I^- celle de $P-\lambda$ alors (I^+,I^-) réalise une partition de $[\![-2n+1,0]\!]$.

(3) C'est la que ça devient tordu :
il faut faire un dessin et montrer que $b=a+2$ est impossible car P ne s'annule pas lorsque $P^2\geqslant\lambda^2$, ensuite montrer que b vaut forcement $a+3$ car P' s'annule seulement $n-1$ fois sur les $[-2k,-2k+1]$.

(4) Comme $a_0 = 0$ alors $a_1 = -1$ ou -3. Si $a_1 = -1$ on montre qu'il y a une impossibilité. Finalement on a, pour $n \geqslant 2$, $P - \lambda = \prod_{p=0}^{[(2n-1)/4]} (X + 4p) \prod_{p=0}^{[(2n-4)/4]} (X+4p+3)$ et $P + \lambda = \prod_{p=0}^{[(2n-2)/4]} (X + 4p + 1) \prod_{p=0}^{[(2n-3)/4]} (X + 4p + 2)$.

Solution 3.1.11 (Maud) Note : ?
Examinateur : ?

Solution 3.1.12 (Cyprien Rafaï) Note : ?
Examinateur : ?

(1) a) Par linéarité on a $\int_a^b P(t)f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ pour tout polynôme P. Grâce au théorème de Weierstrass on sait qu'il existe une suite (P_k) de polynôme qui converge uniformément sur $[a, b]$ vers f. $\overline{P_k}f$ converge aussi uniformément vers $|f|^2$ car f est bornée donc

$$\lim_{k\to+\infty} \int_a^b \overline{P_k}(t)f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b |f(t)|^2\,\mathrm{d}t = 0$$

donc $f = 0$.

b)

Solution 3.1.13 (Marc Houllier) Note : ?
Examinateur : Bon ben des exos plutôt pas intéressants ! Et dont l'examinateur ne connaît pas forcément la solution. A noter que pour le (2) j'avais une solution originale et il voulait pas d'autre que la sienne ...

(1)

Solution 3.1.14 (Guillaume De Paepe) Note : ?
Examinateur : Sympa, barbichu (personne n'est parfait) et reste donne quelques indications quand il voit que t'en as besoin (ou que tu le supplies avec tes petits yeux de labrador)

(1) (3)⇒(1) immédiat.
(1)⇒ (2) les A_i sont des matrices de projecteurs et pour des projecteurs, le rang est égal à la trace qui est linéaire...
(2)⇒(3) je sais plus trop... c'est le plus dur : on veut montrer que les espaces $\mathrm{Im}(A_i)$ sont en somme directe.
Alors on pose H leur somme et on utilise l'hypothèse de départ... Bon un truc comme ça. De toute façon, je veux plus en entendre parler de cette question de ..... (cinq lettres, 3 consonnes et deux fois la même voyelle)

(2) On calcule la dérivée $F'(x)$ et on trouve $F'(x) = -1/(1 + x^2)$.
Alors $F(x) = -\operatorname{Arctan}(x) + a$ (et $a = \pi/2$ en prenant soit la valeur en 0 soit la limite en l'infini avec le TCD (on prend une suite (x_n) qui tend vers l'infini).

Solution 3.1.15 (V. Pécataing) Note : ?
Examinateur : Il m'a d'abord parut sympa, et puis, il m'a donné l'exo... J'aurais jamais pensé qu'ils oseraient poser ça (le 1) juste) au Mines, pour le coup, je me venge en lui faisant une belle cypre (de toute façon je ne voyais pas quoi lui faire d'autre sur le moment), du grand art, jusqu'à ce qu'il me dise : " bon, on passe au 2 ? " (ok, c'est moi qui vais me ramasser une cartouche, mais au moins je suis sûr que je l'ai fait chier pendant tout le premier exo). J'essaie de me rattraper sur le 2.

(1)

Solution 3.1.16 (Benjamin Sabbah) Note : ?
Examinateur : ?

Solution 3.1.17 (Sébastien Lérique) Note : 17
Examinateur : celui qui a un fort accent, lotfi l'a eu jcrois. Sympa, parle pas trop, mais indique au bon moment et au bon endroit.

(1) C'est débile, on trouve la relation de récurrence, et les solutions DSE sont de la forme $x^2 \cdot (\alpha \cos x + \beta \sin x)$.

(2) On écrit $P(P(X)) - X = P(P(X)) - P(X) + P(X) - X$. Si $P(X) - X = (X-\alpha)^\omega Q(X)$, on a alors $P(P(X)) - X = \cdots = (X-\alpha)^\omega \cdot [Q(P(X))[1 + (X-\alpha)^{\omega-1}Q(X)]^\omega + Q(X)]$ donc ça marche bien.
On peut aussi raisonner avec les congruences : $P(X) \equiv X[P(X) - X]$ donc, pour tout entier k, $P(X)^k \equiv X^k[P(X) - X]$. On écrit $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$ d'où

$$P(P(X)) = \sum_{k=0}^{n} a_k P(X)^k \equiv \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = P(X) \equiv X.$$

(3) $P_A(X) = \prod\limits_{i=1}^{p} (\lambda_i - X)^{\omega_i}$ donc, comme P_A est un polynôme annulateur de A, on a, en notant a l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ de matrice A,

$$E = \bigoplus_{i=1}^{p} \underbrace{\operatorname{Ker}(a - \lambda_i \operatorname{Id})^{\omega_i}}_{=F_{\lambda_i}}$$

Les F_{λ_i} sont appelés sous-espaces caractéristiques de a. Si on revoit la remarque (ii) page 189, on sait que les projecteurs associés à cette décomposition en somme directe sont des éléments de $\mathbb{C}[a]$ (polynômes en a). a stabilise chaque F_{λ_i}, on pose $a_i = a_{||F_{\lambda_i}}$. $a_i - \lambda_i \operatorname{Id} = n_i$ est nilpotent donc $a_i = \lambda_i \operatorname{Id} + n_i$.
On pose alors $d = \sum\limits_{i=1}^{p} d_i$ et $n = \sum\limits_{i=1}^{p} n_i$. d est diagonalisable (dans toute base associée à la décomposition en somme directe écrite ci-dessus) et d est un polynôme en a car $d = \sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i p_{F_{\lambda_i}}$. n est nilpotente et appartient aussi à $\mathbb{C}[a]$ ($n = a - d$). Comme d et n sont dans $\mathbb{C}[a]$ alors ils commutent avec a et entre-eux.
Il m'a fait admettre l'unicité parce que j'avançais pas.
Si $a = d' + n'$ où d' et n' commutent alors d' et n' commutent aussi avec a donc avec tout polynôme en a, en particulier, d' et n' commutent avec d et n. On a alors $d - d' = n' - n$. $d - d'$ est diagonalisable (ce sont 2 endomorphismes qui commutent et qui sont diagonalisables), $n - n'$ est nilpotent ($(n-n')^{m+m'} = 0$ si m et m' sont les

indices de nilpotence de n et n'). $d-d'$ est donc diagonalisable et nilpotent, c'est donc l'endomorphisme nul ce qui assure l'unicité.
Si e^A est diagonalisable, on a sa décomposition unique sous cette forme. Sachant qu'en plus $\mathrm{e}^A = \mathrm{e}^D \cdot \mathrm{e}^N = \mathrm{e}^D + \mathrm{e}^D \cdot N \cdot \left(I_n + \cdots + \frac{N^{n-2}}{(n-1)!}\right)$ ($A = D + N$ avec D et N qui commutent, puis N nilpotente), on a donc $\mathrm{e}^D \cdot N \cdot \left(I_n + \cdots + \frac{N^{n-2}}{(n-1)!}\right) = 0$ par unicité de la décomposition. Puis e^D est inversible, de même pour $I_n + \cdots + \frac{N^{n-2}}{(n-1)!}$ car c'est de la forme $I_n +$ une matrice nilpotente, donc on a finalement $N = 0$, donc A diagonalisable.

Solution 3.1.18 (Y. Roques) Note : 11
Examinateur : pas très sympa et il m'a filé coniques mélangé avec géométrie en plus!

(1) Par la règle de D'Alembert $R = 1/2$. $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $xf'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n$, $\frac{1}{x}(f(x)-1) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1}x^n$, $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$,
donc $xf'x) + f(x) - 1 = 2x^2f'(x) + 3xf(x)$. d'où $(2x^2-x)f'(x) + (3x-1)f(x) = -1$. Donc $(2x-1)f'(x) + f(x)(3-\frac{1}{x}) = -\frac{1}{x}$.On a des solutions sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. On trouve en résolvant $f(x) = -\frac{1}{x} + \frac{\alpha}{x\sqrt{1-2x}}$.
Or $f(0) = 1$ donc $\alpha = 1$. On utilise ensuite le développement en série entière de $\frac{1}{\sqrt{1-2x}}$ pour vérifier que cela convient.

(2) Puisque toutes les paraboles se déduisent par homothétie(cf. Jimmy), (et que celles ci conservent l'alignement, les proportions, et l'orthogonalité). On peut se placer dans le cas où $y = x^2$, $M(a, a^2)$, $D : x = 0$, $T_a : y = a^2 + 2a(x-a)$, $F(0, \frac{1}{4})$, $P(0, -a^2)$. Un vecteur de orthogonal à T_a est $(2a, -1)$. Il dirige Q_a $Q_a : x + 2ay = 2a^3 + a$. Donc $Q(0, a^2 + \frac{1}{2})$. F est donc le milieu de $[P, Q]$.

Solution 3.1.19 (Boris Dalstein) Note : 10
Examinateur : très agé, je pense que seul Rabie à une chance de connaitre les époques que cet homme a traversé. j'ai eu $10min$ de préparation, où juste avant il m'a bien précisé d'entrée de jeu : durant la colle, je ne dirais pas un mot sauf si vous êtes bloqué et me demandez une indication pour continuer. Cependant, si vous continuez à être bloqué pendant trop longtemps sur le même point sans me demander d'indication, je peux vous donner spontanément une indication, ou vous inviter à passer à l'exo suivant... . Il est effectivement resté mué et très inactif pendant la colle...

(1) Je n'ai pas la solution exacte étant donné que je ne souviens plus de la quadrique, et que de toute façon je n'ai pas réussi à terminer les calculs... je me suis vraiment embrouillé ces derniers. Juste un truc : j'ai commencé par essayer de simplifier la forme quadratique (c'est pour ça que je m'en souviens...) pour l'écrire sous la forme de carrés indépendants (j'ai donc écrit la matrice, cherché les vecteurs propres et valeurs propres, etc...). Cependant, cette méthode n'aboutit pas.

J'ai donc ensuite cherché les centres possibles de la quadriques, ce qui se formalise par $\vec{\nabla}\mathcal{Q} = 0$ qui nous fournit 3 équations permetant de trouver les centres. Une certaine valeur de m donne un système de rang 2 nous fournissant une droite de centre possibles (donc la quadrique est un cylindre), et sinon, ben, on peut normalement trouver un centre unique, mais je n'ai pas été plus loin.

(2) a) Déjà, d'après la question 2, on se doute que F est nulle en $+\infty$... Bon, ben, il n'y a pas de surprise, il suffit d'utiliser un théorème de convergence dominée. Pour faire propre, on pose $f_n(t) = \frac{e^{-|n-t|}}{1+t^2}$. On montre alors aisément :
- $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in L^1$
- f_n converge ponctuellement vers $f = 0$ (la fonction nulle)
- $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, |f_n(t)| < \varphi(t) = \frac{1}{1+t^2} \in L^1$

Ainsi, d'après le TCD et la caractérisation séquentielle de la limite,

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n = \int_{\mathbb{R}} f = 0$$

b) Bon, comme on s'en doute, il faut utiliser le théorème d'intégration sous le signe intégral. Le problème, c'est la valeur absolue, qui m'a bien embêtée... parce que justement, la fonction n'est pas dérivable, en fait... Il y a un truc tout con à faire qui simplifie alors la vie, et à laquelle je n'ai pas pensé, honte à moi, c'est l'examinateur qui me l'a dit. il suffit décrire

$$|x-t| = \begin{array}{ll} x-t & \text{si} \quad t<x \\ t-x & si \quad t>x \end{array}$$

soit

$$F(x) = e^{-x}\int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

ce qui rend la suite triviale, étant donné que tout est désormais bien C^∞, et qu'il n'y a plus de x à l'intérieur des integrales. On peut donc dériver sans vergogne :

$$\begin{aligned} F'(x) &= -e^{-x}\int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + e^{-x}\frac{e^x}{1+x^2} + e^x\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t - e^x\frac{e^{-x}}{1+x^2} \\ &= -e^{-x}\int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + e^x\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ F''(x) &= F(x) - e^{-x}\frac{e^x}{1+x^2} - e^x\frac{e^{-x}}{1+x^2} \\ &= F(x) - \frac{2}{1+x^2} \end{aligned}$$

D'où F vérifie finalement $y'' - y = -\frac{2}{1+x^2}$, et s'annule en $+\infty$ et $-\infty$. Je n'ai pas eu le temps de montrer l'unicité, mais bon, ça n'est pas très compliqué : On est en présence d'une équa-diff linéaire, ici du second ordre, et on a 2 conditions limites , donc tout marche bien :).

Solution 3.1.20 (Pierrick Jamaux) Note : ?

Déroulement : en préparation, je passe 5 minutes à essayer de retrouver la définition des matrices semblables (!...).

Je raconte une grosse VANNE dès le début (du type $\mathrm{Rg}(A) = 2n$ donc A est semblable à J_{2n}). J'ai un petit problème de confusion semblable / équivalent . L'examinateur type Hassan réagit en attaquant, impossible de me concentrer (il y a du stress aussi...), il me saoûle pendant 5 minutes à me dire de justifier ce que j'ai dit alors que je lui ai dit que c'était faux. Le calme revient, je commence à avoir des idées et là, il me dit d'effacer, me donne le deuxième exo. Il me demande de justifier l'existence de la série et de l'intégrale. Je le fais immédiatement, il retrouve un peu le sourire...pour un petit moment car je bloque sur la question. A voir sa tête, je me dis que je vais prendre entre 4 et 5, plutôt vers 4... Verdict : 6, généreux par rapport à ma performance du moment. Pour anecdote, je trouve de tête la solution du premier exo en bas de l'escalier, la planche se passait au premier étage...envie de revenir en courant dans la salle...

(1) Soit f telle que $M(f) = A$, montrons que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f^2$:

On sait que $\dim \operatorname{Im} f = 2n$ donc $\dim \operatorname{Ker} f = n$ et comme $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Ker} f$ ($f^3 = 0$) alors $\operatorname{Rg}(f^2) \leqslant n$. Si on considère la restriction de f à $\operatorname{Im} f$ on obtient la relation (théorème du rang)

$$\underbrace{\dim \operatorname{Im} f}_{2n} = \underbrace{\dim \operatorname{Im} f^2}_{\leqslant n} + \underbrace{\dim(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f)}_{\leqslant n}$$

donc $\dim \operatorname{Im} f^2 = n$ et $\operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Ker} f$.

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de $\operatorname{Ker} f$, on choisit e_{i+n} tel que $e_i = f(e_{i+n})$, $(e_{n+1}, \dots, e_{2n})$ est libre. On montre facilement que $(e_1, \dots, e_{2n})$ est libre et que ceci est une base de $\operatorname{Im} f$.

Comme $e_{i+n} \in \operatorname{Im} f$ on choisit $e_{i+2n} = f(e_{i+n})$ (on utilise le fait que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f^2$. (e_{i+2n}) est libre, puis $(e_1, \dots, e_{3n})$ libre est c'est la bonne base).

(2) a) On a

$$f(x) = \sin ax \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \sin ax \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx}.$$

Posons $f_N(x) = \sin ax \sum\limits_{n=1}^{N} e^{-nx}$, $r_N(x) = f(x) - f_N(x)$ et $I_N(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_N(x)\,\mathrm{d}x$.

On a $|r_N(x)| \leqslant \left|\dfrac{\sin ax}{1 - e^{-x}}\right| e^{-(N+1)x}$. Comme $\dfrac{\sin ax}{1 - e^{-x}}$ est bornée sur $[1, +\infty]$ et que cette fonction continue admet une limite en 0, elle est bornée sur $\mathbb{R}$. Soit M sa borne supérieure.

$$|I(a) - I_N(a)| = \left|\int_0^{+\infty} r_N(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^{+\infty} M e^{-(N+1)x}\,\mathrm{d}x = \frac{M}{N+1}.$$

Donc $\lim\limits_{N \to +\infty} I_N(a) = I(a)$.

Si on calcule maintenant $I_N(a)$, on trouve $I_N(a) = \sum\limits_{n=1}^{N} \dfrac{a}{a^2 + n^2}$ et $\lim\limits_{N \to +\infty} I_N(a) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{a}{a^2 + n^2}$ ce qui prouve la première égalité.

b) Comme $\operatorname{ch} at$ est paire, on cherche son développement en série de cosinus.

$$\begin{aligned}\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos nt \operatorname{ch} at\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\Re\left(\int_0^{\pi} \cos[(n + ia)t]\,\mathrm{d}t\right) &= \frac{2}{\pi}\Re\left(\frac{n - ia}{n^2 + a^2}\sin(n\pi + ia\pi)\right)\\ &= \frac{2}{\pi}\operatorname{sh}(a\pi)(-1)^n \frac{a}{a^2 + n^2}.\end{aligned}$$

D'où, grâce à Dirichlet (cf. théorème 7.16 page 292),

$$\operatorname{ch} at = \operatorname{sh}(a\pi)\left(\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{a^2 + n^2}(-1)^n \cos nt + \frac{1}{a\pi}\right).$$

On prend alors la valeur en π et l'on trouve :

$$I(a) = \frac{\pi}{2}\left[\coth a\pi - \frac{1}{a\pi}\right].$$

Solution 3.1.21 (Nicolas Le Moigne) Note : 14

Examinateur : Exos très bateaux et pas difficiles du tout. Le tout est de ne pas arnaquer et de ne sauter aucune étape. L'examinateur venait de descendre les deux candidats précédents, mais était plutôt sympa avec moi : j'ai réussi à lui donner le sourire ce qui paraissait compliqué au premier abord. En revanche niveau note j'ai pas trop compris (comme à beaucoup d'oraux d'ailleurs) je pensais avoir surtorché mes exos, mais bon....

(1) Je l'ai eu en préparation et je pensais que c'était deux exos différents... du coup je lui donne un exemple trivial pour le a) et je fais le b) à ma manière (un peu compliquée). Il me dit "ok, j'ai mal posé mon exercice, il faudra que je pense à changer mon énoncé". Il voulait que j'utilise les DL de exp et $\ln(1+x)$...... l'exo devient trivial.

(2) Facile, le tout est de justifier, rejustifier, surjustifier les interversions série-intégrales et préciser à chaque fois les intervalles sur lesquels on travaille (ce que j'avais fait pourtant).

Solution 3.1.22 (Maxime Chammas) Note : ?

Examinateur : bof, je n'ai rien compris à ses indications.

(1) a) On remarque que $x\varphi(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$ soit $\varphi(x) = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}$.
– $|\,\mathrm{e}^{-x}\,\varphi(x)| \leqslant \mathrm{e}^{-x}$ pour $x \geqslant 1$ d'où l'intégrabilité en $+\infty$.
– $\mathrm{e}^{-x}\,\varphi(x)$ se prolonge par continuité en 0 d'où l'intégrabilité en 0.

b) On écrit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{X\to+\infty}\int_0^X \mathrm{e}^{-x}\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x$. On remarque alors que

$$\begin{aligned}\int_0^X \mathrm{e}^{-x}\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^X (\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x})\frac{\mathrm{d}x}{x} = \int_0^X (\mathrm{e}^{-x}-1)\frac{\mathrm{d}x}{x} + \int_0^X (1-\mathrm{e}^{-2x})\frac{\mathrm{d}x}{x}\\ &= \int_0^X (\mathrm{e}^{-x}-1)\frac{\mathrm{d}x}{x} - \int_0^{2X} (\mathrm{e}^{-u}-1)\frac{\mathrm{d}u}{u} \text{ chgt de variable } u=2x \text{ dans la } 2^{\text{ième}}\\ &= \int_X^{2X} \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Or $1-\mathrm{e}^{-X} \leqslant 1-\mathrm{e}^{-x} \leqslant 1$ d'où

$$(1-\mathrm{e}^{-X})\ln 2 \leqslant \int_X^{2X} \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \ln 2$$

ce qui donne par passage à la limite : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \ln 2$.

(2) $v = uu^*$ est symétrique. $u^3 = -u \Rightarrow u^{*3} = -u^*$ d'où $v^3 = v$ car u et u^* commutent. On en déduit que $\mathrm{Sp}(v) \subset \{0, 1, -1\}$ (racines de $X^3 - X$). Comme $\mathrm{Tr}(v) = 2n$, -1 ne peut être valeur propre, 0 est valeur propre d'ordre 1 et 1 est valeur propre d'ordre $2n$. $E = \mathrm{Ker}\,v \oplus \mathrm{Ker}(I - v)$ en somme directe orthogonale.
Comme $\mathrm{Ker}\,v = \mathrm{Ker}\,u^*u = \mathrm{Ker}\,u$, u n'est pas inversible. Notons $f = u_{||\,\mathrm{Ker}(v-\mathrm{Id})}$ (ce qui est possible car, comme $u\circ v = v\circ u$, $u(\mathrm{Ker}(v-\mathrm{Id})) \subset \mathrm{Ker}(v-\mathrm{Id})$).
On a $f\circ f^* = (u\circ u)^*_{||\,\mathrm{Ker}\,v-\mathrm{Id}} = v_{||\,\mathrm{Ker}\,v-\mathrm{Id}} = \mathrm{Id}_{||\,\mathrm{Ker}\,v-\mathrm{Id}}$ donc f est orthogonale. f est aussi inversible donc $f^3 = -f \Rightarrow f^2 = -f$. Soit A la matrice de f dans une base orthonormale, $A^2 + I = 0$ donc A est $\mathbb{C}$-diagonalisable et ses vap sont $\pm i$. On sait d'après le cours que A est semblable à une matrice diagonale par blocs de la forme $\mathrm{Diag}(B, B, \dots, B)$ où $B = \begin{pmatrix} 0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. A est en fait orthogonalement semblable à cette matrice.
Conclusion : u admet $\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & \mathrm{Diag}(B,\dots B)\end{pmatrix}$ comme matrice dans une base orthonormée.

Solution 4.1.1 (David Fourquet) Note : 12
Examinateur : ?

(1) Soit P un plan orthogonal au plan xOy et contenant le sommet. Pour des raisons de symétrie, ce plan doit être plan de symétrie de l'hyperbole donc c'est soit le plan xOz soit le plan yOz.
On écarte le cas du plan yOz qui ne convient pas (ou on fait les calculs).
Soit $S\begin{pmatrix}x_0\\0\\z_0\end{pmatrix}$ sommet de ce cône, $\mathcal{H}$ désignant l'hyperbole, on a l'équivalence

$$M\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}\in\mathcal{C}\Leftrightarrow\exists M'(x,y)\in\mathcal{H},\ \exists t\in\mathbb{R}\mid\overrightarrow{SM}=t\overrightarrow{SM'}\Leftrightarrow\begin{cases}X-x_0 &= t(x-x_0)\\Y &= ty\\Z-z_0 &= -tz_0\end{cases}$$

$z_0\neq 0$ (le sommet ne peut être dans le plan xOy) donc ces équations sont encore équivalentes à $t=\dfrac{z_0-Z}{z_0}$, $y=\dfrac{z_0}{z_0-Z}Y$, $x=x_0+\dfrac{z_0}{z_0-Z}(X-x_0)$ en écartant le cas où $Z=z_0$ (qui donne des génératrices parallèles au plan xOy).
On a donc $x^2-y^2=\dfrac{z_0^2}{(z_0-Z)^2}(X-x_0)^2+2\dfrac{x_0z_0}{z_0-Z}(X-x_0)+\dfrac{z_0^2}{(z_0-Z)^2}Y^2=a^2$.
En développant, on obtient l'équation d'un cône et, pour qu'il soit de révolution, on s'intéresse à la forme quadratique Q en X,Y,Z en exprimant qu'une C.N.S. pour qu'il soit de révolution est que sa matrice admette une valeur propre double. Après calculs, on a $Q(X,Y,Z)=z_0^2X^2-z_0^2Y^2+(x_0^2-a^2)Z^2-2x_0z_0XZ$ de matrice

$$A=\begin{pmatrix}z_0^2&0&-x_0z_0\\0&-z_0^2&0\\-x_0z_0&0&x_0^2-a^2\end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique s'écrit $(\lambda+z_0^2)(-\lambda^2+\lambda(x_0^2-a^2+z_0^2)+a^2z_0^2)$ et $-z_0^2$ est la racine double d'où $z_0^2[-z_0^2+x_0^2-a^2+z_0^2+a^2]=0$ soit $x_0=0$. L'ensemble des sommets recherchés est donc l'axe Oz privé de l'origine.

Solution 4.1.2 (Jean Baptiste Denat) Note : 15
Examinateur : M. Vallaeys ou qqchose comme ça. Strict mais très sympathique. Malicieux. Pose des questions qui incitent a dire des bêtises. Surtout prendre son temps pour réfléchir et ne pas répondre du tac au tac sauf si on est sur de soi.

(1)

Solution 4.1.3 (Bastien Mallein) Note : 17
Examinateur : m'a traité de parasite, mais pas vraiment méchant...

Solution 4.1.4 (Vincent Pécastaing) Note : 19
Examinateur : Le type est du sud, sang chaud : j'arrive 30 seconde à la bourre, et il était déjà passé me chercher dans la salle d'attente... Je cours dans le couloir, je passe au secrétariat, je reviens en arrière, puis je finis par le trouver au bout de 10 min. Il me gueule dessus, me dit qu'il faudra pas que je me plaigne pour ma préparation, et sur sa colère il me file une sorde sur des coniques... Bref, on ne part pas sur de bonnes bases tous les deux.

(1) J'y suis allé un peu brutalement à la première question, j'ai fait tourner la base pour éliminer xy puis j'ai translaté, on obtient une hyperbole équilatère. Il m'a dit que je calculais bien, mais qu'est-ce que j'aurais fait si il m'avait filé une quadrique ? Utilisation de l'endomorphisme symétrique associé à la forme quadratique, on regarde ses vap. On a $\pm\sqrt{1+\lambda^2}$, c'est pour ça qu'on obtient une hyperbole équilatère (c'est vrai que c'est mieux comme ça).
Ensuite, si on a un point commun à toutes les hyperboles, il doit vérifier $xy = 0$, et on obtient ainsi $(0,0)$, $(a,0)$ et $(0,b)$.
Brutal, on utilise la caractérisation avec les dérivées partielles qui s'annulent, il m'a épargné le calcul.
Si $f(x,y) = x^2 - y^2 + 2\lambda xy - ax + by$ alors le centre est caractérisé par $\operatorname{grad} f = 0$ soit $x = \dfrac{a-\lambda b}{2(1+\lambda^2)}$ et $y = \dfrac{b+\lambda a}{2(1+\lambda^2)}$.

(2) Comme $\operatorname{Im} M \subset \operatorname{Ker} M$ alors $\dim \operatorname{Ker} M \geqslant \dim \operatorname{Im} M$ et $\dim \operatorname{Im} M + \dim \operatorname{Ker} M = 3$ donc le noyau est de dimension 2. On prend x qui n'est pas dans le noyau, y tel que (Mx, y) soit une base de $\operatorname{Ker} M$ et (Mx, y, x) est une base qui convient.

(3) Enfin, on utilise le ps que défini B, on montre que AB défini un endomorphisme orthogonal pour ce ps, et il donc diagonalisable (dans une bon pour ce ps), cf. cours ! En effaçant le tableau, il me dit rapido que la réciproque est vraie.

A la fin, il est très souriant, me demande d'où je viens, il me dit que lui aussi est du sud, et que ça lui arrive fréquemment de piquer des colères. Il m'annonce un 19 ! Comme quoi, y a toujours moyen de rattraper le coup...

Solution 4.1.5 (Laetitia Leduc) Note : 13
Examinateur : le même que The Nat, sympathique, m'a souhaité bonne continuation à la fin et conseillé de sourire parce que je savais des choses.

(1) a) J'ai dit que c'était faux sans même penser à donner un contre-exemple donc il m'a dit de passer à la suite.

b) On considère un fermé E_0, F_0 son image par f et une suite y_n d'éléments de F_0 convergent vers y.
On considère $K = \{y_n\} \cup \{y\}$, on montre que c'est un compact puis on considère son image réciproque par f. Puisque c'est un compact on peut en extraire une sous-suite de la suite des antécédents des y_n qui converge vers un élément de E_0 puisque E_0 est fermé. Par continuité de f et par passage à la limite, on obtient que F_0 est fermé.

c) On montre que γ_n n'est pas ouvert en montrant que son complémentaire n'est pas fermé, puis on écrit γ_n comme l'intersection de l'ensemble des polynômes unitaires et des polynômes à racines réelles et on essaie de montrer que ces ensembles sont fermés. Il m'a dit que la fin de cette question était assez compliquée et que l'on devait utiliser la convergence uniforme. Comme je n'avais pas aborder le reste en préparation on est passé aux questions de cours.

d) Cf. le “Jimmy”.

e) Pour la série, on transforme l'expression de u_n et on montre avec la règle de Riemann que la série converge.

Solution 4.1.6 (Guillaume De Paepe) Note : 11
Examinateur : M. Vallaeys (ouais... ça doit être ça). Sympa, donne des indications pertinentes et prend un air exaspéré quand on fougère.

(1) a) On montre que $P_b(x) = (-1)^n P_a(X^2)$ (opérations sur les déterminants).

b) Ça se fait bien à condition d'avoir la vue claire : $B^2 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ On prend le polynôme minimal $Q_a(X)$ de A, qui n'admet pas 0 pour racine alors, $Q_a(X^2)$ est un polynôme annulateur de B et comme 0 n'est pas racine, il est scindé à racines simples.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Si B est diagonalisable, B^2 aussi et pour P polynôme scindé à racines simples annulateur de B^2 :

$P(B^2) = \begin{pmatrix} P(A) & 0 \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}$ et A est diagonalisable. De plus, d'après la relation du a (on s'en sert enfin) si $p = \dim(\operatorname{Ker} A)$ alors $\dim(\operatorname{Ker} B) = 2p$ or il suffit de regarder la matrice B droit dans les yeux pour s'apercevoir que la dimension de son noyau, c'est p donc $p = 2p$ et après calculs, $p = 0 \Rightarrow A$ inversible.

Conseil : ne pas ressortir la vanne que j'ai balancé à mon examinateur : un endo est diagonalisable si *et seulement si* son polynôme caractéristique est scindé à racines simples (prendre l'identité ou la matrice nulle).

(2) a) NON (sans blague) car si c'était le cas, l'image de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ par le déterminant (appl continue), c'est à dire $\mathbb{R}^*$, serait connexe par arcs.

b) Pas eu le temps...

Solution 4.1.7 (Firas Chaari) Note : 8
Examinateur : Mr. FRANCHINI : très gentil et donne des indications.

(1)

Solution 4.1.8 (L. Yellés) Note : 11
Examinateur : Mr Francini. Super sympa,bienveillant, tutoie, donne des conseils et m'a souhaité bonne continuation pour la suite ! Par ailleurs il ne peut être qu'un type bien puisque c'est le seul à avoir prononcé correctement mon nom (i.e. prononcer le 's' dans yelles) et à s'être préoccupé de sa prononciation !

(1)

Solution 4.1.9 (Joseph Feneuil) Note : 11
Examinateur : ?

(1)

Solution 4.1.10 (Benjamin Thorent) Note : 6
Examinateur : très sympathique et marrant... Donc l'oral se passe de manière agréable...
Indication : Le plus dur c'est la 2, l'équivalent en $+\infty$. En fait, il faut voir que f est une intégrale par sa borne inf donc le calcul de f' est facile. On trouve un équivalent et on intègre la relation après avoir bien justifié toutes les hypothèses nécessaires pour cela.

Solution 4.1.11 (Denis Lafarge) Note : 19
Examinateur : ?

Solution 4.1.12 (Jean Baptiste Peyrat) Note : 15

Examinateur : M. Franchini : très sympa, aide au bon moment et s'interesse à ce qu'on raconte !

(1) a) On a $\forall x, \|f(x)\| < 1$ donc $f(E) \subset B(0,1)$.
On prend $y \in B(0,1)$ et $x = \frac{y}{1-\|y\|}$. On a alors $f(x) = y$. Oh, on vient de trouver la fonction réciproque ! Et, d'après la continuité de la norme, f et f^{-1} sont continues donc on a bien un homéomorphisme.

b) $\|f(x) - f(y)\| = \dfrac{\|x + x\times\|y\| - y - \|x\|\times y\|}{(1 + \|x\|)(1 + \|y\|)}$ $\|f(x) - f(y)\| \leqslant \dfrac{\|x - y\|}{(1 + \|x\|)(1 + \|y\|)} + \dfrac{\|x\times\|y\| - \|x\|\times y\|}{(1 + \|x\|)(1 + \|y\|)}$ (inégalité triangulaire).
Soit $\|f(x) - f(y)\| \leqslant \dfrac{\|x - y\|}{(1 + \|x\|)(1 + \|y\|)} + \dfrac{\|(x - y)\times\|y\| + (\|y\| - \|x\|)\times y\|}{(1 + \|x\|)(1 + \|y\|)}$ (on ajoute et on retranche $y\times\|y\|$).
D'où $\|f(x) - f(y)\| \leqslant \frac{\|x-y\|\times(1+2\|y\|)}{(1+\|x\|)(1+\|y\|)}$ (1)
Et donc, $\|f(x)-f(y)\| \leqslant 2\|x-y\|$, donc f est lipschitzienne et son plus petit rapport de Lipschitz est plus petit que 2.
Mais comment avoir une idée de la valeur de ce plus petit rapport ? A moins d'avoir l'inspiration divine (mais où étais-tu Jean ?), Franchini me conseille de me placer sur $\mathbb{R}$.
On pose $g(x) = \dfrac{x}{1 + |x|}$ qui est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (car en 0, $g \sim x$). On cherche alors le sup de la dérivée sur $\mathbb{R}^+$ (ça suffit car g est paire) et on trouve 1. Ce plus petit rapport de Lipschitz vaudrait donc 1... Reste plus qu'à le montrer !
On reprend l'inégalité (1). On avait "avantagé" y en ajoutant et retranchant $y\times\|y\|$.
On refait la même chose en "avantageant" x.
On obtient $\|f(x) - f(y)\| \leqslant \frac{\|x-y\|\times(1+2\|x\|)}{(1+\|x\|)(1+\|y\|)}$ (2)
D'où $\|f(x) - f(y)\| \leqslant \frac{\|x-y\|\times(1+\|x\|+\|y\|)}{(1+\|x\|)(1+\|y\|)}$ ((1)+(2))/2
Et donc, en développant le dénominateur, $\|f(x) - f(y)\| \leqslant 1\times\|x - y\|$
Inversement, il reste à trouver des éléments pour lesquels cette valeur est atteinte.
On se place sur une droite vectorielle. Elle est isomorphe à $\mathbb{R}$ et donc d'après ce qu'on a vu juste avant c'est bon !

(2) Bon on réfléchit 2 secondes et on se rend compte que toutes les fonctions affines marchent. On va alors montrer que l'ensemble des fonctions solutions est $\{f(x) = \lambda x, \lambda \in \mathbb{R}\}$.
Mais ce λ nous pose quand même problème. Donc on prend $g(x) = \frac{f(x)}{x}$.
g est continue sur $\mathbb{R}$, $g(0) = f'(0)$.
On a la relation $g(2x) = g(x)$ d'où par récurrence, $g(x) = g(2^{-n}x)$.
On passe à la limite quand $n \mapsto +\infty$ et, comme g est continue, on trouve $g(x) = g(0) = f'(0)$.
D'où le résultat attendu (on a même $\lambda = f'(0)$ ce qui est assez logique pour une fonction affine).

Solution 4.1.13 (Guillem Cazassus) Note : 19

Examinateur : M. Franchini, sympa, donne des exos intéressants.Apparemment c'est le colleur de centrale sur lequel il faut tomber ! Il met des fois un petit moment avant de comprendre ce qu'on fait : je vous conseille de bien manucurer votre rédaction.

(1) En fait K est un hypercube (ou la boule unité pour la norme infinie) et S désigne l'ensemble de ses sommets. On s'intéressent aux isométries qui le conservent.

a) On montre que c'est un sous-groupe de $O(E)$:si $\bullet\mathcal{O}$ est non-vide (à ne pas oublier comme moi !) $\bullet$ Si $u, v \in \mathcal{O}$, alors $uv^{-1} \in O(E)$ et $uv^{-1}(K) = K$.

b) On utilise le fait que, comme en dimension 2 ou 3, les sommets de K sont les points les plus éloignés du centre (à distance $\sqrt{n}$) : en effet si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in K, \|x\| = \sqrt{n}$ entraîne nécessairement $|x_i| = 1$.
Soit donc un sommet x, étant donné que $u(x) \in K$ et $\|u(x)\| = \|x\| = \sqrt{n}$, $u(x) \in S$, donc $u(S) \subset S$, de plus u est bijective et S est un ensemble fini donc $u(S) = S$.

c) Après les sommets, on montre que u conserve les centres des faces.
Soit $y = u(e_i) = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$, $\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 1$.
Supposons par malheur qu'au moins deux composantes y_i soient non-nulles, alors $\forall i$, $|y_i| < 1$ d'où $\|y\|_\infty < 1$, alors $\frac{y}{\|y\|_\infty} \in K$ et $u^{-1}(\frac{y}{\|y\|_\infty}) = \frac{e_i}{\|y\|_\infty} \notin K$: contradiction.

d) L'application qui à i associe j est bijective car u doit être injective donc $\exists \sigma \in \mathcal{S}_n$: $u(e_i) = \epsilon_i e_{\sigma(i)}$.
En ayant préalablement vérifié que toute application de cette forme est dans $\mathcal{O}$, on a établi une bijection entre $\mathcal{O}$ et $\mathcal{S}_n \times \{-1, 1\}^n$ d'où $\mathrm{Card}(\mathcal{O}) = n! \times 2^n$.

(2) Supposons qu'on a un p qui vérifie l'égalité. On se place dans une base adaptée à p, de sorte que $Mat(p) = J_r$ pis en écrivant $Mat(M)$ par blocs (quelqu'un sait comment on fait les matrices ? ? ?) on s'aperçoit que $u^2 = 0$.
Réciproquement si $u^2 = 0$, tout projecteur parallèle à $\mathrm{Ker}\, u$ convient.

(3) Soit λ une vap (complexe) de M. L'ensemble I des polynômes rationnels qui ont λ pour racine forme un idéal de $\mathbb{Q}[X]$. Or $\mathbb{Q}[X]$, doté d'une division euclidienne, est un anneau principal donc $I = A.\mathbb{Q}[X]$. De plus A est nécessairement irréductible (sinon un de ses diviseur qui admet λ pour racine n'est pas dans l'idéal) donc $K = P$. Or le polynôme minimal de M est dans I donc P le divise.

Solution 4.1.14 (Yoann Roques) Note : 14

Examinateur : Mme Pagès pas très sympa et en plus elle me donne une sord avec des surfaces. Ben on commence par dire que ce sont deux paraboloïdes elliptiques symétriques par rapport au plan xOy et ensuite on cherche $f : t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ qui vérifie toutes les conditions (contenu dans la 1ère surface, on calcule la tangente qui doit être incluse dans un plan tangent de S et de S'). C'est du calcul bourrin.
En ce qui concerne la solution je ne vais pas détailler les calculs mais en tout cas les éléments que j'ai écrit doivent permettre de résoudre. (Mais c'est du calcul vraiment bourrin à la fin de la planche je n'avais pas terminé).

Solution 4.1.15 (Benjamin Sabbah) Note : 19

Examinateur : ?

(1) Dans (e_i) b.o.n. adaptée à S, $\mathrm{Tr}(OS) = \sum(e_i, OS(e_i)) = \sum \lambda_i \leqslant \sum \lambda_i = \mathrm{Tr}(S)$ (Cauchy-Schwarz).
Égalité dans Cauchy-Schwarz : $\lambda_i = 0$ ou $e_i = O(e_i)$

$$|S - O'|^2 = \mathrm{Tr}((S - O')^{\mathrm{T}}(S - O')) = |S|^2 + n^2 - 2\,\mathrm{Tr}(O'S)$$
$$\geqslant |S|^2 + n^2 - 2\,\mathrm{Tr}(OS) = |S|^2 + n^2 - 2\,\mathrm{Tr}(S)$$

d'où minimum en O.
Si S définie positive : $O = \mathrm{Id}$.

(2) – On suppose qu'il existe (A, B) libre :
$P(x) = \det(A + xB) = \det(B)\det(AB^{-1} + x\,\mathrm{Id})$ or $\det(AB^{-1} + x\,\mathrm{Id})$ admet une

racine ... contradiction, donc la dimension maximale est 1 (les espaces maximaux sont alors les $\mathrm{Vect}(P)$ avec P inversible !).

– Même chose dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:
$\det(AB^{-1} + x\,\mathrm{Id})$ est de degré 3 donc il admet une racine réelle.

– Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: ça se complique
Montrons alors qu'il ne peut y avoir d'espace de dimension 3 :
soit $ax + by + cz + dt = 0$ l'équation de cet hyperplan hypothétique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (les matrices de cet hyperplan s'écrivant $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$).
Supposons $a \neq 0$ (par exemple) : $M = \begin{pmatrix} 1 & -b/a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ appartient à ce plan et $\det(M) = 0$ contradiction. Les sous-espaces en question sont donc de dimension $\leqslant 2$.
Si AB^{-1} a 2 racines complexes conjuguées, alors $\mathrm{Vect}(A, B)$ convient sinon, $\mathrm{Vect}(A, B)$ ne convient pas.

Solution 4.1.16 (Sarah Diot-Girard) Note : 8
Examinateur : Mr Franchini

(1) Il suffit de faire une I.P.P. :

$$\int_a^b p(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \left[p(x)\frac{-\cos nx}{n}\right]_a^b + \frac{1}{n}\int_a^b p'(x)\cos nx\,\mathrm{d}x.$$

$\left|\left[p(x)\frac{-\cos nx}{n}\right]_a^b\right| = \left|\frac{p(a)\cos na - p(b)\cos nb}{n}\right| \leqslant \frac{|p(a)| + |p(b)|}{n} \to 0$ et
$\left|\frac{1}{n}\int_a^b p'(x)\cos nx\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{n}\int_a^b |p'(x)|\,\mathrm{d}x \to 0.$

Conclusion : $\lim_n \int_a^b p(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = 0$.

Ensuite, on utilise Weierstrass, on justifie l'interversion des limites (sans oublier d'hypothèses), et ça tombe.
En effet, sur $[a, b]$, toute fonction continue est limite uniforme d'une suite de polynômes. Soit (p_k) une suite convergeant uniformément vers p une fonction continue. Soit $\varepsilon > 0$, on choisit k pour que $\|p - p_k\|_\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ puis N tel que $n \geqslant N$ entraîne $\left|\int_a^b p(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ alors, pour $n \geqslant N$

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b p(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\right| &\leqslant \left|\int_a^b (p(x) - p_k(x))\sin nx\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_a^b p_k(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\right| \\ &\leqslant \int_a^b |p(x) - p_k(x)|\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon.\end{aligned}$$

Conclusion : pour toute fonction continue, on a $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b p(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = 0$.

(2) On distingue les cas :

– Si $0 \notin [a, b]$ alors $\frac{f(x)}{x}$ est une fonction continue, la question précédente s'applique donc $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \frac{f(x)}{x}\sin nx\,\mathrm{d}x = 0$.

– Si $a = 0$, étudions le cas où f est dérivable en 0. $\dfrac{f(x) - f(0)}{x}$ est continue et la question précédente s'applique encore donc

$$\int_0^b \frac{f(x)}{x} \sin nx \, \mathrm{d}x = \underbrace{\int_0^b \frac{f(x) - f(0)}{x} \sin nx \, \mathrm{d}x}_{\to 0} + f(0) \int_0^b \frac{\sin nx}{x} \, \mathrm{d}x.$$

On fait le changement de variable $u = nx$ dans la deuxième intégrale or on a $J_n = f(0) \displaystyle\int_0^{nb} \frac{\sin u}{u} \, \mathrm{d}u \to f(0)\frac{\pi}{2}$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^b \frac{f(x)}{x} \sin nx \, \mathrm{d}x = f(0)\frac{\pi}{2}$.
Si on ne suppose que la continuité il y a un petit problème...

– Si $b = 0$, on reprend le cas f dérivable en 0, cette fois-ci, on change de signe et on trouve $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^0 \frac{f(x)}{x} \sin nx \, \mathrm{d}x = -f(0)\frac{\pi}{2}$.

– Si $0 \in]a, b[$ alors les deux limites ci-dessus se compensent et on obtient $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \frac{f(x)}{x} \sin nx \, \mathrm{d}x = 0$.

Solution 4.1.17 (Mickael Camus) Note : 14
Examinateur : super sympa, aide quand il le faut et souhaite bonne continuation !

(1)

Solution 4.1.18 (Laure Leroy) Note : 9
Examinateur : Mme Joly.
Indication pour la 1) : Je n'ai rien trouvé pendant la préparation, elle me dit en arrivant d'introduire la fonction paire dont la restriction à $[0, \pi]$ est $f(x) = \cos(iax)$ (comment aurais je dû y penser ? ?)

(1)

Solution 4.1.19 (Vincent Belz) Note : 18
Examinateur : sympa,à un peu du mal à suivre, il redemande des explications mais quand on lui détail un peu plus il dit ok et n'est pas trop pointilleux.
30 min de préparation sur un grand classique, j'avais fini au bout de 10 min et j'ai attendu patiemment.

(1) a) Par l'absurde : soit X un vecteur non nul tel que $AX = 0$ et $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $|x_{i_0}| = \max\limits_{i\in[\![1,n]\!]} |x_i|$. Quitte à prendre $-X$ à la place de X, on peut supposer que $x_{i_0} > 0$ (non nul car $X \neq 0$). On a alors

$$\begin{aligned} a_{i_0 i_0} x_{i_0} &= -\sum_{j\neq i_0} a_{i_0 j} x_j \\ &\leqslant \sum_{j\neq i_0} |a_{i_0 j}|.|x_j| \\ &\leqslant \sum_{j\neq i_0} |a_{i_0 j}|.|x_{i_0}| \end{aligned}$$

ce qui amène à une contradiction en divisant par $x_{i_0} > 0$.

b) (i) On écrit.

(ii) On prend un vecteur propre avec que des 1.

(iii) $A - xI_n$ n'est pas inversible et on nie a) pour cette matrice.

(iv) Avec la trigonalisation ça tombe.

(2) a) Noyau d'une forme linéaire donc ev de dimension n, il suffit de trouver une base. On trouve par des I.P.P. et récurrence une base de la forme $x^2 - 2\pi x$,

En effet, en posant $\varphi(X) = \displaystyle\int_0^{2\pi} t^k \sin t \,\mathrm{d}t$, on a pour $k \geqslant 2$

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} t^k \sin t \,\mathrm{d}t &= \left[-t^k \cos t\right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} kt^{k-1} \cos t \,\mathrm{d}t \\ &= -(2\pi)^k + \left[kt^{k-1} \sin t\right]_0^{2\pi} - k(k-1) \int_0^{2\pi} t^{k-2} \sin t \,\mathrm{d}t \\ &= (2\pi)^{k-1}\varphi(X) - k(k-1)\varphi(X^{k-2})\end{aligned}$$

soit $\varphi\left(X^k + k(k-1)X^{k-2} - (2\pi)^{k-1}X\right) = 0$. On obtient ainsi $n-1$ polynômes de degrés étagés et, en rajoutant 1, on arrive à une base du noyau de φ.

b) Isomorphe à un $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ donc c'est un groupe cyclique.
Soit $A = (a^k)$ et $B = (b^h)$, on pose $H = \{h \in \mathbb{Z} \mid b^h \in A\}$. H est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$, de la forme $p\mathbb{Z}$. Soit $C = (b^p)$ alors $C \subset B$ et, par définition, $C \subset A$ donc $C \subset A \cap B$.
Si $c \in A \cap B$ alors $c = b^h$ avec $h \in H$ donc $c \in C$ ce qui prouve l'égalité et ainsi C est cyclique.

Solution 4.1.20 (Delong Zhou) Note : 19
Examinateur : M. Franchini, il était bien sympa et gentil.

(1) a) Soit A_1 est d'ordre r. Soit $C_r \in \mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{R})$. A_1 est réelle symétrique parce que A l'est. Montrons que A_1 est définie et positive :
$C_r^{\mathrm{T}} A_1 C_r = (C_r^{\mathrm{T}} 0)A(C_r^{\mathrm{T}} 0)^{\mathrm{T}} = 0$ et > 0 si $C_r \neq 0$. Ainsi A_1 est réelle symétrique définie et positive. De même pour A_2.

b) Les A_i sont réelles symétriques définies et positives donc diagonalisable dans une B.O.N. avec les valeurs propres strictement positives. Soit λ_i les vap de A_i pour $i \in [\![1, r]\!]$ et celles de A_2 pour $i \in [\![r+1, n]\!]$.
Soient U et V deux matrices orthogonales telle que $A_1 = U \operatorname{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)U^{\mathrm{T}}$ et $A_2 = V \operatorname{Diag}(\lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_n)V^{\mathrm{T}}$. Alors $A = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix} A' \begin{pmatrix} U^{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & V^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$. En notant
$A' = \begin{pmatrix} \operatorname{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) & U^{\mathrm{T}} B V^{\mathrm{T}} \\ U B^{\mathrm{T}} V & \operatorname{Diag}(\lambda r+1, \ldots, \lambda_n) \end{pmatrix}$.
A' est encore une matrice réelle symétrique définie et positive donc diagonalisable dans une B.O.N : $A' = P \operatorname{Diag}(\lambda'_1, \ldots, \lambda'_r)P^{\mathrm{T}}$. P étant une matrice orthogonale.
Avec un peu de calcul on trouve $a'_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{n} p_{i,k} p_{j,k} \lambda'_k$ et en particulier sur la diagonale on a : $\lambda_i = \sum\limits_{k=1}^{n} p_{i,k}^2 \lambda'_k$.
La fonction $f(x) = \ln x$ est une fonction concave donc on a l'inégalité de Jensen :

$$\ln(\lambda_i) \leqslant \sum_{k=1}^{n} p_{i,k}^2 \ln(\lambda'_k).$$

En sommant sur i on trouve $\sum_{i=1}^{n} \ln(\lambda_i) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \ln(\lambda'_k)$ sachant que la matrice P est orthogonale donc $\sum_{i=1}^{n} p_{i,k}^2 = 1$.

Ainsi on peut conclure : $\det A = \prod_{k=1}^{n} \lambda'_k \leqslant \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \det A_1 \det A_2$.

Commentaire : j'ai eu un exo en colle avec Jimmy qui ressemble un peu à celui-ci : montrer que le det d'une matrice réelle symétrique est inférieur au produit des coeff. sur la diagonale. Cette propriété est en fait une généralisation de la question b) qui nous permet de montrer que le det d'une matrice réelle est inférieur au produit des normes deux de ces colonnes ou de ces lignes. J'ai séché avec Jimmy sur son exo et il m'a proposé une méthode qui me permet de torcher l'exo. Merci Jimmy !

(2) A et B commutent donc on peut calculer facilement les puissances de M : $M_k = \begin{pmatrix} A^k & kA^{k-1}B \\ 0 & A^k \end{pmatrix}$. Donc pour un polynôme P, on a $P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & P'(A)B \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}$.
M diagonalisable si et seulement s'il existe un polynôme sur $\mathbb{K}$ scindé et à racines simples tel que $P(M) = 0$. Ainsi $P(A) = 0$ et $P'(A)B = 0$.
La première relation nous donne directement A diagonalisable. P est scindé et à racine simple donc P et P' sont premiers entre eux :
il existe U et V deux polynômes tels que $UP+VP' = 1$, donc $U(A)P(A)+V(A)P'(A) = I_n$. Or $P(A) = 0$ donc $V(A)P'(A) = I_n$ qui nous permet de dire que $P'(A)$ est inversible.
Ainsi la matrice B est nulle d 'après la relation $P'(A)B = 0$.
Donc on trouve une condition nécessaire : A diagonalisable et B nulle.
Le sens inverse est immédiat.
Commentaire : étant donné $AB = BA$, il faut penser à calculer les puissances de M. Dans $\mathbb{R}$ les racines de P' sont comprises entre celles de P, sur $\mathbb{C}$ elle sont comprises dans l'enveloppe convexe de celles de P, mais dans tous les cas les deux polynômes sont premiers entre eux.

Solution 4.1.21 (Arnaud Galimberti) Note : 15
Examinateur : Mr Franchini

(1)

Solution 4.1.22 (Cyprien Rafaï) Note : 12
Examinateur : Madame Pagès.
Une vraie ordure : au cours de la colle, oscillait entre le désintérêt le plus complet, et l'agressivité gratuite... Elle avait démoli le pauvre gars avant moi, commençant à l'engueuler à la première intervention... Et ça a été pareil avec moi, avec des dialogues dans le genre :
"et maintenant on va montrer que..."
"ce n'est pas une démonstration"
Résultat alors que l'exo était assez débile, j'ai pas eu le temps de finir de lui exposer...
Rako, m'a dit après coup qu'elle mettait tout le temps 12, que c'était une pourriture (citation du parrain de mu0 qui l'avait eu en 3/2 et en 5/2), et que c'était elle qui avait posé l'inoubliable Math1 Centrale 2007
Solution : Par analyse/synthèse, tout du long, on trouve une relation de récurrence (c'est toujours la même, ou presque) et les conditions tombent toutes seules...
Par exemple pour le 1) il faut qu'à partir d'un certain rang on ait $a_n = 0$, ce qui donne $c = -p(p+1)$, avec p entier... Bref rien de bien passionnant.

Solution 4.1.23 (Nicolas Le Moigne) Note : 18
Examinateur : vraiment gentille elle a rigolé quand elle a entendu le candidat suivant qui s'entraînait à répéter à haute voix le début de sa colle. Sinon l'exo est quand même pas dur mais alors... surpénible.

(1) Pénible, par récurrence (on s'en doutait pas trop....)
(2) Re-pénible : j'ai utilisé le DSE de cos et interversion série-int. Elle m'a dit ok mais on aurait pu utiliser 1).... effectivement mais je trouvais ça encore plus pénible.
(3) TVI : une borne est facile à majorer ou minorer je ne m'en souviens plus (par du moins ou du plus) l'autre je lui ai dit que pour moi le plus simple était encore de majorer/minorer finement le cos (par les premiers termes du DL). J'ai commencé lors de la préparation mais c'est fastidieux et je ne sais pas si ça marche vraiment : d'après elle oui. Mais elle me disait de bricoler jusqu'au sin (sans pour autant me le montrer)...

Solution 4.1.24 (Maxime Chammas) Note : 13
Examinateur : Mr Vallaeys, sympa, pédagogue, son exo n'est pas super dur, plutôt classique.

(1) a) Si $\varphi \in \mathrm{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_k)$ alors $\varphi = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i\varphi_i$ d'où, si $x \in \bigcap\limits_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}\,\varphi_i$ alors $\varphi(x) = 0$. On a bien l'inclusion $\bigcap\limits_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}\,\varphi_i \subset \mathrm{Ker}\,\varphi$.

Réciproquement : si $\bigcap\limits_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}\,\varphi_i \subset \mathrm{Ker}\,\varphi$, on extrait une famille libre de r formes linéaires de la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_k)$. On peut supposer, après renumérotation, que $(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$ est libre. On remarque alors que $\bigcap\limits_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}\,\varphi_i = \bigcap\limits_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}\,\varphi_i$:

en effet $\bigcap\limits_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}\,\varphi_i \subset \bigcap\limits_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}\,\varphi_i$ de manière évidente, puis, vu la question précédente, $\bigcap\limits_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}\,\varphi_i \subset \mathrm{Ker}\,\varphi_{r+j}$ pour $j \in [\![1, k-r]\!]$ donne l'inclusion dans l'autre sens.

On complète alors la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$ pour avoir une base puis on prend la base antéduale $(e_1, \dots, e_n)$ (c'est la démonstration du cours). $\varphi \in \mathrm{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_r) \Leftrightarrow \varphi(e_i) = 0$ pour $i \geqslant r+1$ d'où $\bigcap\limits_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}\,\varphi_i \subset \mathrm{Ker}\,\varphi$.

b) On utilise alors le corollaire 2.12 pour conclure $\dim \bigcap\limits_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}\,\varphi_i = n - r$.

c) Cf. le théorème 2.9.

d) Soit $(e_1, \dots, e_r)$ une base de F complétée en $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E, $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ sa base duale. On a $x \in F \Leftrightarrow \forall j \in [\![1, n-r]\!],\ \varphi_{r+j}(x) = 0$ donc $F = \bigcap\limits_{j=1}^{n-r} \mathrm{Ker}\,\varphi_{r+j}$.

(2) $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ est inversible ssi ses vecteurs colonnes forment une famille libre. Il suffit donc de dénombrer le nombre de familles libres de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$:
– On a $p^n - 1$ familles libres à un élément ($= \mathrm{Card}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{0\})$.

– Si (x_1, x_2) est une famille libre, on a $p^n - 1$ choix pour x_1 et $p^n - p$ choix pour x_2 (x_2 ne doit pas appartenir à la droite vectorielle engendrée par x_1).
– Par récurrence sur k, on suppose que l'on a $(p^n - 1)(p^n - p)(\dots)(p^n - p^{k-1})$ familles libres à k éléments. Soit $(x_1, \dots, x_{k+1})$ une famille libre de $k+1$ vecteurs. Pour le $k+1$-ième vecteur il faudra choisir un vecteur n'appartenant pas à $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_k)$. Or $\mathrm{Card}\,\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_k) = p^k$ ce qui permet d'achever la récurrence.

Conclusion : on a $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \left(p^n - p^k\right)$ matrices inversibles dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.

Matrices diagonalisables :
– $n = 2$: on a en tout p^2 matrices diagonales distinctes. Parmi ces matrices, p sont scalaires, les autres pouvant se regrouper deux par deux en fonction de leurs valeurs propres...

Solution 4.2.1 (Marc Houllier) Note : 19
Examinateur : sympathique, qui vous laisse ne pas terminer les calculs.

(1) norme infinie : on majore brutalement, puis on prend f constante : la norme vaut $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t+t^2}\,\mathrm{d}t$ (il m'a épargné le calcul.)
norme 1 : on minore le dénominateur, puis on pose $f_n(t) = \mathrm{e}^{-nt}(1+t+t^2)$ pour trouver que la norme vaut 1.
norme 2 : on Cauchy-schwartze , puis on prend $f(t) = \frac{1}{1+t+t^2}$ pour trouver que la norme est la norme 2 de la fonction f ainsi définie.
(2) On cherche une série qui ne converge pas normalement : celle des $\frac{\sin(nt)}{n}$ convient.
(3) On écrit que en fait c'est la série des $\dfrac{1 + j^n + \overline{j}^n}{3(n!)}$ et on reconnaît les exponentielles.
(4) Avec deux points fixés, pour maximiser base*hauteur, le troisième point doit être sur la médiatrice. Comme c'est vrai pour les trois cotés, le triangle est équilatéral.
(5) On réécrit le terme $n^{-\ln(\ln n)}$ et avec les séries de Riemann, ça converge.
(6) Là c'est une simple application de la formule avec les champs $(-y, x)$ ou $(y, 0)$ ou $(0, x)$ selon votre humeur.

Solution 4.2.2 (David Fourquet) Note : 7
Examinateur : ?

Solution 4.2.3 (Marc Houllier) Note : 20
Examinateur : muet, il faut dire qu'il n'y avait pas beaucoup de commentaires à faire ...

(1) Les formes linéaires $\varphi_a \;: P \mapsto P(a)$, $\varphi_b \;: P \mapsto P(b)$ $\varphi_c \;: P \mapsto P(c)$ forment une base de l'espace dual $\mathbb{R}_2[X]^*$ donc la forme linéaire $P \mapsto \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{P(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ s'exprime de manière unique dans cette base.
(2) On connaît ce polynôme, il s'agit de $Q(X) = 4X^3 - 3X$.
(3) On prend $a = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{5\pi}{6}$, $b = 0 = \cos\frac{\pi}{2}$ et $c = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6}$. On cherche alors λ, μ et ν pour que
$$\int_0^\pi P(\cos u)\,\mathrm{d}u = \lambda P(\cos\frac{5\pi}{6}) + \mu P(0) + \nu P(\cos\frac{\pi}{6}.$$

On prend alors $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et $T_2 = X^2 - 1$ pour trouver $\lambda = \mu = \nu = \dfrac{\pi}{3}$.
La relation est évidemment valable pour Q car Q est impaire (donc son intégrale est nulle) et $Q(a) = Q(b) = Q(c) = 0$ ($Q = T_3$).
Si $n = 4$, on prend le polynôme T_4 défini par $T_4(\cos x) = \cos 4x$ et $T_5(\cos x) = \cos 5x$ pour $n = 5$ (il y a du Tche dans l'air). On trouve 0 de part et d'autre. Comme la famille est étagée, on obtient une base de $\mathbb{R}_5[X]$. La relation est donc vraie pour tout polynôme de degré $\leqslant 5$.

(4) On écrit P dans la base des polynômes de Tchebichef :

$$P(x) = \frac{1}{4}T_4(x) + aT_2(x) + bT_1(x) + c.$$

Or, les polynômes T_i forment une base orthogonale pour le produit scalaire $(P|Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ donc

$$\int_{-1}^{1} \frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{16}\|T_3\|^2 + a^2\|T_2\|^2 + b^2\|T_1\|^2 + c^2\|T_0\|^2.$$

Le minimum est atteint pour $P = T_3$ et il vaut $\dfrac{\pi}{32}$.
Montrer que ce minimum existe revient à chercher la projection de X^3 sur le sous-espace vectoriel engendré par $(1, X, X^2)$ ce qui est immédiat.

Solution 4.2.4 (Jean Baptiste Denat) Note : 13
Examinateur : ?

(1)

Solution 4.2.5 (Joseph Feneuil) Note : 10
Examinateur : ?

Solution 4.2.6 (Bastien Mallein) Note : 16
Examinateur : ?

Solution 4.2.7 (Laetitia Leduc) Note : 19
Examinateur : ?

(1)

Solution 4.2.8 (Vincent Pécastaing) Note : 11
Examinateur : useless, à l'image de son exo, j'ai hésité à poster dans le forum du même nom. Il passe l'heure à faire des "moui", "bien", "d'accord", "soit" (il a fait pareil avec celui qui était avant moi alors qu'il séchait et qu'il sortait des vannes...)

Solution 4.2.9 (Guillaume De Paepe) Note : 12
Examinateur : M. Dugardin sympa, t'aide quand tu fougères sur les intégrales doubles (et c'était pas de trop).

(1) On dit que le terme général est un $O(1/n^3)$ et on est content.
Ensuite, les théorèmes généraux montrent que $4n+3 = (2n+1)+(2n+2)$ alors écrit que le terme général s'écrit : $(a-b)(a+b)$ avec $a = 1/(2n+1)$ et $b = 1/(2n+2)$ et on utilise que la somme des $1/n^2$ vaut $\pi^2/6$ et on trouve $\pi^2/DOUZE$.
(Après faut vérifier avec Maple que c'est bien ça.)

(2) Pourtant, j'avais été attentif en TD Jimmy...
Donc, on dit que $f(x,.)$ est intégrable pour tout x dans $]0,1[$ et $g : x \mapsto \int(f(x,y)\,\mathrm{d}y)$ est continue (à grands coups de théorème de continuité sous le signe intégral) et intégrable (se rappeler que la fonction est positive).
Il y a une indication dans l'énoncé : faire apparaître une série en fait $1/(1-x^2y^2)$ est la somme de la série géométrique de terme général $(x^2y^2)^n$ alors (en utilisant Maple pour les calculs pénibles) on applique les théorèmes du cours (genre interversion série/intégrale) pour calculer l'intégrale double.
voili voilou...... se rappeler de se placer sur un segment de $]0,1[$ pour appliquer le th de continuité sous l'intégrale et sinon, ça devrait le faire
Ah oui... à la fin faut vérifier avec Maple que c'est bien ça (on vous dit quelle commande et quel package utiliser).

Solution 4.2.10 (Firas Chaari) Note : 14
Examinateur : Mr. DUGARDIN

(1)

Solution 4.2.11 (L. Yellés) Note : 11
Examinateur : Mr Jacubowicks. Mange une pomme durant toute la colle, pas très souriant, tout comme son exo !
En gros ça revenait à voir que $\sin(\theta)$ et $\sin(2\theta)$ sont vap.
Visiblement, l'énoncé est faux. MAPLE donne comme valeurs propres les quantités $-\sin\theta$, $\dfrac{1+\sqrt{1+16\cos\theta}}{2}\sin\theta$ et $\dfrac{1-\sqrt{1+16\cos\theta}}{2}\sin\theta$ comme valeurs propres.

Solution 4.2.12 (Benjamin Thorent) Note : 9
Examinateur : Une seule chose : c'est un fanatique du MAPLE ! ! ! ! ! ! ! pour de vrai ! ! ! ! ! ! !
Indication : $P(A)$ peut s'écrire comme un polynôme en A de degré au plus 2 puis CALCUL puis MAPLE... Le bonheur en comprimé quoi ! ! ! ! ! ! ! ! ! !

Solution 4.2.13 (Denis Lafarge) Note : 9
Examinateur : préfère noter ce qui est écrit au tableau plutôt que d'écouter. Ce type est incapable de tout mouvement, il n'ouvre pas la bouche de toute la planche même pas pour dire le "au revoir" de politesse... A l'image de l'examinateur l'exercice est tout à fait passionnant :

(1)

Solution 4.2.14 (Jean Baptiste Peyrat) Note : 19
Examinateur : M. Rouff : pas vraiment sympa mais 19 alors je vais pas me plaindre.

(1) a) (i) Notons $B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \cdots & \cdots & A_{(n-1)1} & A_{n1} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \cdots & \cdots & A_{n(n-1)} & A_{nn} \end{pmatrix}$ (je crois que je n'ai jamais autant apprécié le Copier-Coller).

Calculons $\det(AB)$ de deux manières :

$\det(AB) = \det A \times \det B$, soit $\det(AB) = (A_{1,1}A_{n,n} - A_{1,n}A_{n,1}) \times \det A$.

Calculons le produit AB (youpi une autre énorme matrice à écrire...) $AB = \begin{pmatrix} \det A & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \det A \end{pmatrix}$

Je sens que vous allez me croire sur parole, mais je justifie quand même un peu :

Pour la case en haut à case et en bas à droite, on trouve $\sum_{i=1}^{n} a_{i1}A_{i1}$ et $\sum_{i=1}^{n} a_{i_n}A_{i_n}$ ce qui correspond au développement par rapport à la première et à la dernière colonne du déterminant de la matrice A, d'où $\det A$.

Pour les autres 0, prenons par exemple celui de la première ligne juste à droite de $\det A$.

Le calcul donne $\sum_{i=1}^{n} a_{i2}A_{i1}$ ce qui correspond au développement par rapport à la première colonne du déterminant d'une matrice dont la première colonne est composée des a_{i2} et dont les autres colonnes sont les mêmes que celles de A. En particulier, sur la deuxième colonne on aura les a_{i2}. Oh, deux colonnes identiques ! D'où les 0 sur la première et la dernière ligne.

Bon on finit le calcul de $\det(AB)$, on simplifie par $\det A$ car A est inversible et hop on a $\det[(a_{ij})_{2\leqslant i,j\leqslant n-1}] \times \det(A) = A_{1,1}A_{n,n} - A_{1,n}A_{n,1}$.

(ii) On utilise la densité de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On prend (z_k) une suite de complexe qui tend vers 0 et telle que $A_k = A - z_kI_n$ soit inversible. On fait tendre k vers l'infini et d'après la continuité du déterminant, tout va bien !

On a donc établi le résultat pour A non inversible.

b) (i) Enfin du Maple ! Ça nous manquait : (ça c'est du Maple V, mais à Centrale j'avais le choix entre Maple VII et Maple IX)

```
Fibonacci :
Fibo:=proc(n)
option remember;
if n=0 then 0
else if n=1 then 1
else Fibo(n-1)+Fibo(n-2); fi; fi;
end;
```

Calcul des déterminants :

```
with(linalg):
```

```
Determ:=proc(n)
local f,A;
f := (i,j) -> Fibo(abs(i-j)):
det(matrix(n,n,f));
end;
```

Bon on est tout content, on fait tourner Maple et on obtient :

```
[n = 1, 0]
[n = 2, -1]
[n = 3, 2]
[n = 4, -4]
[n = 5, 8]
[n = 6, -16]
[n = 7, 32]
[n = 8, -64]
[n = 9, 128]
[n = 10, -256]
[n = 11, 512]
[n = 12, -1024]
[n = 13, 2048]
[n = 14, -4096]
[n = 15, 8192]
[n = 16, -16384]
[n = 17, 32768]
[n = 18, -65536]
[n = 19, 131072]
[n = 20, -262144]
```

(ii) On regarde toutes les valeurs précédentes droit dans les yeux, on fait gaffe aux indices puis on affirme froidement $D_n = (-1)^{n+1} * 2^{n-2}$, pour $n \geqslant 2$.
On fait une petite récurrence double.
Bon pour l'initialisation, je pense que 20 valeurs vont suffire...
Soit $A = (F_{|i-j|})_{1\leqslant i,j\leqslant n+1}$, on a $\det[(a_{ij})_{2\leqslant i,j\leqslant n-1}]\times D_{n+1} = A_{1,1}A_{n+1,n+1} - A_{1,n+1}A_{n+1,1}$ avec $\det[(a_{ij})_{2\leqslant i,j\leqslant n-1}] = D_{n-1}$, $A_{1,1} = D_n = A_{n,n}$ et $A_{1,n+1} = 0$ on fait quelques opérations sur les colonnes pour réussir à avoir une colonne de 0 (faut bien se servir un jour de la suite de Fibonacci...)
Bon, on finit le calcul et hop on a le résultat voulu !

c) On cherche déjà le polynôme caractéristique.

```
with(linalg);
charpoly(matrix([[0,0,0,0,0,f],[0,0,0,0,e,0],[0,0,0,d,0,0],
[0,0,c,0,0,0],[0,b,0,0,0,0],[a,0,0,0,0,0]]),x);
```

On trouve $(x^2 - dc)\times(x^2 - eb)\times(x^2 - fa)$.
Une condition suffisante est donc qu'ils soient tous non nuls et que les produits dc, eb et fa soient différents.
Par ailleurs, si on appelle $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$ la base de $\mathbb{R}^6$ alors on remarque que les sous-espaces $\mathrm{Vect}(e_1, e_6)$, $\mathrm{Vect}(e_2, e_5)$ et $\mathrm{Vect}(e_3, e_4)$ sont stables par cette matrice. Une CNS est donc que la matrice est diagonalisable dans chacun des sous-espaces.

Solution 4.2.15 (Mickael Camus) Note : 8
Examinateur : sympathique dont j'ai zappé le nom !

(1)

Solution 4.2.16 (Yoann Roques) Note : 19
Examinateur : Mr Dugardin. Assez sympa à partir du moment où j'ai trouvé la perpendiculaire commune avec une méthode à laquelle il ne s'attendait visiblement pas mais qui à mon grand étonnement faisait torcher l'exo.

(1) 1) Bon on utilise `plot3D` on observe un joli cône.

(2) Ben on a $x^2 + y^2 = m^2z^2$ (équation d'un cône).
Réciproquement en coordonnées cylindriques tout point de ce cône peut se paramétrer de la manière ci-dessus.

(3) a) C'est une génératrice.

b) On paramètre D et D_θ. $D : \begin{cases} x = p \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R},\ D_\theta : \begin{cases} x = mcos(\theta)u \\ y = msin(\theta)u \\ z = u \end{cases} \quad u \in \mathbb{R}.$

On cherche alors les paramètres (t, u) qui minimisent la distance entre les deux droites (ces deux points caractérisent la perpendiculaire commune).
Soit $\mathrm{d}(t, u) = (p - m\cos(\theta)u)^2 + (m\sin(\theta)u)^2 + (t - u)^2$. Fonction de deux variables qui doit admettre un minimum unique on calcule le gradient et on cherche des valeurs d'annulation cela nous donne un unique point tel que $\nabla d = (0, 0)$ soit $(2(t - u), -2m\cos(\theta)(p - m\cos(\theta) - 2(m\sin(\theta))^2u - 2(t - u) = (0, 0)$ soit $\begin{cases} t = u \\ u = \dfrac{p}{m}\cos(\theta) \end{cases}$ on a donc directement $I(\theta) : \begin{cases} x = p\cos^2(\theta) \\ y = p\sin(\theta)\cos(\theta) \\ z = \dfrac{p}{m}\sin(\theta) \end{cases}$. On trace alors $I(\theta)$ avec `spacecurve`. On a une jolie courbe tracée sur le cône.

c) Question Bonus. Eh bien comme ça pas évident mais si on connaît le centre $(p, 0, 0)$ alors c'est évident l'ellipsoïde d'équation $(x - p)^2 + y^2 + m^2z^2 = 2p^2$.

Solution 4.2.17 (Benjamin Sabbah) Note : 15
Examinateur : ?
Notre ami Maple nous confirme dans l'idée que la première tend vers $\sin(1) - \cos(1)$ et la seconde vers $\ln(2)$.
Pour la formalisation j'ai essayé de faire la différence avec les sommes de Riemann correspondantes, soit respectivement

$$\sum_{k \in [1,n]} \frac{k}{n} \sin(\frac{k}{n})$$

$$\sum_{k \in [0,n]} \frac{1}{1 + \frac{k}{n}}$$

après il a fallu majorer les différences avec au passage le DL de sinus.
Conclusion : un oral des plus pourris où j'aurais pu tout aussi bien avoir 5 vu que j'ai été noté sur un quart d'exo ... vive centrale.

Solution 4.2.18 (Sarah Diot-Girard) Note : 14
Examinateur : Dugardin. Ne m'a pas trop embêté sur Maple quand il a vu que je savais écrire une procédure.

(1) On utilise l'instruction solve(eqns, var) pour résoudre un système linéaire.

(2) On écrit $P(X+a) = \sum \frac{a^k}{k!} P^{(k)}(X)$, puis on considère une relation linéaire entre les $P(X+j)$. On utilise l'indépendance des $P^{(k)}$ et on obtient un système linéaire, admettant le vecteur nul pour solution triviale. Or, on a un déterminant de Vandermonde (non nul), donc c'est la seule solution.

(3) Par l'absûûûrde : si la matrice n'était pas inversible, on n'aurait pas une base.

(4) $P(i+j) = \sum \frac{i^k}{k!} P^{(k)}(j)$, donc $M = A * B$, où $A = (\frac{i^j}{j!})$ et $B = (P^{(i)}(j))$. Et puis on calcule...

Solution 4.2.19 (Cyprien Rafaï) Note : 12
Examinateur : une belle ordure à l'image de son exo,il a vanné pendant la colle et en plus il m'a mis douze, il sert vraiment à rien.

(1) On montre l'existence et on fait un changement de variable que sur la partir gauche et on obtient quelque chose de sympa du genre $\int_u^{ux^2}$ et la on utilise la formule de la moyenne (hors programme ? ?) et on trouve une limite du type $f(o)\ln(1/x^2)$.

(2) On linéarise et on montre l'existence en décomposant et en intégrant par parties. On fait un changement de variable et on se ramène au 1.

(3) On montre l'existence et on fait un changement de variable et on se ramène au 1.

Conclusion : très passionnant.....

Solution 4.2.20 (Arnaud Galimberti) Note : 15
Examinateur : Mr Fairbank

(1)

Solution 4.2.21 (Maxime Chammas) Note : 16
Examinateur : Mr Fairbanks : i.e. Mr "c'est faux".
Pour la solution, cf. exo 2.3.7 sur les séries de Fourier !
