SPÉCIALE MP* : ORAL 2009

Mis à jour le 27 juin 2010 à 15:54

Avec la contribution de

BENZAKOUR	Abdessamad
BOUKHOBZA	Ali
BOUSSARIE	Renaud
CASSOU	Thomas
DALSTEIN	Boris
DAYRENS	François
DEBETENCOURT	Alexandre
DEMARAIS	Arnaud
DONIER	Jonathan
DUPAS	Mylène
EMAKO KAZIANOU	Casimir
FLEURY	Nicolas
GOFFINON	Laurie
JAMAUX	Pierrick
JEANMOUGIN	Marc
LAIGLE	Clotilde
LALIBERTÉ	Jonathan
LI	Ming Qian
LIVERZAY	Thomas
MARTIN	Nicolas
ROCHET	Jean
SALAÜN	Yohann
THIÉBAUT	Johann-Michaël
VÉRINE	Alexandre
WASSFI	Ahmed
WATIER	Simon
WEYL	Pierre

1. Sujets posés aux Écoles Normales Supérieures à l'oral 2009

1.1. **Oral Maths Ulm.**

Exercice 1.1.1.

(1) On considère F continue avec $F(x+1) = F(x) + 2$.
Montrer qu'il existe h continue tq $h(F(x)) = 2h(x)$, $h(x+1) = h(x) + 1$.

(2) On considère E comme $\mathbb{Q}$ espace vectoriel.
T linéaire de E dans E et x, y, z des vecteurs non nuls de E tq

$$T(x) = y,\ T(y) = z,\ T(z) = x + y.$$

Montrer que la famille (x, y, z) est libre sur E comme $\mathbb{Q}$-e.v.

Exercice 1.1.2.

(1) On note $K = \{f \in \mathcal{C}^0([0;1], \mathbb{R})\ , f(0) = 0,\ f\ 1-\text{lipschitzienne}\}$. Pour $\delta > 0$ on pose $N(K, \delta)$ comme étant le nombre minimal de boules de rayon δ. recouvrant K.
Estimer $\ln(\ln(N(K, \delta)))$ pour δ petit.
Indication : le faire pour K compact d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^2$.

(2) Trouver le nombre de polynômes de degré 2 unitaires et irréductibles dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Exercice 1.1.3.
Énoncé : Le même exo qu'abdes, avec en plus la question :
Montrer qu'il n'y a pas de suite dense dans l'ensemble des fonctions continues bornées muni de la norme infinie.

Exercice 1.1.4.
Construire une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f \circ f \circ f = \mathrm{Id}$ et $f(0) = 2009$.

Exercice 1.1.5.
Soit $A : \begin{array}{ccc} [0;1] & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ t & \to & A(t) \end{array}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant :

$$\forall t \in [0;1], (A(t))^3 - 2(A(t))^2 - A(t) + 2I_n = 0.$$

Montrer qu'il existe une fonction P de $[0,1]$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant

$$P(t)A(0)P^{-1}(t) = A(t)$$

(On commencera par chercher une fonction qui ne soit pas nécessairement de classe $\mathcal{C}^1$.)

Exercice 1.1.6.
On rappelle que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \{A \in M_2(\mathbb{Z}) \mid \det A = 1\}$.
Soit $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid P_A$ scindé :
Trouver $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ qui vérifie $\forall X \in \mathbb{R}^2,\ f\left(X + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = f(AX)$.
Exo + indications
On considère les vap de A distinctes :

(1) Montrer que f est constante sur une droite vectorielle (de vecteur directeur e_1) et que $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_{\setminus\mathbb{Q}}$.

(2) Existe-t-il un réel non nul tq $ae_1 \in \mathbb{Z}^2$?

(3) On note $y = \beta x$ l'équation de la droite vectorielle menée par e_1. En déduire que β est irrationnel.

(4) Expliquer pourquoi on ramène l'étude sur un ensemble dense dans $\mathbb{R}^2$, puis dense dans $\mathbb{R}$ (étude sur $x = 0$).

(5) Conclure.
+ Cas vap égales ?

1.2. **Oral Maths Ulm-Lyon-Cachan.**

Exercice 1.2.1.
Soit $\gamma_A = AM - MA$ avec $A, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\tau_A(M) = \mathrm{Tr}(AM)$.

(1) Montrer que $\psi : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \tau_A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*$ est un isomorphisme.

(2) Soit A nilpotente, montrer que $\mathrm{Ker}(\gamma_A) \subset \mathrm{Ker}(\tau_A)$.

(3) Question généralisation :
Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(E, G) \mid \mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(v)$. Montrer que $\exists w$ tel que $v = w \circ u$.

Exercice 1.2.2.
Soit f continue de $[a, b]$ dans E evn et dérivable à droite sur $[a, b[$.
Soit g continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ et dérivable à droite sur $[a, b[$, on a de plus pour tout x de $[a, b[$, $\|f'_d(x)\| \leqslant g'_d(x)$ (où f'_d est la dérivée à droite et g'_d...).

(1) Montrer que $\|f(b) - f(a)\| \leqslant g(b) - g(a)$.

(2) On suppose de plus f'_d continue en x_0 de $[a, b]$.
Montrer que f est dérivable en x_0.

Exercice 1.2.3.
Soit p premier, supérieur à 3.

(1) Nombre de carrés dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$?

(2) Montrer que x carré ssi $x^{(p-1)/2} = 1$ (x non nul).

(3) Soit p diviseur premier de $(n!)^2 + 1$ où $n \geqslant 2$. Montrer que $p > n$ et que $p = 4k + 1$.

Exercice 1.2.4.
Pour tout couple (A, B) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, prouver l'équivalence de :
(i) $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, AM et $AM + B$ ont même polynôme caractéristique,
(ii) B est nilpotente et $BA = 0$.
(Indications : $(i) \Rightarrow (ii)$: prouver que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{Tr}(BAM) = 0$,
$(ii) \Rightarrow (i)$: changer de base et se ramener au cas où $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & B_2 \\ 0 & B_4 \end{pmatrix}$ où B_4 est triangulaire).

Exercice 1.2.5.
Soit A une matrice vérifiant $\|A - \mathrm{Id}\,\| \leqslant a < 1$.

(1) Montrer que A est inversible et que $\|A^{-1}\| \leqslant 1/(1-a)$.

(2) Soit B vérifiant $\|B - \mathrm{Id}\,\| \leqslant b < 1$.
Montrer que $\|ABA^{-1}B^{-1} - \mathrm{Id}\,\| \leqslant \dfrac{2ab}{(1-a)(1-b)}$.

(3) Montrer que, si a et b sont choisis suffisamment petits, on a
$$\|ABA^{-1}B^{-1} - I_n\| \leqslant \|A - I_n\|.$$

(4) On suppose que $a < 1/4$ et $b < 1/4$, que le groupe Gengendré par A et B est discret, non réduit à l'identité. Montrer qu'il existe un élément C de G, $C \neq I_n$, qui commute avec tous les éléments de G (on pourra chercher un élément qui minimise la distance à I_n).

Exercice 1.2.6.
Soit f de $[0,1]$ dans lui même, continue, x_0 dans $[0,1]$, $x(n+1) = f(x(n))$ et K l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(x(n))$.

(1) Montrer que K est un compact stabilisé par f.

(2) Montrer que si K est inclus dans l'ensemble des points fixes de f, alors la suite $(x(n))$ converge.

Exercice 1.2.7.
Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel et f de $\mathcal{L}(E)$. On pose g l'application linéaire définie par $g\ : x \in \mathrm{Ker}(f)^{\perp} \mapsto f(x) \in \mathrm{Im}\, f$.

(1) Montrer que g est inversible.

(2) On pose $t = \begin{cases} g^{-1} & \text{sur } \mathrm{Im}\, f \\ 0 & \text{sur } (\mathrm{Im}\, f)^{\perp} \end{cases}$.
Montrer que $f \circ t \circ f = f$ et $t \circ f \circ t = t$.

(3) On définit l'application $T\ : f \in \mathcal{L}(E) \mapsto t \in \mathcal{L}(E)$. Quel est son domaine de continuité ?

Exercice 1.2.8.

(1) on considère l'e.v.n. $\mathbb{R}^n$, avec la boule unité B. Soit (x_n) une suite de B, A l'ensemble de ses valeurs d'adhérence. On pose $\mathrm{d}(x, A)$ la distance de x à A.

a) Que peut-on dire de la suite $\mathrm{d}(x_n, A)$?
Au bout de 5 min :
- elle tend vers 0 ? (je m'étais convaincu)
- démontrez-le...
Bon, c'est parti pour 15 min là-dessus, au cours desquelles on traite le cas A fini, on démontre la continuité de $\mathrm{d}(., A)$ qui permet un passage à la limite à un moment... (qui aurait pu se justifier par une compacité comme Alex a l'air de l'avoir démontré... Il me l'a dit "en fait, A est compact, mais on peut faire sans").

b) Soit f continue de B dans B, et la suite définie par x_0 et $x_{n+1} = f(x_n)$.
On suppose A fini.
Je ne me souviens plus de l'énoncé exact, mais fallait montrer que il existe une sous suite périodique qui a une limite (je l'ai interprété comme "il existe a, b tq x_{an+b} a une limite). Et là, je lui ai montré que la période, c'est le cardinal de A, et que pour tout b, $x_{n\,\mathrm{Card}(A)+b}$ a une limite (et on les a toutes...).
Il avait l'air content et m'a dit qu'il m'avait juste demandé qu'il existait une période ...

(2) Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$, montre qu'il existe une infinité d'entier non premiers dans $P(\mathbb{Z})$.

Exercice 1.2.9.

(1) Soient A et B deux matrices carrés 2×2 complexes telles que $\mathrm{e}(A) = \mathrm{e}(B)$ et, pour tous $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, $\mu \in \mathrm{Sp}(B)$, si $\lambda - \mu = 2ik\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ alors $\lambda = \mu$. Montrer que $A = B$.

(2) Nature de la série de terme général $\frac{|\sin(n)|}{n}$ (répondre en 5 minutes)

Exercice 1.2.10.

(1) Soit x irrationnel, et $n \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe k_1 et k_2 des entiers différents dans $[0, n]$ tels que $|\{k_1 x\} - \{k_2 x\}| \leqslant 1/n$ (les accolades signifient "partie fractionnaire", ie $\{x\} = x - \mathrm{Ent}\,(x)$.

(2) Soit x réel. Montrer qu'il existe un infinité de couples (p, q) tels que $|x - \frac{p}{q}| \leqslant 1/q^2$.
+ Question bonus : la même que casimir et abdes :
$u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(E, G)$, $\mathrm{Ker}\, u \subset \mathrm{Ker}\, v$, montrez qu'il existe $w \in L(F, G)$ telle que $v = w \circ u$.

Exercice 1.2.11.

(1) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique, b un vecteur et a un scalaire et enfin $B = \begin{pmatrix} A & Ab \\ b^{\mathrm{T}}A & a \end{pmatrix}$.
Montrer que $B > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A > 0 \\ a > b^{\mathrm{T}}Ab \end{cases}$.
Montrer que $\det B = (\det A)(a - b^{\mathrm{T}}Ab)$

(2) Soit $A_p = (A_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2}$. Montrer que $A > 0 \Leftrightarrow (\forall p \in [\![1, n]\!],\ \det(A_p) > 0)$.

Exercice 1.2.12.

(1) Soit G groupe commutatif fini : $\forall x \in G : \omega(x)$ est l'ordre de x, $n = \mathrm{ppcm}\,(\omega(x) \mid x \in G)$, $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ sa décomposition en facteurs premiers.
Mq $\forall i \in [\![1, k]\!], \exists x_i \in G \mid \omega(x) = p_i^{\alpha_i}$.
Bon ici une petite remarque de ma part, peut-être une vanne d'ailleurs, mais je fais confiance à Jimmy pour le détecter au besoin, l'énoncé me disait quelque chose) d'une part il existe alors un élément d'ordre n (le produit des x_i), d'autre part si le groupe se trouve être Z_a^*, $n = \lambda(a)$,

`http://en.wikipedia.org/wiki/Carmichael_function`

(2) $u_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, cv vers 0, f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, positive, croissante, et telle que $\frac{f(n)}{\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t} \longrightarrow_{n\to+\infty} 0$.
Mq $\frac{\sum_{k=1}^n f(k)}{\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t} \longrightarrow_{n\to+\infty} 1$ et $\frac{\sum_{k=1}^n f(k)u_k}{\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t} \longrightarrow_{n\to+\infty} 0$.
Étudier le cas où $u_n \to l$.

Exercice 1.2.13.

(1) Soit G un groupe fini commutatif, n le p.p.c.m. des ordres de ses éléments, on écrit $n = \prod_{i=1}^{m} p_i^{\alpha_i}$.
  a) Montrer qu'il existe $x \in G$ tel que $p_i^{\alpha_i}$ est l'ordre de x.
  b) Montrer qu'il existe $x \in G$ tel que n est l'ordre de x.

(2) Soit $\varphi\ : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ croissante, $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \to l$.
Montrer que $\dfrac{\sum\limits_{k=0}^{n} \varphi(k)u_k}{\int_0^n \varphi(t)\,\mathrm{d}t} \to l$.

1.3. **Oral Maths Lyon.**

Exercice 1.3.1.
On considère l'ensemble des polynômes à coefficients complexes, muni de la norme $N(P) = \sup\limits_{z\in\mathbb{U}} |P(z)|$.

(1) Montrer que N est une norme (oui oui c'est bien ça !...).

(2) On considère

$$E_n = \{P \in \mathbb{C}[X] \mid \deg(P) = n, \mathrm{cd}\,(P) = 1 \text{ et } P(0) = 1\} \text{ et } C_n = \inf\{N(P),\ P \in E_n\}.$$

Calculer C_n.

Exercice 1.3.2.

(1) Soit f dérivable n fois de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$. Soit $a \leqslant x_0 < x_1 < ... < x_n \leqslant b$.
Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f^{(n)}(c) = c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) + \cdots + c_n f(x_n)$ où $c_j = (-1)^{j+n} n! / \prod\limits_{k\neq j} |x_j - x_k|$.

(2) Soit $y_j = \cos(j\pi/n)$.
Montrer que $\sum\limits_{j=0}^{n} \prod\limits_{k\neq j} \dfrac{1}{|y_k - y_j|} = 2^{n-1}$.

Exercice 1.3.3.

(1) Considérons l'ed : $y'' + py' + qy = 0$ (E) avec $q \leqslant 0$, p et q continues sur $[0, 1]$.
Montrer que pour tout a, b il existe une unique solution y tq $y(0) = a$ et $y(1) = b$.

(2) Vap et vep de la matrice $(a_{ij} = b_i/b_j)$ avec b_i réels non nuls.

(3) Soient $a_1, ..., a_k$, k suites de réels < 1 tq

$$a_{1,n} + ... + a_{k,n} \to 1 \text{ et } \frac{a_{1,n}}{1 - a_{1,n}} + ... + \frac{a_{k,n}}{1 - a_{k,n}} \to \frac{k}{k-1}.$$

Montrer que $a_1, ..., a_k$ convergent.

EXERCICE 1.3.4.
Soit Γ une courbe de classe $\mathcal{C}^\infty$ définie par $y(s)$ et $x(s)$ et vérifiant $y'(s)^2 + x'(s)^2 = 1$. On suppose en plus que sa courbure ρ est dans $[-k, k]$ où $k > 0$.
Montrer qu'il existe θ qui ne dépend que de k tel que $\forall s \in [0, \theta]$, $|y'(s)| \geqslant \frac{1}{2}$.

EXERCICE 1.3.5.

(1) Soit n un entier naturel et soit a un entier premier avec n. On note ω l'ordre de a dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
Soit m un entier tel que $a^m = 1$, montrer que $\omega | m$.

(2) Soient p et q deux nombres premiers distincts, on étudie la suite (q^k) d'éléments de $\mathbb{Z}/p^N\mathbb{Z}$.
 a) Montrer que la suite est périodique.
 b) Si on note $t(N)$ la période de cette suite, montrer qu'il existe C tel que : $t(N) \leqslant Cp^N$.

EXERCICE 1.3.6.
On considère $n \geqslant 1$, $T(\theta) = \cos(n\theta)$, $\theta_k = \dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$, $T_k(\theta) = \dfrac{T(\theta)}{T'(\theta_k)}(\cos(\theta) - \cos(\theta_k))$ et $P(\theta)$ un polynôme trigonométrique de la forme : $P(\theta) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \sin(k\theta))$.

(1) Montrer qu'il existe un unique n-uplet $(l(0), ..., l(n-1))$ dans $\mathbb{R}^n$ tel que l'on ait

$$P(\theta) = \sin(\theta) \sum_{k=0}^{n-1} l(k) T_k(\theta)).$$

C'est tout vu ma prestation...

EXERCICE 1.3.7.

(1) Théorème des 4 sommets.
Soit Γ une courbe $\mathcal{C}^\infty$ du plan, fermée (de période T), paramétrée par l'abscisse curviligne $(x'^2 + y'^2 = 1)$. Sa courbure $k = x'y'' - x''y'$ et dont le domaine borné délimité par Γ est convexe (Wow!) :
Le but de l'exo est de montrer que k admet au moins 4 extrema (k' s'annule au moins 4 fois en changeant de signe).
 a) Montrer que $\displaystyle\int_0^T k'(t)\,\mathrm{d}t = 0 = \int_0^T x(t)k'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T y(t)k'(t)\,\mathrm{d}t$.
 b) Montrer que k' s'annule au moins une fois puis 2 puis 3, enfin 4.

(2) Soit $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ce que l'on sait. $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ tq vap de A distinctes et de module $\leqslant 1$: Montrer que les vap sont racines de l'unité.

1.4. **Oral Maths Cachan.**

Exercice 1.4.1.
Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, A diagonalisable. Montrer l'équivalence des 3 propriétés :
(i) Aucun vecteur propre de A n'est dans $\operatorname{Ker} B$.
(ii) Pour tout vecteur propre Y la fonction $t \mapsto B\exp(tA)Y$ est non identiquement nulle.
(iii) Pour tout vecteur propre Y il existe k entier entre 0 et $n-1$ tel que AB^kY soit non nul.
Question bonus : montrer que c'est encore équivalent à ce que la matrice par blocs $n^2 \times n$, composée verticalement de B, BA, ..., BA^{n-1} soit de rang n.

Exercice 1.4.2.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suite de $[0,1]$.
Montrer l'équivalence des prop suivantes :

(1) Pour tt $a < b$ de $[0,1]$, $\dfrac{1}{n}\operatorname{Card}\{k \mid u_k \in [a,b]\} \to b-a$ quand n tend vers l'infini.
(2) Pour tout f continue sur $[0,1]$, $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f(u_k) = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 1.4.3.
Soit $\phi(f) = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+f'(x)^2}\,\mathrm{d}x$ et $F = \{f \in \mathcal{C}(\mathcal{R}) / f(0) = 0 \text{ et } f(1) = \lambda\}$. On suppose que $\phi(f)$ admet un minimum sur F, soit $f \in F$ réalisant le minimum de ϕ et $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) / \varphi(0) = \varphi(1) = 0$.

(1) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\varphi(x)f'(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}}\,\mathrm{d}x = 0$.
(2) Que peut-on dire de f ?

Exercice 1.4.4.
Les questions sont posées à mesure :
Soit f une fonction continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ une subdivision.

(1) Montrer qu'il existe un unique polynôme $P_n(f)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ tq pour i dans $[\![0,n]\!]$, $P_n(f)(x_i) = f(x_i)$.
(2) On pose $a_n(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} |L_i(x)|$ et $A_n = \|a_n(x)\|$ (norme infinie sur $[a,b]$).
Montrer que $A_n = \max\{\|P_n(f)\|/\|f\|,\ \text{où } f \text{ est dans } \mathcal{C}([a,b]), f \neq 0\}$.
(3) Montrer que pour tout x de $[a,b]$, $a_n(x) \geqslant 1$ (à la toute fin).

NB : Les Li dans le 2) sont les Li de l'interpolation de Lagrange.

Exercice 1.4.5.
Soit $f \in \mathcal{D}([1,+\infty[,\mathbb{R})$, f croissante, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, f' décroissante vers 0.

(1) Montrez que $\{e^{if(n)} \mid n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathbb{U}$.
(2) Nature de la série $\sum \frac{\sin(\ln n)}{n}$.

Exercice 1.4.6.
Soit $f = (f_1, \dots, f_n) \in C^2(\mathbb{R}^n)$ on note les propriétés suivantes :
(i) $\forall x, h \in \mathbb{R}^n ||f(x+h) - f(x)|| = ||h||$,
(ii) $\forall x, h \in \mathbb{R}^n || \mathrm{d}f_x(h)|| = ||h||$,
on note de plus la formule moche et bizarre, légèrement parachutée :

$$\forall i, j, k \in \{1, ..., n\},\ a_{i,j,k} = \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial f_m}{\partial x_i} \frac{\partial^2 f_m}{\partial x_j \partial x_k}$$

Le but de l'exo va être de montrer l'équivalence des propriétés (i) et (ii)
1) Montrer que $(i) \Rightarrow \forall i, j, k \in \{1, ..., n\},\ a_{i,j,k} = a_{i,k,j} = -a_{j,k,i}$,
2) Montrer que $(ii) \Rightarrow \forall i, j, k \in \{1, ..., n\},\ a_{i,j,k} = 0$,
3) Montrer que $(i) \Leftrightarrow (ii)$

2. Spéciales MP* : sujets posés à l'école Polytechnique à l'oral 2009

2.1. **Exercices.**

Exercice 2.1.1.

(1) Soit $A \in \mathcal{M}_{2p}(\mathbb{R})$ antisymétrique, $J = (1)$, montrer que $\det(A + J) = \det A$.

(2) Calculer $\begin{vmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & -1 & 0 \end{vmatrix}$.

(3) Soit $f\ : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $f(0) \leqslant 0$ et $f(1) \geqslant 0$ et il existe $g \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ vérifiant $f + g \searrow$. Montrer que f s'annule.

Exercice 2.1.2.

(1) Exo chelou, les questions n'ont pas vraiment de liens entre elles Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, (pourquoi pas ?) et E l'ensemble des fonctions de classes $\mathcal{C}^4$, de I dans $\mathbb{R}$, vérifiant la relation $\left(-\dfrac{1}{f''}\right)'' > 0$.

a) Résoudre l'équa diff $\left(-\dfrac{1}{f''}\right)'' = 0$.

b) On définit la fonction $g(x, y) = x^2 f''(y)$, montrer l'équivalence
f appartient à $E \Leftrightarrow g$ est convexe.

c) Montrer que la somme de deux fonctions de E est dans E.

d) Déterminer les éléments du type x^r avec r réel et $I = \mathbb{R}_+^*$.

(2) Soit A une matrice égale à sa transconjuguée : $A = A^*$.

a) Que dire de ses valeurs propres ? (il m'a rajouté "dire par exemple si elles sont réelles ou pas", je ne voyais pas où il voulait en venir).

b) On suppose de plus que notre matrice A vérifie l'équation $A^3 + A = 2I_n$. Donner l'ensemble des solutions (il m'a quand dit, "par exemple I_n est solution").

Exercice 2.1.3.

(1) Merci Jesus, c'est exactement le même exercice d'analyse (fonctions $\mathcal{C}^4$), on est passé à la même heure (mais pas avec le même examinateur bien sûr) sinon mon examinateur moi m'a aidé pour la question de convexité d'une fonction à deux variables, il m'a dit $g(x, y)$ est convexe ssi pour tout x, y, X, Y la fonction qui a t associe $g(x + tX, y + tY)$ est convexe.

(2) Merci necro, c'est la même 1ere question : calcul du $\det(A + xJ)$, A antisymétrique J avec des 1 en dimension paire.
Pour la deuxième question : que se passe t'il en dimension impaire ?
Et là la galère, on trouve en développant je ne sais comment que c'est x fois la somme des $M(i, i)$ les cofacteurs d'indices i, i.

Exercice 2.1.4.

(1) Soit Φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}^n$ qui à M associe $(\mathrm{Tr}(M), \mathrm{Tr}(M^2), \ldots, \mathrm{Tr}(M^n))$.
   a) Calculer la différentielle de Φ.
   b) Calculer son rang.

(2) Montrer que $O = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid P_A = \Pi_A\}$ est un ouvert.

(3) Fabrice Lembrez (si, si, il a vu que j'étais toulousain et c'est un ancien élève à lui) pète un plomb et enferme 100 élèves dans le gymnase. Un élève peut sortir dans la pièce suivante où se trouvent 100 tiroirs avec les noms de chacun d'entre eux et peut en ouvrir 50. Si son nom sort il passe dans une autre pièce et un autre élève est appelé... sinon on recommence depuis le début avec les noms réorganisés dans le tiroir. Déterminer la stratégie optimale pour que tous les élèves sortent.

Exercice 2.1.5.

(1) on considère A symétrique définie positive, X, Y deux vecteurs.
   a) Montrer que $X^{\mathrm{T}}AX.Y^{\mathrm{T}}A^{-1}Y \geqslant (X^{\mathrm{T}}Y)^2$.
   b) On pose A_1 la matrice obtenue en enlevant 1ere ligne et 1ere colonne de A. Montrer que $\det(A)/\det(A_1) = 1/(e_1^{\mathrm{T}}A^{-1}e_1)$.
   c) Soit B symétrique définie positive :
   Montrer que $\det(A)/\det(A_1) + \det(B)/\det(B_1) \geqslant \det(A+B)/\det(A_1+B_1)$ (si je me rappelle bien du sens d'inégalité).

(2) Soit B un ensemble contenant des vecteurs tous de norme 1 tq si X, X' sont dans B alors $X^{\mathrm{T}}X' \leqslant \lambda < 1$.
   Montrer que B est fini.

Exercice 2.1.6.

Je me souviens que du début, le reste, ça se complique... c'est un problème de relèvement.
Soit f une application différentiable de $[a, b]$ dans $\mathbb{U}$ (le cercle unité complexe).

(1) Montrer qu'il existe u fonction continue réelle telle que $f' = 2i\pi uf$.

(2) Soit F telle que $f(x) = \exp(2i\pi F(x))$ où f différentiable, montrer que F est dérivable.

(3) Puis là ça se complique, il introduit une déformation (gné ?) $h(t, x)$ définie sur $[0, 1]\times[a, b]$ telle que $h(0, x) = f(x)$ et $h(1, x) = g(x)$.
   h est continue par rapport à t, $\mathcal{C}^1$ par rapport à x, (il m'a dit vous aurez le droit de rajouter des hypothèses sur h si vous voulez) f et g deux fonctions différentiables de $[a, b]$ dans $\mathbb{U}$. On a de plus $h(t, a) = g(a) = f(a)$; $h(t, b) = g(b) = f(b)$; $F(a) = G(a)$ (F est la fonction de la question 2), G c'est la même pour g).
   Montrer que $G(b) = F(b)$...
   Réciproque ?

Exercice 2.1.7.

Soient A, B, C trois matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant les hypothèses :

$$AB - BA = C,\ AC = CA,\ BC = CB$$

les deux dernières m'étant dictées sous la forme "A et C commutent et B et C commutent", mais j'ai adopté l'écriture du 2.4.7 (oral X 2008) pour la mise en forme au tableau.

Montrer que $e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}e^{-\frac{t^2}{2}C}$.
La fin du spectacle est un peu mieux maîtrisée : il me demande si par hasard A, B et C seraient pas simultanément trigonalisables (vu que j'ai trigonalisé C pour parler des vap).

Exercice 2.1.8.
Soit $E = f \in \mathcal{C}([-1,1],\mathbb{C})$, et $g \in \mathcal{C}([-1,1],[-1,1])$ croissante surjective.
Soit F en s.e.v. de E de dimension finie stable par $\phi : f \mapsto f \circ g$.
Montrer que $\phi_{|F} = \mathrm{Id}$. (indication : commencer par montrer que 1 est l'unique vap de ϕ).

Exercice 2.1.9.
Soit $f \in C([0,1],\mathbb{R})$ telle que $\forall y \in [0,1]$, $f^{-1}(y)$ est fini, et $f(0) \neq f(1)$.
Montrer que $\exists y \in \mathbb{R} \mid f(y)$ est atteint un nombre impair de fois.

Exercice 2.1.10.

(1) Soit $X \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $\exists U \in O_n(\mathbb{R}) : XX^T = U^{-1}JU$ et expliciter J.

(2) Soit $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{u_{n-k}}{k!} = 1$. Définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Limite de u_n ?

(3) On définit $u_n = \dfrac{(-1)^n \sin(n)}{n + (-1)^n \sin(n)}$. Est-ce que $\sum u_n$ converge ?

Exercice 2.1.11.
Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt} \Big(\int_0^t \frac{\sin u}{u}\, \mathrm{d}u \Big)\, \mathrm{d}t$. Étudier f...

Exercice 2.1.12. Même exo que le précédent.

Exercice 2.1.13.

(1) Un peu de géométrie. Soit f fonction complexe définie par $f : z \to z + \dfrac{z^2}{2}$. Donner l'aire de l'image par f du disque unité.

(2) Soit f uniformément continue sur I intervalle de $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $(x,y) \in I^2$, $\exists A$ tel que on ait l'une ou l'autre des affirmations :
$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$,
ou bien $\left| \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| < A$.

(3) Soit trois polynômes de degré 2 à coeffs dominants positifs, et ayant deux à deux une racine réelle commune. Montrer que la somme des trois polynômes a une racine réelle.

Exercice 2.1.14.

(1) On considère la fonction Γ d'Euler, et $I(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} \ln(\Gamma(u))\,\mathrm{d}u$. Donner un équivalent de $I(x)$, puis donner un équivalent de $\ln(\Gamma(x))$.

(2) Donner le commutant de la matrice A qui à e_1 associe e_2, à e_2 associe e_3 et à e_3 associe e_1.

Exercice 2.1.15.

(1) $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (t\,\mathrm{e}^{-t})^x\,\mathrm{d}t$. Domaine de définition de F ?

(2) Soit $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (\phi(t))^x\,\mathrm{d}t$ où $\phi(t) = \mathrm{e}\,t\,\mathrm{e}^{-t}$.
Montrez que $\forall \delta \in]0;1[, \exists A \in]0;1[\mid g(x) = \displaystyle\int_{1-\delta}^{1+\delta} (\phi(t))^x\,\mathrm{d}t + O(A^x)$.

(3) Soient α et β tels que $2\alpha < 1 < 2\beta$.
Montrez que $\exists \delta \in]0;1[\mid \forall t \in [-\delta; +\delta],\ \phi(1+t) \in [\mathrm{e}^{-\beta t^2}; \mathrm{e}^{-\alpha t^2}]$.

(4) Donnez un équivalent de $\displaystyle\int_{-\delta}^{+\delta} \mathrm{e}^{-kxt^2}\,\mathrm{d}t$. On rappelle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}$.
Il y avait une suite (avec Stirling si j'ai bien compris).

Exercice 2.1.16.

Soit f une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}$. On pose $g(x) = f(x - 1/x)$.

(1) Montrer que g est intégrable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(2) Montrer que l'intégrale de f sur $\mathbb{R}$ est égale à celle de g sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Exercice 2.1.17.

Soit I un intervalle compact de $\mathbb{R}$. Soient u et v deux fonctions $\mathcal{C}^1$ de I dans $\mathbb{R}$.
On suppose que pour tout $t \neq s$ de I : $u(s)v(t) - u(t)v(s) \neq 0$.
Montrer qu'il existe (a, b) de $\mathbb{R}$ tels que pour tout t de I : $au(t) + bv(t) > 0$.

Exercice 2.1.18.

Trouver les extrema globaux et locaux de trace sur les matrices orthogonales réelles

---

Exercice 2.1.19.

Soient A, B deux matrices carrées de taille n.
Pour X matrice carrée de taille n, on pose $f(X) = AX + XB$.
Déterminer, si c'est possible, une relation entre les valeurs propres de A, B et f.

Exercice 2.1.20.

(1) Existe-t-il une norme invariante par similitude ?
Soit N une semi-norme invariante par similitude.

(2) Montrer que si $\mathrm{Tr}(A) = 0$ alors $N(A) = 0$.

(3) Caractériser une telle semi-norme.

3. ADS et TIPE

3.1. **TIPE aux ENS.**

Exercice 3.1.1.
Ils m'ont demandé de formaliser les proba.
Donc ... pour faire court, prenons l'exemple d'un dé à 6 faces.
L'ensemble des événements possibles sont $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ont le note Ω.
Une probabilité est par définition, une fonction de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0, 1]$ vérifiant :
– Si l'intersection de A et de B est vide, $\mathrm{P}\,(AUB) = \mathrm{P}\,(A) + \mathrm{P}\,(B)$,
– $\mathrm{P}\,(\emptyset) = 0$,
– $\mathrm{P}\,(\Omega) = 1$.
On remarque qu'il suffit de connaître les valeurs de la fonction sur $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$ et $\{6\}$ pour les avoir toutes ...
Dans notre TIPE, $\Omega = [0, 1]^{\mathbb{N}}$, autrement dit c'est l'ensemble des N-uplets de valeurs prises dans notre répartition ...
C'est tout ce qu'ils m'ont demandé sur le TIPE ...
Ensuite, pour voir si j'avais compris, il m'ont posé un petit exo :
On lance un disque sur un plan infini, calculer la probabilité pour que le disque recouvre un point à coordonnées entières.

Exercice 3.1.2.
Moi j'ai eu droit à :
On trace sur le plan toutes les droites d'équations $x = k$ (k entier relatif), on jette un bâton de longueur 1, quelle est la probabilité que le baton touche au moins une droite.
Ils m'ont posé aussi un problème avec deux vendeurs et un acheteur... Y'a t il un équilibre de Nash ? (je n'aurais pas dû parler d'équilibre de Nash dans mon dossier...)
Ils m'ont demandé si on avait pas travaillé ensemble. J'ai dit "oui au début pour le travail de recherche, mais nos travaux furent indépendants par la suite" ils ont bien voulu me croire.

3.2. **ADS de l'X.**

Exercice 3.2.1. ADS
Très long, je ne l'ai même pas lu en entier, j'ai préféré assurer le début, il ne m'en a pas voulu.
C'était sur le calcul d'approximation. Du genre calculer une aire du plan en comptant le nombre d'élément de $\mathbb{Z}^2$ appartenant à la surface.
Voilà une des questions qu'il m'a posé : On suppose qu'il existe s appartenant à $\mathbb{R}$ telle que la série $\sum_{n>0} \frac{a_n}{n^s}$ converge où a_n est une suite complexe.

(1) Montrer que pour tout $r > s$ la série converge en r, et pour $r > s + 1$ la série converge absolument en r.
(2) Montrer qu'on ne peut pas faire mieux que $r > s + 1$ (trouver un contre exemple pour lequel la série est semi-convergente en $s + 1$).

Exercice 3.2.2.
Texte assez immonde même si à la base il traite d'arithmétique : le but est d'étudier les propriétés du nombre de façons pour A sous-ensemble de $\mathbb{N}$ donné, d'écrire n sous forme de somme d'entiers de A. Au final on se retrouve avec 30 pages de théorèmes dont 75% consistent en des formules absolument infâmes sur des égalités entre produits infinis répugnants et séries entières

vomitives. Le reste introduit une représentation sous forme de graphe plus attrayante et plus puissante.
Questions :

(1) Pour n donné, majorer le nombre de façons d'écrire n comme somme d'entiers naturels (on obtient un terme en $O(n^n/n!)$).
(2) Montrer que le produit infini des $1/(1-x^i)$ converge pour $0 < x < e^{-1}$.
(3) Montrer qu'en fait ça marche pour $x < 1$.
(4) Pour un entier n donné, calculer le nombre de façons de payer n euros en pièces de 1 euro et 2 euros.

3.3. **ADS et TIPE aux concours communs.**

Exercice 3.3.1.
Pour l'ADS, ça parlait du procédé de doublage d'algèbre ... qui permet par exemple d'obtenir les complexes à partir des réels, les quaternions à partir des complexes, les octonions à partir des quaternions, ad libitum ... bref c'était des maths
Ils m'ont demandé de montrer que $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ était
– une algèbre
– unitaire
– associative
– non commutative
– d'autres propriétés en rapport avec le texte (ou il fallait réfléchir un peu) faisant intervenir Déterminant, trace et Cayley Hamilton (j'y ai pensé!!)
Le reste ne concerne que Jean

Exercice 3.3.2.
– ADS : math sur le clustering; on souhaite évoluer la présence de groupe (spatiale ou sémantique) dans une banque de données, des informations sur la densité grâce à des notions de distances. Plutôt typé informatique, très intéressant, facile quoiqu'un peu long (je n'ai pas pu finir mes transparents mais de toute façon il ne m'ont pas laissé aller jusqu'au bout par manque de temps).
– TIPE : bien passé, des question sur le nombre d'heures, mon travail personnel, plus des questions sur les probas (pas trop évident quand on en n'a pas fait trop). Voilà.

Exercice 3.3.3.
Un ADS le 14 juillet c'est trop bien (so ironique) mais bon je passe à 13h30 j'ai eu un ADS info (trop bien! (encore ironique)) sur les problèmes P, NP et NP-complet (un peu le premier ADS de Jimmy avec Borrrrrrrrrrrris et Simon ou Jésus (je ne sais plus lequel est passé dessus)) bref pas très difficile pour ceux que ça intéresse (pas moi) mais très chiant pour ceux qui n'aime pas l'info théorique (donc moi).
Le TIPE s'est à peu près bien déroulé mais c'est dur lorsqu'on est au 2/3 de l'exposé et qu'il lève le panneau "reste 2 minutes" (la tête que j'ai eue quand j'ai vu le panneau).
Pour un dernier oral c'est donc assez chiant mais maintenant j'ai fini.

Exercice 3.3.4. Ça parlait d'informatique quantique, plus précisément de la facon de modéliser les qubits, à l'aide d'espace préhilbertiens (beaucoup de notations pour pas grand chose, mais suffisamment pour faire paniquer), on y présentait certaines transformées (via des endomorphismes unitaires), et surtout, l'algorithme de Grover sur un exemple simple (recherche d'un nombre n dans une suite de nombres de 1 à N). C'est cet algorithme qu'il était demandé de présenter, pour en tirer une comparaison entre informatique classique et informatique quantique.

4. Spéciales MP* : sujets posés aux Écoles des Mines à l'oral 2009

Exercice 4.1.1.

(1) 10 min de préparation (qui se sont réduites à 5 min, faut dire c'est le classique du Taupin comme dirait Ginoux).

a) Soit A réel différent de 1 ou de -1.
Simplifier l'expression suivante :

$$\prod_{k=0}^{n-1}(1-2A\cos(\frac{2\pi k}{n})+A^2).$$

b) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{2\pi}\ln(1-2A\cos(u)+A^2)\,\mathrm{d}u.$

(2) On note $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$.
Montrer qu'il n'existe pas M tel que $M^2=A$.

(3) Soit A et B deux groupes finis.
CNS pour que $A\times B$ soit cyclique.

Exercice 4.1.2.

Un exo à préparer pendant 10 min mais j'ai eu entre 15 et 20 min, puis 2 exos en plus au cours de la colle

(1) Soit E un e.v. de dimension finie n, on dit que x cyclique ssi $(x,f(x),...,f^{n-1}(x))$ libre.

a) Soit f nilpotente d'ordre n, montrer qu'il existe un x cyclique.

b) Si f a des vap 2 à 2 distinctes, montrer qu'il existe un x cyclique.

c) Si f est diagonalisable mais que son polynôme caractéristique n'est pas scindé à racines simples, montrer qu'aucun x n'est cyclique (j'étais plutôt content et au bout de 5-10 min j'avais fini modulo les arnaques).

(2) Posé au bout de 25 min d'oral :
Équivalent de $u_n=\dfrac{1}{n\sum\limits_{k=1}^{n}(\ln k)^\alpha}$ où α est un réel strictement positif.

(3) Posé 15 min plus tard :
Comment étudierez-vous la courbe polaire d'équation $r(\theta)=1+r\cos(\theta)$?

Exercice 4.1.3.

Pendant la préparation (10min) :
Soit $D_n=\{$matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\}$.
Est il ouvert ? fermé ?
Au tableau :
Trouver les fonctions $f\in\mathcal{C}^\infty$ et 2π-périodiques vérifiant : $f(2x)=2\sin(x)f'(x)$

Exercice 4.1.4.

(1) Premier exercice hypermegaclassique : (cf. exo 3.1.9 de l'oral 2008).

Soit A= $\begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ c & a & \dots & b \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ c & \dots & c & a \end{pmatrix}$ (a sur la diagonale, b au dessus et c au dessous). On pose J la matrice avec que des 1.

a) Que dire du degré de $P(x) = \det(A + xJ)$?

b) Calculer $\det(A)$.

(2) On pose $u_n(x) = n^\alpha x^n(1 - x)$ pour $x \in [0, 1]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Étudier suivant la valeur de α la convergence simple, normale, et uniforme de la série $\sum u_n$.

(3) Aujourd'hui nous sommes le lundi 22 juin 2009, quel jour serons-nous le 22 juin 2010 ?

(4) On pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 f(t^n)\,\mathrm{d}t$. Établir la convergence de la suite (u_n).

Exercice 4.1.5.

(1) Il était une fois la magnifique fonction de deux variables $f(x, y) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^n \cos(ny)}{\sqrt{n}}$.

a) Trouver son intervalle de définition.

b) Montrer le caractère $\mathcal{C}^1$ de la fonction sur l'intérieur de son intervalle de définition

(2) Après ce désastre, il me pose un deuxième exo :

Voici la matrice $\begin{pmatrix} 1 & \ln_a(b) & \ln_a(c) \\ \ln_b(a) & 1 & \ln_b(c) \\ \ln_c(a) & \ln_c(b) & 1 \end{pmatrix}$. Youpi.

Montrer que l'application linéaire en question est la composée d'un projecteur et d'une homothétie ($f = h \circ p$).

(3) soit $f\ : \sigma \longrightarrow \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\sigma(k)$.

Chercher le max, le min de f sur toutes les permutations de $[\![1, n]\!]$, en trouvant une permutation qui le réalise.

Exercice 4.1.6.

(1) Avec préparation :

soit (A^k) une suite de matrices complexes bornées, considère $B_p = \dfrac{1}{p+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{p} A^k$.

a) Montrer qu'il existe une sous suite extraite qui converge vers une matrice B.

b) Montrer que $B^2 = B$.

c) Montrer que $\mathrm{Im}(A - I_n) = \mathrm{Ker}(B)$, $\mathrm{Ker}(A - I_n) = \mathrm{Im}(B)$.

d) Montrer finalement que $B_p \to B$.

(2) Sans préparation : soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1 - 2x\cos(t) + x^2}$, domaine de définition et calcul.

(3) Soit la courbe en polaires $r(\theta) = \dfrac{1}{\cos(2\theta)}$ asymptote en $\pi/4$.

Exercice 4.1.7.

(1) Minimum de $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(a, b, c) \to \displaystyle\int_{-1}^{1} (t^4 - at^2 - bt - c)^2 \, \mathrm{d}t$.

(2) Solutions de : $x^2y'' + 4xy' + 2y = \ln(1 + x)$.

Exercice 4.1.8.

(1) Soit a_k une suite de réels strictement positifs tq $\sum a_k$ converge vers S. $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on note $b_n = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{a_k}\right)^{-\alpha}$ avec $\alpha > \dfrac{1}{2}$. Convergence de $\sum b_n$.

(2) Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. , $(e_1, ..., e_n)$ une famille libre de E et $U = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ avec $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$.
Trouver une CNS sur les λ_i pour que $(U + e_1, ..., U + e_n)$ soit libre.

(3) Pour $M = (m_{i,j}) \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ trouver les meilleurs majorants de :

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}\right|, \quad \left|\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n} m_{i,j}\right|.$$

Exercice 4.1.9.

(1) Soit E un e.v. de dimension n, soit ϕ et ψ deux formes linéaires non nulles sur E, a et b deux vecteurs non nuls de E.
Montrer l'équivalence $\phi(a) = \psi(b) \iff (\exists u \in \mathrm{GL}(E) \mid u(a) = b \text{ et } \psi \circ u = \phi)$.

(2) Soit $f \in \mathcal{C}^1([0, 2\pi])$ telle que $f(0) = 0 = f(2\pi)$, que l'on prolonge par périodicité sur $\mathbb{R}$ tout entier.
Montrer que $\left|\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}^\star} c_n(f)\right|^2 \leqslant \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}^\star} (4n^2 - 1)\,|c_n(f)|^2$.

(3) Soit la courbe $y^2 = 2px$ où p est strictement positif (questions posées les unes après les autres).

a) Dire ce que c'est, faire un dessin.

b) Soit M sur la courbe. Trouver le point d'intersection M' de la normale en M avec le reste de la courbe.

c) Calculer la longueur de l'arc MM'.

EXERCICE 4.1.10.

(1) On considère $f\ : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ de classe $\mathcal{C}^2$. Soit $a = (a_1, .., a_n)$ et $h = (h_1, .., h_n)$ 2 vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Soit $g\ : t \to f(a + th)$.
Trouver $g'(t)$ puis $g''(0)$.

(2) Soit $\gamma_t : x^2 + y^2 = (x\cos(t) + y\sin(t) + 1)^2$.
   a) Nature de γ_t ?
   b) Lieu des sommets ?

(3) Soit A symétrique définie positive. U un vep unitaire de A. Déterminer :
$$\inf\{X^{\mathrm{T}}AX \mid (X^{\mathrm{T}}U)^2,\ X \text{ non orthogonal à } U\}.$$

(4) que pensez vous de la convergence de $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)^{20}\,\mathrm{d}t$.

EXERCICE 4.1.11.

(1) Soit $f, g : [0,1] \to [0,1]$ continues, telles que $f \circ g = g \circ f$.
   a) Mq l'ensemble des points fixes de f admet un ppe et un pge.
   b) En déduire que $\exists c \in [0,1] : f(c) = g(c)$.

(2) Soit q une forme quadratique sur le corps des réels, b fbs associée, E ev ambiant...
$C(q) = \{x \in E \mid q(x) = 0\}, N(q) = \{x \in E \mid \forall y \in E, b(x,y) = 0\}$.
Mq $N(q) = C(q) \Leftrightarrow q \leqslant 0$ ou $q \geqslant 0$.

(3)
   a) $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 1} f(x)$.
   b) Calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$.

(4) Trouver $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n} x^{-\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}x$.

EXERCICE 4.1.12.

(1) (10 min de préparation) Étudier la convergence des suites définies par la relation
$$u(n+1) = 1 + \sin(1/u(n))/3.$$

(2) Le même que Marc ($M = mat(f)$ matrice avec des logarithmes et il faut monter que $f = h \circ p$, h homothétie, p projecteur), cf. 4.1.5.

(3) Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(1) = 0$. On pose $f_n(x) = x^n f(x)$. Montrer que (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$.

Exercice 4.1.13.

(1) Soit $P(X) = a_0 + ... + a_n X^n$ avec $b_0, \dots, b_n$ réels distincts.
   a) CNS pour que $(P(b_0 X), \dots, P(b_n X))$ soit libre ?
   b) Mq l'ensemble des polynômes qui vérifie 1) est ouvert dense dans $\mathbb{R}_n[X]$.

(2) Soit $E = \mathcal{C}^1([0;1], \mathbb{R})$.
On considère la norme 1 N_1, la norme infinie N_∞ et $N(f) = N_\infty(f) + N_\infty(f')$.
   a) Normes équivalentes ?
   b) E est-il complet pour une de ces normes ?

(3) Une propriété à montrer sur une parabole...

Exercice 4.1.14.

(1) (en préparation) On considère la suite (u_n) définie comme le dernier chiffre de $2 + 4 + 6 + ... + 2k$.
Étudier la suite (u_n) et en déduire la somme des premiers termes de 0 à 2000.

(2) On considère la matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 & a^5 \\ 1 & b & b^2 & b^3 & b^4 & b^5 \\ 1 & c & c^2 & c^3 & c^4 & c^5 \\ 0 & 1 & 2a & 3a^2 & 4a^3 & 5a^4 \\ 0 & 1 & 2b & 3b^2 & 4b^3 & 5b^4 \\ 0 & 1 & 2c & 3c^2 & 4c^3 & 5c^4 \end{pmatrix}$. La moitié est un Vandermonde, l'autre est la dérivée de ses premiers termes. Il me montre le résultat du calcul de déterminant sur Maple : $\det A = -(c-a)^4.(b-a)^4.(b-c)^4$ et me demande de l'expliquer.

(3) Nature de la série de terme général $u_n = \ln(1 + (-1)^n / n^\alpha)$

(4) Continuité de $x \mapsto \displaystyle\int_0^\infty t^x \exp(-t)\, \mathrm{d}t$

5. Spéciales MP* : sujets posés aux Écoles Centrales à l'oral 2009

5.1. Math 1.

Exercice 5.1.1.

(1) Soit $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, on pose $J(\alpha,\beta) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{\alpha-1}}{1+t^\beta}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que J est bien définie.

b) Calculer J sous forme d'une série avec 2 méthodes différentes (attention ya un piège).

(2) Calculer $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{3^{n+(-1)^n}}$.

(3) Exo "Bonus"
Dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ on note : $R = \{$suites définies par une relation linéaire de récurrence$\}$ d'où le R. $G = \mathrm{Vect}((\rho^n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \rho \in \mathbb{C})$ les suites géométriques d'où le G.
Montrer que R et G ne sont pas l'espace entier. A-t-on $R \subset G$ ou $G \subset R$? ?

Exercice 5.1.2.
$A = \left\{ f \in \mathcal{C}^1([0,2\pi],\mathbb{R}) \text{ tel que } \int_0^{2\pi} |f|^2 \leqslant \frac{1}{9}\int_0^{2\pi} |f'|^2 \right\}$.

(1) A s-ev ?

(2) Donner un S-ev E inclus dans A tel que la dimension d'un supplémentaire de E soit 6.

(3) Existe-t-il en s-ev inclus dans A tel que la dimension d'un supplémentaire de E soit 5.

Exercice 5.1.3.

(1) Soit f dérivable en 0 telle que $f(0) = 0$, donner la limite quand n tend vers +infini de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(k/n^2)$.

(2) Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \exp(-x^n)\,\mathrm{d}x$ est équivalent à K/n.

Exercice 5.1.4.

(1) Soit E un e.v., f un endomorphisme de E , π_f son polynôme minimal.

a) Soit x dans E montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire de degré minimal P_x tq $(P_x(f))(x) = 0$.

b) Montrer de plus que $P_x | \pi_f$.

c) On pose $E_x = \{P(f)(x),\ P \in \mathbb{K}[X]\}$.
Montrer que c'est de dimension finie et que $\dim(E_x) = \deg(P_x)$.

d) Soient x, y dans E, on suppose que $E_x \cap E_y = \{0\}$.
Montrer que $P_{x+y} = \mathrm{ppcm}\,(P_x, P_y)$.

e) Montrer que si P_x est premier avec P_y alors $E_{x+y} = E_x \oplus E_y$.

f) Exhiber un endomorphisme n'admettant pas de polynôme minimal.

(2) (il restait 2min) Soit M une matrice de taille $n{\times}n$ avec $M(i,j) = \sin(i+j)$. Calculer son rang

---

Exercice 5.1.5.

(1) Soit E un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension n.

a) Soient u, v 2 endomorphismes. On suppose que :
(i) Pour tout x, la famille $(u(x), v(x))$ est liée,
(ii) l'un des endomorphismes au moins est de rang supérieur à 2.
Montrer que u et v sont liés dans $\mathcal{L}(E)$. Ce résultat est il toujours valable si on ne suppose plus (ii) ?

b) Soit f dans $\mathcal{L}(E)$ telle que $f^2 = -\operatorname{Id}$. Montrer que n est pair et que H de dimension $n-2$ admet un supplémentaire dans E stable par f.

(2) En live :
Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$. A quelle condition est elle orthogonale ? Quel est l'endomorphisme alors associé à M ?

Exercice 5.1.6.
On considère la matrice de taille $n \times n$ suivante

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ n-1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n-2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n-3 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & n-3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & n-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) On se place sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et on considère l'endomorphisme f associé à la matrice A dans la base canonique ; Déterminer f, donner son rang.

(2) f est-il diagonalisable sur $\mathbb{R}$?

Exercice 5.1.7.
Soit u un endomorphisme de E espace euclidien.

(1) On suppose qu'il existe λ et μ deux valeurs propres de u telles que $\lambda\mu \leqslant 0$.
Montrer qu'il existe $z \in E \backslash \{0\}$ tel que $u(z) \perp z$.

(2) On suppose que u est de trace nulle. Montrer qu'il existe x un vecteur unitaire de E tel que $u(x) \perp x$, d'abord dans le cas où u est autoadjoint puis dans le cas général.

(3) Montrer l'équivalence :
u est de trace nulle $\Longleftrightarrow$ il existe un base orthonormale telle que la matrice de u dans cette base ne comporte que des zéros dans la diagonale.

(4) On pose : $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Montrer qu'il existe $P_0 \in SO(3)$ telle que $P_0^{\mathrm{T}} A P_0$ ne comporte que des 1 dans la diagonale.
Résoudre $P^{\mathrm{T}} A P = A$ dans SO(3).

Exercice 5.1.8.

(1) Soit A une matrice de taille $2n+1$ avec des 0 sur la diagonale et des 1 ou -1 partout ailleurs.
Montrer que $\mathrm{Rg}(A) \geqslant 2n$ (d'ailleurs l'énoncé était faux, il disait $\mathrm{Rg}(A) = 2n$).

(2) Traduire le pb suivant sous forme matricielle : on prend $2n+1$ réels > 0, si on en enlève un on peut toujours découper le reste en 2 parties de même cardinal et dont la somme des éléments est identique.

(3) Montrer que tous les éléments du pb précédent sont égaux.

Exercice 5.1.9.

(1) Soit E un $\mathbb{C}$-e.v., on note $C(f)$ le commutant d'un endomorphisme f.
 a) On prend $E = \mathbb{C}^3$, et on suppose f nilpotente.
  (i) Montrer que l'indice de nilpotente est inférieur à 3. On le note p.
  (ii) On suppose $p = 2$. Que vaut $\mathrm{Rg}(f)$? Que vaut $\dim(C(f))$?
  (iii) $p = 3$. Même questions.
 b) On veut montrer par récurrence que $\dim(C(f)) = \sum\limits_{i=1}^{m} n_i^2$ où $\sum\limits_{i=1}^{m} n_i = n$.
  (i) Mq c'est vrai si f est diagonalisable.
  (ii) On pose $g = f - \lambda\,\mathrm{Id}$, où λ vap de f. Montrer que $C(f) = C(g)$.
  (iii) Soit (e) une base de E dont les r premiers vecteurs constituent une base de $\mathrm{Im}(g)$. Donner la forme de la matrice de g dans (e), et celle de tout endomorphisme de $C(g)$.
  (iv) Étudier l'application de $C(g)$ dans $\mathcal{L}(E)$ qui à h associe $\tilde{h}$, qui représente h induit sur $\mathrm{Im}(g)$. Conclure.

(2) Soit $v(n)$ la puissance de 2 dans la décomposition de n en facteurs premiers. Soit q impair. Calculer $v(3^q + 1)$.

Exercice 5.1.10.

(1) A l'aide de Maple, déterminez l'ensemble des Y telles que $AY - YA = A$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrez que c'est un espace affine, donnez sa dimension.

(2) On suppose qu'il existe M telle que $AM - MA = A$. Calculer $A^pM - MA^p$. En déduire que si $P(X)$ est un polynôme annulateur de A, $XP'(X)$ en est un autre.
 a) Qu'en déduit on sur le polynôme minimal de A. En déduire que A est nilpotente.
 b) On suppose A nilpotente d'ordre n (les matrices sont de tailles n). Soit f l'endomorphisme associé à A dans la base canonique, montrez que dans une base bien choisie, la matrice de f est : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$
 Montrez que $AY - YA = A \Leftrightarrow \exists P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], Y = M + P(A)$.

(3) Réciproquement, si A est nilpotente d'ordre n, montrez que $\exists M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), AM-MA = A$.
M est elle diagonalisable ?

Exercice 5.1.11.

(1) Soit n un entier naturel non nul. On note $v_2(n)$ l'exposant de 2 dans la décomposition de n en facteurs premiers. On remarque que $v_2(2p+1) = 0$ et $v_2(2p) = 1 + v_2(p)$.
  a) Calculer $v_2(3^k - 1)$ pour k impair.
  b) Calculer $v_2(3^k + 1)$ pour k pair.
  c) Calculer $v_2(3^k + 1)$ pour k impair.
  d) Calculer $v_2(3^k - 1)$ pour k pair.
  e) On se place dans $\mathbb{U}(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})$. On suppose n supérieur ou égal à 3. Quel est l'ordre de 3 ?

(2) Soit un ensemble E de cardinal n. Calculer $\sum\limits_{X\in\mathcal{P}(E)} |X|$.

Exercice 5.1.12.

(1) Soit $\mathrm{SL}\,(2,\mathbb{Z}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ où $(a,b,c,d) \in \mathbb{Z}^4$ et $ad - bc = 1$.
  a) Mq $\mathrm{SL}\,(2,\mathbb{Z})$ est un groupe pour pour le produit matriciel.
  b) On pose $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}\,(2,\mathbb{Z})$.
  Calculer J^2, T^n, MJ et MT^n pour $n \in \mathbb{Z}$.
  c) Déterminer le plus petit sous-groupe de $\mathrm{SL}\,(2,\mathbb{Z})$ contenant T et J.

(2) Soit A l'ensemble des matrices nilpotentes à coefficients réels.
Déterminer $\mathrm{Vect}(A)$.

Exercice 5.1.13.

Soit A un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ stable par multiplication.

(1) Supposons que $I_n \notin A$.
  a) Montrer que $M^2 \in A \implies M \in A$.
  b) En déduire que $E_{i,i} \in A$.
  c) Conclure

(2) Pour $n = 2$, montrer que A est isomorphe à l'algèbre des matrices triangulaires supérieures.

Exercice 5.1.14.

Soit $g\ : x \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

(1) a) Domaine de définition de g.
  b) Étudier la continuité de g.

(2) Soit $g_n \ : x \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\int_0^n \frac{\cos(tx)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que g_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

b) En déduire que $g \in \mathcal{C}^1$.

c) Trouver une équation différentielle vérifiée par g et en déduire g.

5.2. Math 2.

Exercice 5.2.1. Soit A une matrice réelle telle que A^k tend vers 0 à l'infini, B un vecteur réel. Le but de l'exo est d'utiliser (avec Maple bien sûr) après l'avoir démontré l'algorithme permettant de trouver l'unique solution à $X = AX + B$ ($X = (I - A)^{-1}B$).

(1) Montrer que $I - A$ est inversible et donner son inverse.

(2) On note $X_{k+1} = AX_k + B$ une suite de vecteurs définis à l'aide de X_0. le but de la question est de montrer que X_k tend vers la solution de l'équation ci-dessus.
L'énoncé propose d'exprimer $X_{k+r} - X_k$ en fonction de $X_1 - X_0$ (ensuite on dit suite de Cauchy et ça converge puis en passant à la limite on a bien $\lim\limits_{k\to+\infty} X_k =$ solution de l'équation) mais en reconnaissant une suite arithmético-géométrique ça torche beaucoup plus vite (Cf solution et c'est d'ailleurs le seul intérêt de l'exo pour ceux qu'aurait l'intention de le chercher). Ça finissait en demandant d'exprimer X_k en fonction d'une formule bizarre en fonction de $X_1 - X_0$ (qui n'était que le passage à la limite en r de la formule des $X_{k+r} - X_k$).
Cf. activités algorithmiques...

(3) Exemple en cherchant $MX = B$ avec $M = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.
En fait on peut reformuler $MX = B$ en $AX + B = X$ (je vous laisse trouver A tout seul et si ya des pbs n'hésitez pas) et on se replace dans le cadre précédent.
Ensuite il fallait calculer la norme subordonnée à la norme infinie de A^k en l'exprimant A^k (elle m'a fait exprimer A^k en fonction de A^2 et A en divisant X^k par le polynôme minimal mais je n'ai pas compris à quoi ça servait) puis on demandait de majorer $X_k - L$ sous la forme $ar^k\|B\|$ (avec $L = \lim\limits_{k\to+\infty} X_k$ et sachant que $X_0 = 0$ (ça se fait avec la formule bizarre), j'ai mis du temps à m'en apercevoir d'ailleurs et elle aussi).
Ya d'autres questions mais je m'en rappelle plus trop et leur intérêt est vraiment limité (comme calculer X_{20}...... avec Maple par exemple .....).

(4) Là c'est la partie que j'ai pas trop lu mais ça se faisait en reprenant M mais juste sa partie triangulaire supérieure (je crois ....) et on réitérait l'algorithme (ou un truc du genre) en rerépondant à toutes les sous questions de la 3) (SoBORISfique) puis il fallait comparer les méthodes .....

Exercice 5.2.2.
Projecteurs orthogonaux.

(1) Montrer que : p est un projecteur orthogonal $\Leftrightarrow p = p^*$.

(2) p et q sont des proj orthog : montrer que $p \circ q$ est un proj orthog $\Leftrightarrow p \circ q = q \circ p$.

(3) Soient M et R deux matrices réelles de taille 4 avec $M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,
$R = \begin{pmatrix} S & T \\ U & V \end{pmatrix}$ blocs de taille 2.
Condition sur S, T, U, V pour que MR et R soient des proj orthog.

(4) p et q sont des proj orthog, μ vap (vep x) de $p \circ q$:
mq : $q(x) - \mu x$ élément de l'orthog de $\mathrm{Im}(p)$.
mq : $\|q(x)\|^2 = \mu \|x\|^2$.
mq : $\mathrm{Sp}(p \circ q) \subset [0, 1]$.

Exercice 5.2.3.
$u \in \mathbb{U}$ $(u = e^{i\theta})$
$M(u) = (\frac{a}{2}(u + \frac{1}{u}), \frac{b}{2i}(u - \frac{1}{u}))$, on donne $M(\mathbb{U}) =$ ellipse d'equation $(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ou encore $x = a\cos(\theta)$ $y = b\sin(\theta)$
On note $M(\mathbb{U}) = \varepsilon$,
Ensuite C est le cercle d'équation $x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0$.

(1) $M(u)$ appartient à $C \cap \varepsilon \Leftrightarrow Q_c(u) = 0$ où $Q_c(u)$ est donné et est un polynôme moche de degré 4 dont je ne me rappelle que 2 coefficients que $a_4 = a^2 - b^2 = a_0$.
(2) Montrer que $M(u_1), M(u_2), M(u_3), M(u_4)$ cocycliques $\Rightarrow u_1 u_2 u_3 u_4 = 1$ et admettre la réciproque.
(3) Montrer qu'il existe un unique cercle $C(u_0)$ tel que u_0 soit racine d'ordre 3 de Q_c. Trouver les coordonnées de son centre en fonction de a, b et u_0.
Tracer $C(u_0)$ et ε pour a, b et u_0 donnés, par exemple $a = 12$, $b = \frac{12}{2}$ et $u_0 = e^{i12}$.
(4) u_0 tel que $C(u_0) \cap \varepsilon$ est un singleton.
(5) Pas fait

Exercice 5.2.4.
Soit la suite u_n définie par $u_0 > 0$, $u_1 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{{u_n}^2}{1 + u_n u_{n-1}}$.

(1) Calculer la limite de u_n.
(2) On pose $x_n = \dfrac{\ln(u_n)}{2^n}$. Montrez que x_n converge à l'aide d'une série.
(3) Montrez que $u_n \sim k^{(2^n)}$ pour un certain k que l'on déterminera le plus précisément possible.

Exercice 5.2.5.
Soit P la parabole : $y^2 = 2x$ paramétrée par $M_t(t^2/2, t)$. On fixe un point $A(a, b)$ tel que $1 < 2a < b^2$. Soit Γ_A : le lieu des points H_t projeté orthogonal de A sur la tangente en M_t.

(1) Équation paramétrée de Γ_A : $(X(t), Y(t))$.
(2) Montrer que A est le seul point double de Γ_A.
(3) CNS sur t pour que la normale en M_t passe par A. Montrer que M_t appartient alors à Γ_A.

(4) On prend $a = 45/2$ et $b = 21$. Calculer les coordonnées de H_1, H_2, H_3 pieds des hauteurs passant par A.

(5) Tracer simultanément sous maple Γ_A et P.

Exercice 5.2.6.
On pose $J_n = \int_0^1 x^n(1-x)^n \mathrm{d}x$.

(1) Amuse toi avec Maple ! (Enfin, l'énoncé proposait plutôt une version édulcorée "À l'aide de Maple...")

a) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 x^n(1-x)^m \mathrm{d}x = \frac{n!m!}{(n+m+1)!}$.

b) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} \mathrm{d}x = \frac{22}{7} - \pi$.

En déduire que $\dfrac{3958}{1260} < \pi < \dfrac{3959}{1260}$, ainsi que l'âge du second (parce que celui du capitaine est donné en hypothèse).

(2) Laisse Maple se reposer un moment ! (non explicitement écrit).
Soit $A(x)$ le quotient dans la division euclidienne de $x^4(1-x)^4$ par $1+x^2$.

a) Montrer (sans calculer $A(x)$) que l'on a : $\dfrac{4}{1+x^2} = \dfrac{A(x)}{1+\dfrac{x^4(1-x)^4}{4}}$.

b) On pose $L_k = \displaystyle\int_0^1 A(x)\, x^{4k}(1-x)^{4k}\mathrm{d}x$. Montrer que $\pi = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^k L_k$.

(3) Fais la brute avec Maple !

a) Calculer $A(x)$ et $B(x)$.

D'où qu'il sort $B(x)$? Mais si, voyons : $B(x) = \dfrac{1}{2}(A(x) + A(1-x))$. (À noter que le véritable énoncé ne laissait aucun suspense pour $B(x)$.)

b) Montrer que : $B(x) = a + b\,x(1-x) + c\,x^2(1-x)^2 + d\,x^3(1-x)^3$, où a, b, c, d sont trois réels... euh non, quatre...

(4) Achève Maple et tes neurones ! (Euh, là j'ai pas eu le temps de le faire (perdu du temps sur l'âge du second...), ni de le noter dans un coin de ma mémoire. Désolé pour ceux qui voulaient calculer π sous la forme d'une série alternée.)

Exercice 5.2.7.
Chercher les solutions 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$ de $y''+y = |\sin x|$. En donner aussi la décomposition en série de Fourier.
Voir exo 3.1.2 question (1) (Oral 2008) que j'avais corrigé.
Il fallait résoudre cette équa diff (en première question la même sans les valeurs absolues), il a posé plein de questions pas intéressantes sur les recoupements, et surtout sur ce que Maple renvoyait (il fallait l'utiliser pour résoudre l'équa diff, dessiner les solutions, chercher des développements en série de Fourier, du bonheur quoi !).

Exercice 5.2.8.
Soit a un réel strictement supérieur à 1. On pose $u(1) = 2$ et $u(n+1) = 2 - a/u(n)$. Si $u(n) = 0$ alors $u(n+1) = \infty$. Si $u(n) = \infty$, $u(n+1) = 2$.
Ainsi, $u(0) = \infty$ et $u(n)$ appartient à $\mathbb{R} \bigcup \infty$

(1) Montrer que $u(n)$ ne converge pas.
(2) Avec Maple :
  a) Écrire une fonction prenant en entrée a et n et renvoyant la séquence des n premiers termes de la suite $u(n)$.
  b) À l'aide de cette fonction, montrer que pour $a = 8 - 2\sqrt(3)$, $u(n)$ est 12-périodique.
(3) On écrit a sous la forme $a = 1 + \tan(\theta)^2$ avec θ dans $]0, \pi/2[$.
  a) Montrer que $u(n) = 1 + \tan(\theta)/\tan(n\theta)$. Si $n\theta = 0[\pi]$ alors $u(n) = \infty$.
  b) Soit $P = \{a \mid u(n) \text{est périodique}\}$.
  Montrer que $P = \{1 + \tan(r\pi)^2 \mid r \text{est un rationnel dans }]0, 1/2[\}$.
  Montrer que P est dense dans $[1, +\infty[$.
  c) À l'aide de Maple, donner tous les a tels que $u(n)$ est 12-périodique.

Exercice 5.2.9.
En fait cet oral aurait du s'appeler Maple 1. Je n'ai pas l'énoncé en entier car je ne l'ai pas abordé entièrement. Je me souviens cependant que le résultat final à démontrer est le suivant : si r est un rationnel alors e^r est irrationnel.
On pose pour n entier $P_n(x) = x^n(1-x)^n/n!$.

(1) a) Calculer P_n pour n de 0 à 5 avec Maple.
  b) Avec Maple vérifier que $P_n(0)^{(k)}$ et $P_n(1)^{(k)}$ sont des entiers relatifs pour $k = 0, \ldots, 15$ et $n = 0, \ldots, 5$.
  c) Montrer ce résultat en distinguant les cas $0 < k < n$, $n < k < 2n$ et $k > 2n$.
(2) J'ai fait la question suivante mais je ne me souviens plus de cette question. Je sais par contre qu'on a fait un truc du genre dans le premier devoir libre.

Exercice 5.2.10. On étudie la suite de fonction $f_n(x) = \frac{x^n}{sh(x)^n}$.

(1) Mq f_n est intégrable sur $]0, +\infty[$. On pose $u_n = \int\limits_0^{+\infty} f_n$.
(2) Mq u_n converge, et calculer sa limite.
(3) a) Donner le DSE de $\frac{1}{(1-x)^{m+1}}$.
  b) En déduire $f_n(x) = \sum\limits_{p=0}^{+\infty} x^n 2^n \begin{pmatrix} p+n-1 \\ n \end{pmatrix} e^{-x(n+2p)}$. (erreur de recopiage possible, je n'ai pas revérifié)
  c) En déduire $u_n = \ldots$, une expression donnée, dont je ne me rappelle pas, qui consiste à intégrer terme à terme.
(4) 2 autres questions non abordées

Exercice 5.2.11.
Soit F_n le n-ième terme de la suite de Fibonacci, on pose $D_n = \det(F_{|i-j|})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ (cf. exo 4.2.14 oral 2008).

(1) Calculer D_n pour $n = 1 \dots 20$ et le mettre sous forme d'un produit de facteurs premiers.

(2) Soit $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in M_n(\mathbb{C})$ inversible. On note A_{ij} le cofacteur (i,j).

a) Montrer que $\det[(a_{ij})_{2\leqslant i,j\leqslant n-1}]\times \det(A) = A_{1,1}A_{n,n} - A_{1,n}A_{n,1}$ en étudiant le produit

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \cdots & \cdots & A_{(n-1)1} & A_{n1} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \cdots & \cdots & A_{n(n-1)} & A_{nn} \end{pmatrix} \times A$$

b) Montrer que la relation est toujours valable si A est non inversible en considérant $A - zI_n, z \in \mathbb{C}$.

c) Calculer D_n.

Solution 1.1.1 (Abdessamad Benzakour) Note :
Examinateur : *?*

(1) la encore c'est le même exo que Jonathan.
On se ramène a des fonctions 1 périodiques.
On pose $g(x) = F(x) - 2x$ qui est périodique, $p(x) = h(x) - x$, on a le problème équivalent a :
p périodique et p vérifie une equation fonctionnelle de la forme
$$p(g(x) + 2x) = 2p(x) - g(x).$$
Donc p stable par l'application ψ qui à f associe $1/2(f(g(x) + 2x) + g(x))$.
On se place sur l'espace $\mathcal{C}_1$ des fonctions continues 1-périodiques muni de la norme infinie sur $[0, 1]$. $\mathcal{C}_1$ est stabilisé par ψ vu que g l'est aussi puis là on pense a redémontrer le théorème du point fixe (celui hors programme).
ψ est contractante : $\psi(f_1 - f_2)(x) = \dfrac{1}{2}(f_1(g(x)+2x) - f_2(g(x)+2x)$ donc $\|\psi(f_1 - f_2)\| \leqslant \dfrac{1}{2}\|f_1 - f_2\|$.
On montre que $\mathcal{C}_1$ muni de cette norme est un banach (soit à la main soit en utilisant l'isométrie de $E = \{f \in \mathcal{C}([0, 1] \mid f(0) = f(1)\}$ sur $\mathcal{C}_1$).
Le théorème du point fixe s'applique et on a le résultat.

(2) Soit $F = \mathrm{Vect}(x, y, z) = \mathrm{Vect}(x, T(x), T^2(x))$, $T(F) \subset F$. Puis $T^3(x) = T(x) + x$. On obtient alors les mêmes relations avec $y = T(x)$ et $z = T^2(x)$ donc, si $t = T_{|F}$, le polynôme $P = X^3 - X - 1$ est annulateur de t.
On vérifie aussi que P n'admet pas de racines rationnelle donc P est irréductible sur $\mathbb{Q}[X]$ car $P = QR$ entraîne que Q ou R est de degré 1.
Supposons que $\dim F \leqslant 2$, π_t, le polynôme minimal de t, est de degré $\leqslant 2$ et il divise P ce qui est impossible.
Conclusion : $\dim F = 3$, la famille (x, y, z) est libre.

Solution 1.1.2 (Yohann Salaün) Note : 7
Examinateur : *celui de la salle W avec les tableaux qui montent et qui descendent (trop fun), il est très sympa et comparé aux autres que j'ai eu aux ENS il parle et aide bien (faut dire que son exo était pas facile).*

(1) Avant qu'il me donne son indication j'ai pas dit grand chose (d'ailleurs il est d'abord parti en me laissant le temps de chercher tout seul d'abord mais ça a servi à rien). On peut remarquer que K est fermé borné (sûrement compact d'ailleurs mais pas prouvé) et comme $\|f\| < 1$ pour tout f de K, $N(K, \delta) = 1$ pour $\delta \geqslant 0$ mais ça servira pas à grand chose pour la suite....
On suit d'abord l'indication (démo principalement faite avec les mains ....)
Avec les mains on a $N(K, \delta) \leqslant d/\delta^2$ avec $d = 1/2 \sup(\|x - y\|)$ pour $x, y \in K$. On veut une autre inégalité donc on cherche un recouvrement incomplet et assez grossier :
On sait qu'il existe une boule ouverte de rayon r dans K (son intérieur est non vide). On considère donc (pour δ suffisamment petit sinon ça nous intéresse pas) une union de boules ouvertes de rayon δ tq elles soient disjointes 2 à 2 et incluses dans la boule de rayon r. Maintenant il faut montrer que le cardinal de cette famille est inférieur à N(boule de rayon r, δ). On peut remarquer que 2 centres différents ne peuvent pas être dans une même boule de rayon δ donc il existe une application injective qui au centre de ces boules associe l'une des boules du recouvrement optimal (contenant ce centre) d'où l'inégalité en recouvrant la boule de rayon r ci dessus par les petites boules dans le carré bleu ci dessus (en imposant la tangence des boules les unes entres elles) on obtient

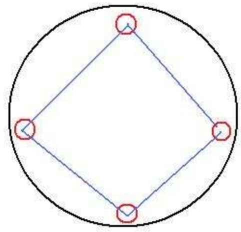

FIG. 1. Le disque

$N(K,\delta) \leqslant$ coté du carré bleu$^2/\delta^2$.
Rque : je me suis raté sur le dessin,il faudrait que les 4 boules rouges soient dans le carré bleu mais bon ...
Finalement par inégalité on a $N(K,\delta) \sim cte/\delta^2$ pour δ très petit.
Maintenant on revient au cas qui nous intéresse et on impose $\delta = 2^{-n}$ pour plus de facilité, on verra que ça change rien pour la fin (enfin c'est ce qu'il ma dit vu qu'on y est pas arrivé ....)
On cherche donc une famille de fonctions de K qui pourraient servir à recouvrir K à l'aide de boules. On considère donc les fonctions f tq $f(0) = 0$ puis affine de pente + ou - 1 sur $[0, 2^{-n}]$ et continue comme ça jusqu'à arriver à 1. On sait qu'il y en a 2^{2^n} et avec les mains (et un joli dessin surtout) on prouve que les boules centrées en ces fonctions sont disjointes 2 à 2 car la distance entre 2 fonctions est minorée par 2×2^{-n} d'où la minoration de $N(K, 2^{-n})$.
Après je crois qu'il aurait fallu montrer que c'est plus petit que $2^{2^{n+1}}$ mais j'en suis pas du tout sûr et on trouverait un truc du genre $N(K,\delta) \sim cte\times 2^{1/\delta}$ soit $\ln g(\ln(N(K,\delta))) \sim -\ln(\delta)$.
Rque : les 3 dernières lignes ne sont pas certaines mais ça me paraît pas complètement incohérent.

(2) N'ayant aucune idée je me dis qu'on va chercher le cas $p = 2$ mais c'est en fait inutile. Le mieux à faire c'est de dénombrer les polynômes de degré 2 unitaires mais réductibles donc de la forme $(X-a)(X-b)$. Et en évitant de compter 2 fois $(X-a)(X-b)$ et $(X-b)(X-a)$ comme moi on trouve qu'il y en a $\sum\limits_{a=0}^{p-1}\sum\limits_{b=0}^{a} 1$ soit $p(p+1)/2$. Or il y a p^2 polynômes unitaires de degré 2 donc il y a $p^2 - p(p+1)/2$ polynômes irréductibles unitaires de degré 2 dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Solution 1.1.3 (Jonathan Donier) Note :
Examinateur : *?*
Merci à abdes d'avoir rédigé la solution du 1er exo, et pour la suite :

Posons $g_0(x) = \begin{cases} 1-3x & \text{sur } [0;1/3] \\ 1+3x & \text{sur } [-1/3;0] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et pour $n > 0$, $g_n(x) = g_0(x-n)$.

Posons ensuite pour u suite d'éléments de $\{0,1\}$, $g_u = \sum\limits_{k=0}^{n-1} u_n f_n$.

On montre facilement que les boules de centre g_n et de rayon $1/3$ sont disjointes.

Montrons ensuite que $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ est indénombrable :
on pose A l'ensemble des suites qui finissent par que des 0. A est dénombrable (c'est l'équivalent en base 2 des nombres décimaux), puis $B = \{0,1\}^{\mathbb{N}} \setminus A$: alors B indénombrable ssi $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ indénombrable.
Définissons $h : B \to]0;1]$, $u \mapsto 0, u_0...u_n...$ en base 2. h est bijective et $]0,1]$ dénombrable donc B aussi et $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ aussi.
Supposons alors qu'il existe une suite dense (f_n) dans les fonctions bornées. Pour tout u suite de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, il existe n dans $\mathbb{N}$ tq f_n est dans la boule de centre g_u et de rayon $1/3$. Cela permet d'établir une injection de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{N}$ donc $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ est dénombrable : contradiction.
D'où le résultat.
On peut reprendre cet exercice en considérant plusieurs cas :

- Sur $\mathcal{C}(\mathbb{R})$: on peut refaire la démonstration ci-dessus ou proposer la version qui suit.
  Soit $(f_n) \in \mathcal{C}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$, sur $[n, n+1]$ on pose $\eta_n = \sup\{\eta > 0 \mid |x-y| \leqslant \eta,\ (x,y) \in [n,n+1]^2,\ |f_n(x) - f_n(y)| \leqslant \frac{1}{3}\}$ (i.e. c'est le module de continuité de f_n sur $[n,n+1]$ pour $\varepsilon = \frac{1}{3}$).
  On définit alors la fonction g qui vaut 0 si $x < 0$ et sur $[n, n+1]$, elle est affine par morceaux, vaut 0 en n, 1 en $n + \eta_n$ et 0 sur $[n + 2\eta_n, n+1]$.
  Supposons que $\|f_{n_0} - g\| \leqslant \dfrac{1}{4}$ alors $f_{n_0}(n_0) < \dfrac{1}{4}$ et $f_{n_0}(n_0 + \eta_{n_0} > \dfrac{3}{4}$ ce qui amène à une contradiction car $\dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{4} > \dfrac{1}{3}$!
- Sur $\mathcal{C}([a,b[)$, il suffit de reprendre la démonstration ci-dessus avec $f\left(\frac{\pi}{2}\frac{u-a}{b-a}\right)$.
- Sur $\mathcal{C}(]a,b]$ on fait une symétrie en utilisant le deuxième cas.
- Sur $\mathcal{C}([a,b])$: cela devient plus intéressant. On fait une homothétie-translation pour se ramener au cas de $\mathcal{C}([0,1])$, ce qui simplifiera les notations.
  Soit $E_k = \{\frac{j}{k},\ j \in [\![-k^2, k^2]\!]\}$, $\mathcal{F}_k = \{f$ affines par morceaux $\mid f_{|[\frac{p}{k}, \frac{p+1}{k}]}$ affine $\mid f(\frac{p}{k}) \in E_k\}$ pour $k \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0,k]\!]$.
  $\mathcal{F}_k$ est un ensemble fini donc $\displaystyle\bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} \mathcal{F}_k$ est dénombrable.
  Soit $g \in \mathcal{C}([0,1])$, on pose $M = \|g\|_\infty$. g est uniformément continue et donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe η_ε tel que $|x - y| \leqslant \eta_\varepsilon$ entraîne $|g(x) - g(y)| \leqslant \varepsilon$.
  On prend k assez grand pour que $\dfrac{1}{k} \leqslant \eta_\varepsilon$ et $k \geqslant M$. Alors il existe $f_{n_0} \in \mathcal{F}_k$ tel que $\|f_{n_0} - g\|_\infty \leqslant \varepsilon$: il suffit de prendre, pour $j \in [\![0,k]\!]$, $f_{n_0}(\frac{j_0}{k})$ où $|\frac{j_0}{k} - g(\frac{j}{k})| \leqslant \dfrac{1}{k}$.

Solution 1.1.4 (Henri ?) Note :
Examinateur : *J'ai passé toute l'heure à essayer des trucs, mais l'examinateur était quasi-muet, il ne donnait aucune aide. Il vous regardait vous dépatouiller, et faisait des signes de la tête pour approuver, ou pour vous dire que votre piste est mauvaise. Il était assez âgé, et semble être de l'ancienne école. Je n'ai donc pas de corrigé pour l'exercice... et je sors frustré de cet oral. J'imagine que c'est fait exprès... Attendons de voir la note.*
Soit il manque une condition, soit c'est complètement débile : on prend pour f une permutation circulaire de $(0, 2009, 2012)$ qui laisse invariant les autres valeurs de x...
Cherchons maintenant s'il y a des solutions continues :

- Comme $f^3 = \mathrm{Id}$ on en déduit que f est bijective.
- Vu que f est continue alors on sait que f est nécessairement strictement monotone et, compte tenu de la règle des signes, f est strictement croissante.
- On a alors $f(2009) > f(0) = 2009$ puis $f^2(0) = f(2009) > 2009$ et enfin $f^3(0) = 0 > f(2009) > 2009$ ce qui est impossible.

Solution 1.1.5 (Simon Watier) Note :
Examinateur : *?*
Dans un premier temps, on utilise le fait que A annule un polynôme scindé à racines simples et est de facto diagonalisable.
On note $a(t)$, $b(t)$ et $c(t)$ les sep associés respectivement aux vap -1, 1 et 2.
On a $a(t) + b(t) + c(t) = n$. En utilisant la trace $\mathrm{Tr}(A(t)) = -a(t) + b(t) + 2c(t)$. Or la trace étant continue et A aussi, on a une application continue à valeurs dans $\mathbb{Z}$: c'est une constante!
De même $\det(A(t)) = (-1)^{a(t)}2^{c(t)}$ est une constante donc sa valeur absolue aussi ... donc $2^{c(t)}$ est constante ... $c(t)$ est constante ... on déduit des deux premières équations que a et b le sont aussi Les matrices $A(t)$ sont toutes semblables à la même matrice diagonale : Elles sont semblables à $A(0)$.
On a bien trouvée une application qu'elle est bien ...
Ensuite ça se corse un peu ... On raisonne par Analyse ... tout court (j'ai pas eu le temps de synthétiser ...)
Supposons qu'on ait notre belle fonction P, en dérivant $P(t)A(0)P^{-1}(t) = A(t)$, on obtient la relation $A' = P'P^{-1}A - AP'P^{-1}$ ... on introduit $Q = P'P^{-1}$ et on montre que si on a Q, on a P (equa diff) je me souviens plus trop de la fin ...

Solution 1.1.6 (François Dayrens) Note : 7
Examinateur : *Salle W , 30/06, 17h (last student of the day).*
Très gentil, écoute tout ce qu'on a à dire, redirige vers des solutions plus simples et dirige l'exo mais laisse quand même réfléchir aux questions intermédiaires.
P_A scindé racines simples car distinctes (car on est en dimension 2) donc A diag et $P_A = \det(A - XI_2) = X^2 - (\lambda + \mu)X + \lambda\mu$. Or A a ses coeff dans $\mathbb{Z}$ et $\det(A) = 1$ par conséquent $\mu = \frac{1}{\lambda}$ et $\lambda + \mu \in \mathbb{Z}$.

- Soit (e_1, e_2) une base diagonalisante, on peut choisir e_1 associé à λ avec $|\lambda| < 1$. En effet, λ et $1/\lambda$ sont distinctes donc $\lambda \neq \pm 1$ et si $|\lambda| > 1$ on prend μ.
  Ainsi $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t.e_1) = f(A(t.e_1)) = f(A^n(t.e_1)) = f(\lambda^n t.e_1) = f(0)$ car $\lambda^n.t.e_1 \longrightarrow^{n\to+\infty} 0$ et f continue.
- On suppose $\lambda \in \mathbb{Q}$: $\lambda = \frac{p}{q}$, p et q premiers entre eux. Or $p/q + q/p \in \mathbb{Z} \Rightarrow q^2/p = kq - p \in \mathbb{Z} \Rightarrow p|q^2$. Contradiction rapide. Donc λ est irrationnel.
- On suppose qu'il existe un tel a... Dans ce cas $A(ae_1) = \lambda ae_1 \in \mathbb{Z}^2$, les composantes de ae_1 sont entières, λ irrationnel,, et comme $a \neq 0, e_1 \neq 0$ (vep) c'est impossible. Contradiction, of course.
- On évite le choix où e_1 est un vecteur de la base canonique, donc la droite n'est ni horizontale ni verticale, on écrit son équation sous la forme $y = \beta x$ et si $\beta \in \mathbb{Q}$, la droite passe par un point de coordonnées entières d'où L'existence du a de la question précédente. Contradiction, again.
- On utilise maintenant que $f\left(X + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \left(X + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = f(AX)$ avec $X = e_1$ pour en déduire que f est constante sur des droites parallèles, avec un dessin...
- Le but est maintenant de montrer que l'ensemble de toutes ces droites est dance dans $\mathbb{R}^2$ et comme f vaut $f(0)$ sur chacune de ces droites, par continuité f est constante sur $\mathbb{R}^2$.
  Les équations de ces droites sont de la forme $y = p + \beta(x + q)$, avec p et q entiers. On peut ramener tout point de $\mathbb{R}^2$ sur la droite par translation parallèle aux droites et comme l'ensemble des points intersection des droites et de $x = 0$ est dense dans $\mathbb{R}$ (je le montre après), on a une suite de droites qui cv vers l'intersection donc vers ce point, donc c'est dense sur $\mathbb{R}^2$.
- $H = \{y \in \mathbb{R} \mid y = p + \beta q$ avec p, q entiers. $\}$, ce sont les points d'intersection....
  H est un sous groupe additif de $\mathbb{R}$ donc de la forme $a\mathbb{Z}$ ou dense... Une petite démo par

l'absurde ; si $H = a\mathbb{Z}$ alors $\forall p, q$, $\exists r \in \mathbb{Z} \mid p + \beta q = ar$.
$p = 1$, $q = 0$, $a = 1/r \in \mathbb{Q}$ et $p = 0$, $q = 1$, $\beta = ar \in \mathbb{Q}$, contradiction....
Donc H dense dans $\mathbb{R}$, f constante sur $\mathbb{R}^2$, ouf. De plus, les fonctions constantes sont bien solutions...

Reste à traiter le cas $e_1 = (0, 1)$ ou $(1, 0)$ ou si A est seulement trigonalisable...

Solution 1.2.1 (Casimir Emako Casianou) Note :
Examinateur : *donne des indications.*

(1) ψ est à valeurs dans les formes linéaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ donc l'espace de départ et d'arrivée sont de même dimension n^2.
ψ est injective :
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) / \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{Tr}(AM) = 0$ en choisissant $M = A^*$ on a $\mathrm{Tr}(A^*A) = 0$ en faisant le produit matriciel, on a $\sum\limits_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} |a_{kl}|^2 = 0$ d'où la conclusion.

(2) Par récurrence on montre que $(AM)^n = A^n M^n$:
pour $n = 2$ $(AM)^2 = A(MA)M = AAMM$ car $MA = AM$.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ montrons $\mathcal{P}(n+1)$: $(AM)^{n+1} = A(MA)^n M = A(AM)^n M = A(A^n M^n)M$ d'où le résultat .
On en déduit que AM est nilpotente,or $\mathbb{C}$ est clos d'où AM est trigonalisable et n'admet que 0 comme valeur propre d'où $\mathrm{Tr}(AM) = 0$.

(3) Soit $(v_1, \ldots, v_k)$ 1 base de $\mathrm{Ker}(u)$ que je complète par $(v_{k+1}, \ldots\ldots\ldots, v_n)$ en une base de E. $(u(v_{k+1}), u(v_{k+2}), \ldots\ldots\ldots, u(v_n))$ est une famille libre de F. On prend les λ_i on se ramène à $u\left(\sum\limits_{i=k+1}^{n} \lambda_i v_i\right) = 0$ donc cette somme est combinaison linéaire des $(v)_{i=1..k}$ donc $\lambda_i = 0$ car $(v)_{i=1..n}$ est une base de E. On impose la condition $v(v_i) = w(u(v_i))$ pour $i = k+1 \ldots n$. On peut donc la compléter en une base de F.

Solution 1.2.2 (Yohann Salaün) Note : 12
Examinateur : *?*

(1) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ tq $\forall x \in [a; \eta]$,

$$\|f(x) - f(a) - (x-a)f'd(a)\| \leqslant \varepsilon(x-a)|g(x) - g(a) - (x-a)g'd(a)| \leqslant \varepsilon(x-a)$$

(définition de la dérivée à droite), l'inégalité entraîne :

$$\|f(x) - f(a)\| \leqslant (x-a)||f'd(a)|| + \varepsilon(x-a) \text{ et } (x-a)g'd(a) - \varepsilon(x-a) \leqslant (g(x) - g(a))$$

donc $||f(x) - f(a)|| \leqslant (x-a)g'd(a) + \varepsilon(x-a) \leqslant (g(x) - g(a)) + 2\varepsilon(x-a)$
Soit $A = \{x \in [a, b] \text{ tq } ||f(x) - f(a)|| \leqslant (g(x) - g(a)) + 2\varepsilon(x-a)\}$ A est fermé par continuité de f et g et borné donc compact donc son sup est atteint Si le sup n'est pas b on applique le même raisonnement que précédemment et par inégalité triangulaire on trouve un x strictement plus grand que le sup et qui reste dans $[a, b]$ tout en vérifiant l'inégalité donc il y a contradiction et b est la borne sup de A ainsi :
$\forall \varepsilon > 0$ $|f(b) - f(a)|| \leqslant (g(b) - g(a)) + 2\varepsilon(b-a)$ je laisse au lecteur le soin de conclure.
Vous avez tous reconnu la démonstration de l'inégalité des accroissements finis !

(2) J'ai voulu recommencer avec les epsilon mais ça coinçait à un endroit alors il m'a dit avant que je parte qu'il fallait utiliser l'inégalité précédente mais je sais pas trop comment faire et je n'ai pas envie d'y réfléchir.

Solution 1.2.3 (Jonathan Donier) Note :
Examinateur : *?*

(1) $x^2 = y^2$ ssi $(x+y)(x-y) = 0$ ssi $x = \pm y$ car $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps. Les nombres de même carré se regroupent donc 2 par 2 dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ ce qui en fait $(p-1)/2$ donc en rajoutant 0 on en a $(p+1)/2$.

(2) $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ est un groupe multiplicatif d'ordre $p-1$ donc si $x = y^2$, $x^{(p-1)/2} = y^{p-1} = 1$. Réciproquement, $\{x \ tq \ x^{(p-1)/2} = 1\}$ est un groupe d'ordre inférieur à $p-1$ donc est strictement inclus dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$. D'après le th de Lagrange, son cardinal est inférieur à $(p-1)/2$. Or il y a déjà les $(p-1)/2$ carrés dedans d'après ce qui précède donc on a l'équivalence.

(3) $p > n$ car sinon p divise $(n!)^2$ et $(n!)^2+1$. Alors p supérieur à 3 et dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ $(n!)^2 = -1$ donc -1 est un carré d'ou en appliquant le résultat du 2), $(-1)^{(p-1)/2} = 1$ donc $(p-1)/2$ est pair donc $p = 4k+1$.

Solution 1.2.4 (Renaud Boussarié) Note :
Examinateur : *?*
Cf. exo 2.3.17 de la réduction des endomorphismes.

– $(i) \Rightarrow (ii)$ On prend $M = 0$, alors le polynôme caractéristique de B est $(-X)^n$ ce qui prouve que B est nilpotente.
Comme AM et $AM+B$ ont même polynôme caractéristique, $(AM)^2$ et $(AM+B)^2$ ont mêmes valeurs propres comptées avec leur ordre de multiplicité (on les trigonalise et on regarde ce qui se passe sur la diagonale).
On a alors, en utilisant le fait que $\mathrm{Tr}(B^2) = 0$ (B est nilpotente),

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}[(AM)^2] = \mathrm{Tr}[(AM+B)^2] &= \mathrm{Tr}[(AM)^2] + \mathrm{Tr}(AMB) + \mathrm{Tr}(BAM) + \mathrm{Tr}(B^2)\\ &= \mathrm{Tr}[(AM)^2] + 2\,\mathrm{Tr}(BAM)\end{aligned}$$

car $\mathrm{Tr}(AMB) = \mathrm{Tr}(BAM)$ (propriété de la trace, cf. proposition 2.1.7 page 185). On en déduit que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{Tr}(BAM) = 0$.
On applique ce résultat à $M = (BA)^*$ et on trouve bien que $BA = 0$. En effet, comme pour toute matrice carrée complexes $\mathrm{Tr}(PP^*) = \sum_{i,j} |p_{ij}|^2$, alors $\mathrm{Tr}(PP^*) = 0 \Rightarrow P = 0$.

– $(ii) \Rightarrow (i)$ La propriété est intrinsèque, il suffit de la prouver pour les endomorphismes associés aux matrices A et B. Soient u et v les endomorphismes associés à A et B, on a $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(v)$. On part alors d'une base de $\mathrm{Im}(u)$ $(e_1, \ldots, e_r)$ (en posant $r = \dim(\mathrm{Im}(u))$) que l'on complète en une base de $\mathrm{Ker}(v)$ et par trigonalisation de v, on obtient une base de E $(e_1, \ldots, e_n)$. Dans cette base, la matrice de u s'écrit $A' = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où A_1 est une matrice carrée d'ordre r, et celle de v : $B' = \begin{pmatrix} 0 & B_2 \\ 0 & B_4 \end{pmatrix}$ où B_4 est triangulaire d'ordre $n-r$ avec des 0 sur la diagonale.
Soit w un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$. Dans la base que l'on vient de mettre en évidence, on écrit la matrice M de w sous forme de blocs. On a alors

$$A'M = \begin{pmatrix} A_1M_1 + A_2M_3 & A_1M_2 + A_2M_4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A'M + B' = \begin{pmatrix} A_1M_1 + A_2M_3 & A_1M_2 + A_2M_4 + B_2 \\ 0 & B_4 \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{aligned} P_{uv}(x) &= \det(A_1M_1 + A_2M_3 - xI_r)\times\det(-xI_{n-r}) \\ &= \det(A_1M_1 + A_2M_3 - xI_r)\times\det(B_4 - xI_r) = P_{uv+w}(x). \end{aligned}$$

Solution 1.2.5 (Mylène Dupas) Note :
Examinateur : *?*

(1) Classique, on écrit $A = \mathrm{Id} + (A - \mathrm{Id})$. Comme $\|A - \mathrm{Id}\| < 1$ alors le cours nous dit que A est inversible, d'inverse $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(A - \mathrm{Id})^n$.
On a ensuite $\|A^{-1}\| \leqslant \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\|A - \mathrm{Id}\|^n \leqslant \dfrac{1}{1-a}$.

(2) On parachute l'égalité
$$ABA^{-1}B^{-1} = (A - \mathrm{Id})(B - \mathrm{Id})A^{-1}B^{-1} - (B - \mathrm{Id})(A - \mathrm{Id})A^{-1}B^{-1}$$
d'où $\|ABA^{-1}B^{-1}\| \leqslant 2\|A - \mathrm{Id}\|.\|B - \mathrm{Id}\|.\|A^{-1}\|.\|B^{-1}\| \leqslant \dfrac{2ab}{(1-a)(1-b)}$.

(3) On reprend l'égalité ci-dessus $ABA^{-1}B^{-1} = [(A-\mathrm{Id})(B-\mathrm{Id})-(B-\mathrm{Id})(A-\mathrm{Id})]A^{-1}B^{-1}$ d'où $\|ABA^{-1}B^{-1} - I_n\| \leqslant \dfrac{2b}{(1-a)(1-b)}\|A - I_n\|$ et si on prend $a < 1/4$ et $b < 1/4$ on obtient bien le résultat.

(4) Comme G est discret, dans toute boule fermée $\overline{B}(I_n, R)$ avec $R < 1$, il n'existe qu'un nombre fini d'éléments de G : montrons ceci par l'absurde.
Dans le cas contraire, il existe une suite (g_k) d'éléments distinct qui converge vu que la boule $\overline{B}(I_n, R)$ est compacte. Comme $R < 1$, vu la première question, la limite est inversible. Si $\lim\limits_{k\to+\infty} g_k = g$ alors $\lim\limits_{k\to+\infty} g_{k+1}^{-1}g_k = I_n$. I_n serait la limite d'une suite non stationnaire d'éléments de G ce qui contredit le caractère discret de G.
Comme $\overline{B}(I_n, R)$ ne contient qu'un nombre fini d'éléments de G différents de I_n, il existe un élément C qui réalise le minimum de $\mathrm{d}(X, I_n)$ pour $X \in G\setminus\{I_n\}$. On a en particulier $\|C - I_n\| \leqslant b$ et, en utilisant la question précédente, on obtient
$$\|ACA^{-1}C^{-1} - I_n\| < \|C - I_n\|$$
donc $ACA^{-1}C^{-1} = I_n$ soit $AC = CA$. De même $BC = CB$ et comme C commute avec A et B, il commute avec tous les éléments du groupe engendré par A et B.

Solution 1.2.6 (Alexandre Vérine) Note :
Examinateur : *Genre 40 ans, ressemble pas mal à Gary Sinise (le lieutenant Dan dans Forest Gump), laisse réfléchir 10 min à l'exo au tableau sans rien dire. Il discute et rend l'oral plutôt agréable. Il évite de laisser patauger dans un truc évident pour passer aux choses "plus intéressantes".*

(1) Montrer que K est fermé suffit, on construit une extractrice par récurrence :
Soit $y_i = \lim\limits_{n\to+\infty} x(\varphi_i(n))$ une suite de valeurs d'adhérences de $(x(n))$ et $y = \lim\limits_{i\to+\infty} y_i$.
On pose $\psi(0) = \varphi_0(0)$ puis, par récurrence, $\psi(i) = \varphi_i(n_i)$ où n_i est un entier tel que $\varphi_i(n_i) > \psi(i-1)$. On a alors $y = \lim\limits_{i\to+\infty} x(\psi(i)) \in K$. K est fermé.
Si $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x(\varphi(n)) \in K$ alors $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} x(\varphi(n)+1) \in K$ donc K est stabilisé par f.

(2) Montrer que si $x(n)$ à deux valeurs d'adhérence alors on obtient une contradiction.
Comme K est un compact et que $\mathrm{d}(x_n, K) \to 0$ alors il existe $y_n \in K$ tel que $|x_n - y_n| \to 0$. On a alors

$$|x_{n+1} - x_n| \leqslant |x_{n+1} - y_n| + |y_n - x_n| = |f(x_n) - f(y_n)| + |x_n - y_n| \to 0$$

donc $(x_{n+1} - x_n)$ est une suite qui tend vers 0. Il est alors classique de prouver que K est un intervalle $[a, b]$. On distingue les cas
- Si $x_n < a$ pour tout n, comme toute sous-suite de (x_n) qui converge vers un élément de K converge vers a. La suite (x_n) est bornée et n'a qu'une seule valeur d'adhérence (et on est en dimension finie !) donc elle converge.
- De même si $x_n > b$ pour tout n.
- S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_{n_0} \in [a, b]$ alors la suite est stationnaire donc elle converge.

Conclusion : (x_n) converge et K est un singleton.

Solution 1.2.7 (Pierrick Jamaux) Note :
Examinateur : *le même que celui de Alexandrov V, d'ailleurs je suis passé juste aprés.. il m'a dit "ouai il est super sympa"........... moyen ! je commence à écrire la différentielle de* det *et il me sort "oui ça sert à rien de me montrer que vous savez des choses, si vous êtes là je m'en doute !" sur un ton pas gentil du tout.. après sur la fin il m'a fait un peu chier parce que je crois qu'il voulait une autre solution, puis en plus il bégaillait un peu, donc j'avais du mal à comprendre ce qui ne lui plaisait pas ! Enfin bref, même les 2 meufs de Henry 12/3 qui assistaient m'ont dit à la fin "il était de mauvaise humeur le mec !" enfin à l'avenir j'amènerai plus de filles (the jam !), ça me réussi pas mal ! !*

(1) C'est "mignon".. égalité des dimensions et injective

(2) On a $P = f \circ t$ qui est un projecteur sur $\mathrm{Im}(f)$ on a donc directement d'après la définition de t, $t \circ f \circ t = t$. De même $f(x)$ appartient à $\mathrm{Im}(f)$, donc à l'image du projecteur, soit $P(f(x)) = f(x)$, d'où $f \circ t \circ f = f$.

(3) L'étude au voisinage de l'identité et de l'endomorphisme nul conduit à penser (avec un peu de chance je l'avoue !) que T n'est continue qu'au voisinage des automorphismes.
Démontrons-le :
- Si f est bijective alors $g = f^{-1}$ et $t = f$ qui est visiblement continu...
- Si f n'est pas bijective, on pose $f_q = f + \frac{1}{q+1}p$ ou p est un isomorphisme entre $\mathrm{Ker}(f)$ et $(\mathrm{Im}(f))^{\perp}$. Pour tout q, f_q est bijective par construction. En écrivant la matrice de f_q avec pour base de départ une base adaptée à la décomposition $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus (ker(f))^{\perp}$ et pour base d'arrivée une base adaptée a la décomposition $E = \mathrm{Im}(f) \oplus (Im(f))^{\perp}$, on obtient $T(f_q) = f_q^{-1}$ qui vaut $q\,\mathrm{Id}$ sur $(\mathrm{Im}(f))^{perp}$ alors que $T(f) = 0$ sur cet ensemble par définition. On a donc bien construit $f_q \to f$ quand $q \to +\infty$ avec $T(f_q)$ qui ne tend pas vers $T(f)$

D'où le résultat !

Solution 1.2.8 (Marc Jeanmougin) Note :
Examinateur : *?*

(1)

(2) Soit p le premier nombre premier rencontré (au sens large (-2 est premier)). On se place dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
Alors $P(x+p) = P(x)$ (assez immédiat). Donc p divise $P(x+kp)$ dans $\mathbb{Z}$. Le polynôme étant de degré fini $\geqslant 1$, il n'atteint la valeur ap et la valeur $-ap$ qu'un nombre fini de fois, donc p divise une infinité de valeurs différentes de valeurs que prend $P(\mathbb{Z})$... donc

on va dire que c'est fini.
C'est "fait maison" donc si ya une arnaque faut pas hésiter à le dire

---

Solution 1.2.9 (Jean Rochet) Note :
Examinateur : *Si c'est censé être le lieutenant Dan, il lui ressemble pas du tout... Pas grand chose à dire de plus, il est sympa (sympa comme tout le monde).*

(1) Idée tordue... On a $\exp A = I_2 + A + \dfrac{A^2}{2} + ...$ or la famille (I_2, A, A^2) est liée dans $\mathbb{C}[A]$ donc $\exp(A)$ est un polynôme de degré inférieur ou égale à 1 soit $\exp A = aI_2 + bA$, de même $\exp B = cI_2 + dB$ d'où si on montre que $a = c$ et $b = d$ ça serait déjà pas mal. Or on remarque que pour obtenir le polynôme de degré 1, on simplifie à l'aide du polynôme caractéristique dont les coeff sont fonction de λ_1 et λ_2 (les vap de A) d'où a et b sont fonctions de λ_1 et λ_2 ainsi si on montre que les vap de A sont les mêmes que les vap de B, alors $a = c$ et $b = d$ (tordue vous ne trouvez pas ?).
Or $\mathrm{Sp}(\exp(A)) = \mathrm{Sp}(\exp(B))$ d'où $\mathrm{e}^{\lambda_1} = \mathrm{e}^{\mu_1}$ et $\mathrm{e}^{\lambda_2} = \mathrm{e}^{\mu_2}$ or si $\mathrm{e}^a = \mathrm{e}^b$ alors $\mathrm{Re}(a) = \mathrm{Re}(b)$; $\mathrm{Im}(a) - \mathrm{Im}(b) = 2ik\pi$ soit encore $a - b = 2ik\pi$. On en déduit l'égalité des vap ! Donc $bA = dB$... si b est non nul on peut conclure. Sinon on a alors $\exp A = aI_2$ donc $\mathrm{e}^{\lambda_1} = \mathrm{e}^{\mu_1} = \mathrm{e}^{\lambda_2} = \mathrm{e}^{\mu_2}$ d'où toutes les vap sont égales ! Donc A est semblable à $\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = M$. On a $M = \lambda I_2 + \alpha N$ (N car nilpotente) d'où $\exp M = \exp(\lambda I_2)\exp(aN) = \mathrm{e}^{\lambda}(I_2 + \alpha N)$ or $\exp M = \exp A$ car $\exp(A)$ est une homothétie d'où $\alpha = 0$. D'où A et B sont diagonales, mêmes vap, c'est bon ! !
Remarque : si on pose $f(x, y) = \dfrac{x\,\mathrm{e}^y - y\,\mathrm{e}^x}{x - y}$ et $g(x, y) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^y}{x - y}$ avec $f(x, x) = (1 - x)\,\mathrm{e}^x$ et $g(x, y) = \mathrm{e}^x$ (prolongement par continuité) alors, par un calcul simple, on peut prouver que $\mathrm{e}^A = f(\lambda_1, \lambda_2)I_2 + g(\lambda_1, \lambda_2)A$ où λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres de A (éventuellement non distinctes). Comme on a l'égalité des valeurs propres, alors $\mathrm{e}^A = \mathrm{e}^B \Rightarrow g(\lambda_1, \lambda_2)(B - A) = 0$ et, par hypothèse, $g(\lambda_1, \lambda_2) \neq 0$ ($g(\lambda_1, \lambda_2) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{\lambda_1} = \mathrm{e}^{\lambda_2} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$ impossible).

(2) Il me dit qu'en pensez vous ? Je dis, ça diverge, pourquoi ? répond-il, on peut essayer de faire une transformation d'Abel ? Non il ne reste pas assez de temps euh... il me donne des indications foireuses que je ne comprends pas, et finit par venir au tableau pour me le faire. Il me l'a fait avec les mains, et il a conclu par "ah ouais, en fait ça se fait pas en 5 minutes". Je vais essayer de le formaliser, soit le cercle unité On trace une droite

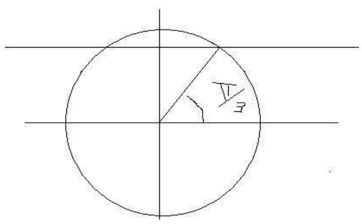

FIG. 2. Sur le cercle

parallèle à la droite des abscisses, passant par exemple par j (le complexe), de telle sorte que l'arc de cercle du haut soit de longueur > 1. Là on dit qu'il y a toujours au moins deux termes par tour de cercle de la suite $|\sin n|$ sur le segment délimité par le haut du cercle et la droite (en fait quand n augmente, on tourne sur le cercle, et on est obligé de passer par cet arc de cercle 2 fois (une fois en haut une fois en bas, mais comme y'a les valeurs absolues)). Et lorsqu'on est sur cet arc de cercle on a $\dfrac{\sqrt{3}}{2n} \leqslant \dfrac{|\sin(n)|}{n}$. Entre deux valeurs de n tel qu'on soit sur cet arc, il n'y a pas plus de 4 d'écart (en étant large). On écrit E l'ensemble des entiers n tels qu'on soit dans l'arc. Donc on peut écrire

$$\sum_{p=0}^{E(\frac{N}{4})} \frac{\sqrt{3}}{2(4p+2)} \leqslant \sum_{n\in E, n\leqslant N} \frac{|\sin(n)|}{n} \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{|\sin(n)|}{n}.$$

Donc ça diverge ! (dans $4p+2$, le $+2$ vient du fait que le tout premier dans E est pour $n=2$).
Autre version (plus courte !)
$|\sin n| > \sin^2 n = \dfrac{1}{2}(1-\cos 2n)$, or la série des $(\cos 2n)/n$ converge par théorème d'Abel, donc pour que la série des $|\sin n|/n$ converge, il faudrait que la série harmonique converge. (contradiction)

Solution 1.2.10 (Boris Dalstein) Note :
Examinateur : ?

(1) L'ensembles des $\{kx\}$ pour $k \in [\![0,n]\!]$ fournit $n+1$ valeurs dans $[0,1]$. On sépare $[0,1]$ en n sous-intervalles disjoints de longueurs $1/n$, et le théorème des tiroirs affirme que deux valeurs $\{k_1x\}$ et $\{k_2x\}$ se trouvent dans le même intervalle, cqfd (le fait que x soit irrationnel n'intervient pas, en fait. Il permet par contre de démontrer que les valeurs prises par $\{kx\}$ sont différentes, ce qu'il m'a demandé de faire, mais ça me semble inutile...).

(2) – Si x est rationnel, le résultat est immédiat ($x = p/q$, et alors tous les couples $(np)/(nq)$ conviennent).
– Supposons x irrationnel, et raisonnons par l'absurde, considérons l'ensemble en question fini : $\{(p_1,q_1),\dots,(p_N,q_N)\}$.
Soit n un entier naturel, on trouve alors $|\{k_1(n)x\} - \{k_2(n)x\}| \leqslant 1/n$ ce qui donne $|(k_1-k_2)x - (\mathrm{Ent}\,(k_1x) - \mathrm{Ent}\,(k_2x))| \leqslant 1/n$, soit, en supposant $k_1 > k_2$:

$$|x - \frac{\mathrm{Ent}\,(k_1x) - \mathrm{Ent}\,(k_2x)}{k_1-k_2}| \leqslant \frac{1}{n(k_1-k_2)} \leqslant \frac{1}{(k_1-k_2)^2}$$

On peut donc construire une suite infinie de (p,q) qui conviennent. Or, elle est à valeur dans un ensemble fini, on peut donc en extraire une suite constante (p_0,q_0). Mais en revenant sur la partie gauche de l'inégalité ci-dessus, on a :

$$|x - \frac{p_0}{q_0}| \leqslant \frac{1}{\phi(n)}$$

On a, en passant à la limite, $x = p_0/q_0$, donc x est rationnel : contradiction.

Solution 1.2.11 (Simon Watier) Note :
Examinateur : ?

(1) On introduit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. On a $X^{\mathrm{T}}BX = (X' + x_{n+1}b)^{\mathrm{T}}A(X' + x_{n+1}b) + (a - b^{\mathrm{T}}Ab)x_{n+1}^2$.
On fait aussi le produit matriciel :

$$\begin{pmatrix} A & Ab \\ b^{\mathrm{T}}A & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ b^{\mathrm{T}}A & b^{\mathrm{T}}Ab - a \end{pmatrix}$$

d'où $\det B = \det A.(a - b^{\mathrm{T}}Ab)$.

A partir de là on fait par double implication pour la première question.

($\Rightarrow$) Si $B > 0$ alors, en prenant $x_{n+1} = 0$ ci-dessus, on obtient $X'^{\mathrm{T}}AX' \geqslant 0$ pour tout X'. et l'égalité des déterminants impose $\det A \neq 0$ donc $\det A > 0$. Conclusion : on a bien $A > 0$ et $a > b^{\mathrm{T}}Ab$.

($\Leftarrow$) Réciproquement : la première égalité donne $X^{\mathrm{T}}BX \geqslant 0$ puis, l'égalité des déterminants donne $\det B > 0$ donc $B > 0$.

Remarque : si le calcul du déterminant obtenu par produit de matrice vous paraît tiré par les cheveux, on peut procéder autrement : on fait le changement de base

$$\begin{array}{c} x_1 \leftarrow x_1 - x_{n+1}b_1 \\ x_1 \leftarrow x_2 - x_{n+1}b_2 \\ \vdots \\ x_n \leftarrow x_n - x_{n+1}b_n \\ x_{n+1} \leftarrow x_{n+1} \end{array}$$

. La matrice B' de la forme quadratique de matrice B dans la base canonique dans cette base (vous me suivez ?) est : $B' = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & a - b^{\mathrm{T}}Ab \end{pmatrix}$.

Or, en notant P la matrice de passage de la base canonique à la nouvelle, on a $B' = P^{\mathrm{T}}BP$ et comme $P = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & b_1 \\ 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b_n \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ on a bien le déterminant qu'on veut ...

(2) Pour la fin, un sens est évident, l'autre se fait par récurrence en utilisant les deux questions précédentes.

($\Rightarrow$) Il suffit de prendre la restriction de la forme quadratique de matrice A dans $\mathbb{R}^n$ aux sous-espaces $\mathbb{R}^p$ (ou de prendre les vecteurs $X = \begin{pmatrix} X_p \\ 0 \end{pmatrix}$ où $X_p \in \mathbb{R}^p$).

($\Leftarrow$) On procède par récurrence :

- $n = 1$ est immédiat !
- On suppose la propriété vraie à l'ordre n. Soit $B \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ vérifiant la propriété de l'énoncé. On écrit $B = \begin{pmatrix} A & Ab \\ b^{\mathrm{T}}A & a \end{pmatrix}$ (ceci est toujours possible car A est inversible). Par hypothèse, A est définie positive et comme $\det B = (a - b^{\mathrm{T}}Ab)\det A > 0$ alors $a > b^{\mathrm{T}}Ab$ donc B est bien définie positive.

Solution 1.2.12 (François Dayrens) Note : 8

Examinateur : *salle Cartan, 3 Juillet, 9h15.*

Tourne en rond dans la salle pendant toute la planche (se fait vraiment chier alors qu'il n'a que 3 élèves dans la journée, tous le matin), donne quelques indications (mais je suis tellement nul avec les groupes que j'ai bien galéré au début, l'intégrale me plaisait mieux, je pense qu'il l'a remarqué –NdT : FOU !– finalement pas bien sympathique pour un chevelu.

(1) Soit $i \in [\![1, k]\!]$. On note $\omega(x) = \prod_{j=1}^{k} p_j^{\beta_j}$, β éventuellement nul.

$n = ppcm(\omega(x)) = \prod_{j=1}^{k} p_j^{max(\beta_j)=\alpha_j}$ (assez évident pour l'égalité). Donc $\exists x_i | \beta_i = \alpha_i$.

$\omega(x_i) = \left(\prod_{j=1, j\neq i}^{k} p_j^{\beta_j}\right) p_i^{\alpha_i}$. On note q_i tel que $\omega(x_i) = q_i p_i^{\alpha_i}$.

On pose $y_i = x_i^{q_i} \in G$ donc $y_i^{p_i^{\alpha_i}} = e$, donc $\omega(y_i)$ divise $p_i^{\alpha_i}$, donc $\omega(x_i) = p_i^{\gamma_i}$, avec $\gamma_i \leqslant \alpha_i$. Supposons $\gamma_i < \alpha_i$. Comme $\omega(y_i) | p_i^{\alpha_i}$. Puis là on a un blanc dans le raisonnement, mais en réfléchissant un peu ça passe, pour arriver à une contradiction. Là chui en vacances j'ai la flemme, mais si Borris veut le faire. Donc on a bien l'ordre de y_i qui vaut ce qu'on voulait.

On prend alors $x = \prod_{i=1}^{k} y_i$ et on suppose par l'absurde que n n'est pas l'ordre de x. On a $\omega(x) = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\beta_i}$ avec $\beta_i \leqslant \alpha_i$ et, par hypothèse, il existe j tel que $\beta_j \leqslant \alpha_j - 1$. Alors, en posant $\omega = n \times p_j^{\beta_j - \alpha_j}$,

$$x^\omega = \prod_{i \neq j} \underbrace{y_i^\omega}_{=e} \times y_j^{\beta_j} \neq e$$

avec $\omega(x) | \omega$ ce qui donne une contradiction.

(2) f est croissante donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [k-1, k]$, $f(x) \leqslant f(k) \leqslant f(x+1)$ d'où $\int_{k-1}^{k} f(x)dx \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(x+1)dx$ donc $\int_{k-1}^{k} f(x)dx \leqslant f(k) \leqslant \int_{k}^{k+1} f(x)dx$ soit $\int_{0}^{n-1} f(x)dx \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} f(k) \leqslant \int_0^n f(x)dx - \int_0^1 f(x)dx$ d'où

$$\int_0^n f(x)dx \leqslant \int_0^{n-1} f(x)dx + f(n) \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k)) \leqslant \int_0^n f(x)dx - \int_0^1 f(x)dx + f(n)$$

car f croissante. On a alors $\int_0^n f(x)dx \leqslant \sum_1^n f(k) \leqslant \int_0^n f(x)dx + f(n)$, on divise par l'intégrale et avec l'hypothèse sur f c'est ok. Pour l'autre j'ai pas eu le temps (trop mauvais sur les groupes) mais c'est du même style.

Nota : encore planté entre les Leftarrow et les Rightarrow je suis trop mauvais.

On utilise dans un premier temps que

– $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geqslant N$, $\sum_{k=0}^{n} f(k) \leqslant 2 \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$,
– $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N' \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geqslant N'$, $|u_n| \leqslant \varepsilon$.

Donc, par le même procédé que pour Césaro, avec $N'' = \max(N, N')$ et $n \geqslant N''$, on a

$$\left| \frac{\sum_{k=1}^{n} f(k)u_k}{\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t} \right| \leqslant \left| \frac{\sum_{k=1}^{N''} f(k)u_k}{\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t} \right| + \varepsilon \left| \frac{\sum_{k=N''+1}^{n} f(k)}{\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t} \right|$$
$$\leqslant \frac{A}{\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t} + \varepsilon I(n)$$

où $\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t \to +\infty$ et $I(n) \leqslant 2$ ce qui permet de conclure.

Dans le cas où $u_n \to l$, on fait la différence et on utilise le résultat prouvé en premier (i.e. u_n constante égale à 1).

Solution 1.2.13 (Arnaud Demarais) Note : 12

Examinateur : *la quarantaine, une queue de cheval ainsi qu'une calvitie, à noter que François passait après moi. L'homme est froid mais donne des indices. Il m'a fallu 1/2 heure dans les sous-sols d'Ulm pour trouver la salle Henri Cartan, pour trouver, j'ai demandé mon chemin à une personne qui en fait a été mon examinateur...*

(1) a) Compte tenu de la définition de n alors pour tout x de G, on a

$$x^n = \left(x^{\prod_{k \neq i} p_k^{\alpha_k}}\right)^{p_i^{\alpha_i}} = e.$$

Il existe x tel que $x^{\prod_{k\neq i} p_k^{\alpha_k}} \neq e$ sinon $n = \displaystyle\prod_{k\neq i} p_k^{\alpha_k}$. En raisonnant de même avec $\left(x^{\prod_{k\neq i} p_k^{\alpha_k}\times p_i^{\alpha_i-1}}\right)^{p_i}$, on obtient un élément dont l'ordre est $p_i^{\alpha_i}$.

b) On sait que, pour tout i, il existe $x_i \in G$ dont l'ordre est $p_i^{\alpha_i}$, considérons $y = x_1x_2\dots x_m$. $y^n = e$ et s'il existe $p < n$ tel que $y^p = e$ alors $p|n$ soit $p = \displaystyle\prod_{i=1}^{m} p_i^{\alpha_i'}$ avec $\alpha_i' \leqslant \alpha_i$. Si $\alpha_k' < \alpha_k$, on a alors

$$(y^p)^{\prod_{i\neq k} p_i^{\alpha_i-\alpha_i'}} = x_k^{p\times\prod_{i\neq k} p_i^{\alpha_i-\alpha_i'}} = e.$$

Or $p\times\displaystyle\prod_{i\neq k} p_i^{\alpha_i-\alpha_i'} = \prod_{i\neq k} p_i^{\alpha_i}\times p_k^{\alpha_k'}$. Comme le groupe engendré par x_k est d'ordre $p_k^{\alpha_k}$ et que $\displaystyle\prod_{i\neq k} p_i^{\alpha_i}\wedge p_k = 1$, $x_k' = x_k^{\prod_{i\neq k} p_i^{\alpha_i}}$ est lui aussi d'ordre $p_k^{\alpha_k}$. On obtient alors une absurdité.
Conclusion : y est bien d'ordre n.

(2) C'est à peu de chose près la démonstration de Césaro (l'examinateur a eu l'air content). Il manque visiblement un hypothèse car si $\varphi(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^t}\,\mathrm{e}^t$, $\displaystyle\int_0^n \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^n} - \mathrm{e}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\varphi(k) \geqslant \mathrm{e}^{\mathrm{e}^n}\,\mathrm{e}^n$ et, en prenant la suite u_n constante égale à 1, le rapport tend vers $+\infty$. Si on suppose φ bornée alors il suffira d'appliquer le théorème sur les équivalents de somme partielle de séries divergentes.

Solution 1.3.1 (Pierrick Jamaux) Note :
Examinateur : *trop bel esprit, un peu style Marouby (jeune, autiste, mais gentil) j'y vais avec zéro pression vu que jmen !#**@ des ENS...*

(1) No comment, Pierrick a voulu prendre son temps mais il a été vite stoppé !

(2) J'ai traité d'abord les cas $n = 0$ et $n = 1$ où E_n est réduit a un polynôme..
$n = 0$: $P = 1 \Rightarrow C_0 = 1$...
$n = 1$: $P = X + 1$, donc on cale un petit dessin pour montrer sans fatigue que $C_1 = 2$.
Pour commencer j'écris $P = X^n + \displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} a_jX^j + 1$ (il me dit "oui c'est bien de l'écrire comme ça"),
Déjà $C_n \leqslant 2$ puisque pour $P = X^n + 1$, $N(P) = 2$ puis à sa tronche je me dit que ça doit être égal à 2, donc j'avance un "on pourrait essayer de voir si par hasard C_n ne vaudrait pas 2" et la je reçoit la confirmation visuelle que c'est bien ça..
Je tente les racines n-ièmes de l'unité z_k, ça marche encore.

$$P(z_k) = 2 + \sum_{j=1}^{n-1} a_j\exp(i2jk\pi/n)$$

et là j'ai un peu ramé, parce que je voulais passer par un truc de Vandermonde.
Puis il me sort "quelle est la condition pour que $N(P) \geqslant 2$?" je dis qu'il suffit qu'on trouve un k_0 tel que la somme soit à partie réelle positive (mais ça ne m'a pas plus avancé, parce que mon problème, c'était déjà ça !!) donc la il me sort "que penses tu de la moyenne des $P(z_k)$?" puis la c'est bon, enfin débloqué ! :

On pose $B_k = \sum_{j=1}^{n-1} a_j \exp(i2jk\pi/n)$, on a donc

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P(z_k) = 2 + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} B_k$$

or $\sum_{k=0}^{n-1} B_k = \sum_{j=1}^{n-1} a_j \left(\sum_{k=0}^{n-1} \exp(i2jk\pi/n)\right)$ or la "somme" à l'intérieur est géométrique en k avec n termes, donc le calcul conduit à $\sum_{k=0}^{n-1} B_k = 0$, donc en prenant la partie réelle, on a la moyenne des parties réelles des $P(z_k)$ qui vaut 2, donc il existe forcément un k_0 tels que $\Re(P(z_{k_0})) \geqslant 2$ et donc $C_n \geqslant 2$ pour tout P de E_n.. comme 2 est atteint pour X^n on a le résultat : $C_n = 2$ pour $n > 0$ et $C_0 = 1$.

Solution 1.3.2 (Simon Watier) Note :

Examinateur : *Grand, fin petite barbe ... pourrait faire méchant dans Tintin ... Sinon il laisse seul pas mal de temps ... (il ne m'a pas parlé pendant la première demi-heure). Après il donne des indications :*
1 - "Comment démontrez vous le TAF ?"
"Que pouvez vous dire si $f(x_0) = f(x_1) = ... = f(x_n) = 0$?"
2- "A quoi vous font pensez les $\cos(j\pi/n)$ *?"*
"Montrez qu'il existe une famille de polynômes T_n de degré n tels que ..."

(1) Cas $n = 1$: on reconnaît le TAF ... on s'inspire donc de la démo du TAF pour le cas général :
- Si $f(x_0) = f(x_1) = ... = f(x_n) = 0$, il suffit d'appliquer Rolle n fois et c'est gagné.
- Sinon soit L le polynôme de degré n tel que $L(x_i) = f(x_i)$ pour tout i (Polynôme d'interpolation de Lagrange), soit $g = f - L$, g vérifie les hypothèses ci-dessus, $g^{(n)}(c) = 0$ ... il suffit de calculer $L^{(n)}$ qui est une constante pour avoir le résultat. $L(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)L_i(x)$ où $L_i(x) = \prod_{j\neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$. Les polynômes L_i sont de degré n donc $L_i^{(n)}(x) = \prod_{j\neq i} \frac{1}{x_i - x_j}$. On a donc $c_i = \prod_{j<i} \frac{1}{x_i - x_j} \times (-1)^{n-j} \prod_{j>i} \frac{1}{|x_i - x_j|}$.

(2) On introduit les polynômes de Tchebichef comme fonction f pour utiliser la propriété ci dessus à T_n en prenant garde au fait que les y_i sont décroissant (ce qui change le $(-1)^{n+j}$ en $(-1)^j$ dans la formule desc_j) et c'est fini.
Si on prend $T_n(x) = \cos(n \operatorname{Arccos} x)$ alors la formule de récurrence $T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$ nous donne directement le terme de plus haut degré qui vaut 2^{n-1}. On a donc $T_n^{(n)}(x) = n!2^{n-1}$ d'où

$$T_n^{(n)}(x) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{n!}{\prod_{k\neq j} |y_k - y_j|} T_n(y_i)$$

or $T_n(y_i) = \cos(n.\frac{j\pi}{n}) = \dfrac{(-1)^j}{n}$ ce qui donne la formule.

Ma vie en détail :
NB : en vérité le c était un ξ (So 11) et les y_i étaient des η_i
Arrivé à 7h50 pour un passage à 8h30 ... j'ai la joie de découvrir que je suis le premier à passer ... j'attends.
A 8h Pec passe dans le coin ... il me montre la salle d'attente (il n'y avait même pas de gâteaux

j'étais venu trop tôt) ... je commence à m'endormir ...
Un quart d'heure plus tard je retourne me morfondre devant la salle des Résistants.
8h25 Voila notre homme ...
Pendant la colle j'ai traité le cas $n = 1$ ... puis je ne savais pas quoi faire ... et comme il ne réagissait pas, j'ai dit "on a qu'à tenter par récurrence" ... j'essaie ... au bout de deux lignes je vois que ça n'aboutira pas... je le dis au conditionnel ... mais comme je n'ai pas de réponse je continue ... bref il me laisse poireauter pas mal pour me dire "vous y croyez encore ?" "Non" "Bon ben effacez tout, ça sert à rien" ... snif ...
Pour la deuxième question je n'ai pas pensé aux polynômes de Tchebichef (que je ne sais pas écrire ...) mais bon une fois qu'il a donné le parachute, c'est fini (l'exo comme les 3/4 d'heures)
Après la colle je recroise Pec ... il y avait des biscuits en salle d'attente ... ouf ma journée n'est pas perdue ...

Solution 1.3.3 (Jonathan Donier) Note :
Examinateur : *Même examinateur qu'abdes.*

(1) Soit S l'ensemble des solutions et $\varphi\ : y \in S \mapsto (y(0), y(1)) \in \mathbb{R}^2$, l'objectif est de prouver que φ est bijective.
Commençons par un lemme : soit $y \in S$ telle que $y(0) = 1$ et $y'(0) = \alpha > 0$, M un majorant > 0 de p sur $[0, 1]$ alors $\forall t \in [0, 1]$, $y'(t) \geqslant \alpha\,\mathrm{e}^{-M}$.
Dém : soit $\eta = \sup\{x \in [0, 1] \mid y' \geqslant 0 \text{ sur } [0, x]\}$.
Sur $[0, \eta]$ on a $y'' = -py' - qy \geqslant -py' \geqslant -My'$ car y et y' sont positifs sur $[0, \eta]$. On a donc $y'' + My' \geqslant 0$ soit, en multipliant par e^{Mt} et en intégrant, $(y'\,\mathrm{e}^{Mt})' \geqslant 0$ donc $y'\,\mathrm{e}^{Mt}$ est croissante et si $\eta < 1$, on obtient une contradiction.
On a donc $y'(t)\,\mathrm{e}^{Mt} \geqslant \alpha = y'(0)$ sur $[0, 1]$ d'où
$$y'(t) \geqslant y'(t)\,\mathrm{e}^{Mt-M} \geqslant y'(t)\,\mathrm{e}^{Mt}\,\mathrm{e}^{-M} \geqslant \alpha\,\mathrm{e}^{-M}.$$
Soit maintenant $y_1 \in S$ telle que $y_1(0) = 1$, $y_1'(0) = 1$, $y_2 \in S$ telle que $y_2(0) = y_1(1)$ et $y_2'(0) = \mathrm{e}^M$. Grâce au lemme, on peut affirmer que $y_2'(t) \geqslant \mathrm{e}^M\,y(1)\,\mathrm{e}^{-M} = y(1)$ d'où
$$y_2(1) = y_2(0) + \int_0^1 y_2'(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 1 + y_1(1).$$
Les vecteurs $(y_1(0), y_1(1))$ et $(y_2(0), y_2(1))$ sont libres donc $\operatorname{Im}\varphi$ est de dimension 2 ce qui permet de conclure.
Merci Martin !

(2) Vep $(b_1, ..., b_n)$ associé à la vap n et orthogonal de $(1/b_1, ..., 1/b_n)$ associé à la vap 0.

(3) Pour $n > N$, $a_{1,n} + ... + a_{k,n} > 0$ donc $a_{i,n} > -(k-1)$: la suite $(a_1, ..., a_k)$ est bornée. Montrons qu'elle n'a qu'une seule valeur d'adhérence.
BW donne l'existence d'une va $(b_1, ..., b_k)$. alors en posant $f(x) = x/(1-x)$, qui est continue et strictement convexe pour $x < 1$, on a
$1/k(b_1 + ... + b_k) = 1/k$ et $1/k(f(b_1) + ... + f(b_k)) = f(1/k)$ donc comme f est strictement convexe, $b_1 = ... = b_k = 1/k$.
Donc la va est unique donc toutes les suites convergent vers $1/k$.

Solution 1.3.4 (Ming Qian Li) Note :
Examinateur : *assez jeune, regarde son ordinateur sans arrêt, j'ai fait une erreur de calcul pendant l'épreuve et il m'a rien dit. Pour l'exercice, j'ai vu que l'élève avant moi est sorti sans sourire, donc cela donne une mauvaise impression. Vu que c'est de la géométrie, on a donc le droit d'arnaquer ! Comme c'est mon premier oral depuis un an, je ne suis pas très en forme au début, en fait la solution est simple si on connaît l'expression de la courbure (mais ce n'est pas*

mon cas, j'ai mis 10 min pour me rappeler la définition et retrouver l'expression). Conclusion : une mauvaise matinée.

D'abord l'expression du rayon de courbure au signe près :

Soit $\rho = x''y' - x'y''$ (car $y'(s)^2 + x'(s)^2 = 1$). Et cette expression nous semble familière c'est $\left(\dfrac{x'}{y'}\right)' y'^2$ (si $y'(s) \neq 0$). Comme $\rho \in [-k, k]$ alors on a $-\dfrac{k}{y'^2} \leqslant \left(\dfrac{x'}{y'}\right)^2 \leqslant \dfrac{k}{y'^2}$. Comme $y'^2 + x'^2 = 1$ alors $\dfrac{1}{y'^2} = 1 + \dfrac{x'^2}{y'^2}$ donc

$$-k\left(1 + \frac{x'^2}{y'^2}\right) \leqslant \left(\frac{x'}{y'}\right)' \leqslant k\left(\frac{1}{y'^2} = 1 + \frac{x'^2}{y'^2}\right).$$

On pose $f(s) = \dfrac{x'(s)}{y'(s)}$ alors on a $-k \leqslant \dfrac{f'}{1+f^2} \leqslant k$ et on intégre soit, vu que $f(0) = 0$, $-ks \leqslant \operatorname{Arctan}(f(s)) \leqslant ks$ donc $-\tan(ks) \leqslant f(s) \leqslant \tan(ks)$ et, en élevant au carré, on a $f^2(s) = \dfrac{1 - y'^2}{y'^2}$ donc on a $y'^2(s) \geqslant \dfrac{1}{1 + \tan^2 ks}$ on peut alors choisir θ pour que $|y'|$ soit supérieur $1/2$ (car la fonction tangente est croissante).

Il doit y avoir une erreur dans l'énoncé car si on suppose $f(0) = 0$ alors $x'(0) = 0$ et, par conséquent, $|y'(0)| = 1$. La continuité de y' permet ici de conclure.

Solution 1.3.5 (Johann-Michael Thiébaut) Note :

Examinateur : *Jeune mais a une barbe, sympa mais me pose de l'arithmétique, un type de l'ENS quoi...*

(1) Soit $\varphi\ : k \in \mathbb{Z} \mapsto a^k \in \mathbb{U}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. φ est un morphisme de groupe donc $\operatorname{Ker}\varphi$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$ qui s'écrit nécessairement sous la forme $\omega\mathbb{Z}$. Comme $m \in \operatorname{Ker}\varphi$ alors $\omega | m$.

(2) a) q est inversible dans $\mathbb{Z}/p^N\mathbb{Z}$ car $q \wedge p^N = 1$, soit $\varphi\ : k \in \mathbb{Z} \mapsto q^k \in \mathbb{U}(\mathbb{Z}/p^N\mathbb{Z})$, $\operatorname{Ker}\varphi = \omega\mathbb{Z}$ donc la suite (q^k) est périodique, de période ω.

b) Comme $\operatorname{Card}\mathbb{U}(\mathbb{Z}/p^N\mathbb{Z}) = p^N - p^{N-1}$ (fonction d'Euler), on sait déjà que $t(N) < p^N$ alors, que veut dire cette question ?

Solution 1.3.6 (Alexandre Vérine) Note :

Examinateur : *Jeune, grand, cheveux longs, barbe de 3 trois jours. Il arrive 5 min en retard, rentre dans la salle sans me voir et commence à râler : "ils font vraiment chier !" (la salle avait été déplacée), il s'installe et me demande de rentrer.*

Les $T_k(\theta)$ sont bien définis (on introduit Tchebichef et on montre que la racine du dénominateur est aussi racine du polynôme au numérateur).

Il y a visiblement un problème dans cet énoncé, $\cos\theta_k = 0$ et $T'(\theta_k) = 0$ si n est pair...

Solution 1.3.7 (François Dayrens) Note : 14

Examinateur : *Salle S16, 01/07, 15h30.*

Assez sympa, laisse parfois bien seul, pas toujours facile de voir où il veut en venir (il me parle de courbure en pensant à k' et on a eu un cafouillage avec les dessins : un mélange de courbure, d'angle, et de dérivée 1ere et 2nde.)

A la fin il m'a demandé si je visais une ENS ou une école d'ingé (quel culot !).

(1) a) So périodique, so I.P.P. : $\int_0^T k'(t)\,\mathrm{d}t = k(T) - k(0) = 0$. k est périodique car x, y, x', x'', y', y'' le sont.

$$\int_0^T x(t)k'(t)\,\mathrm{d}t = \Big[x(t)k(t)\Big]_0^T - \int_0^T x'(t)k(t)\,\mathrm{d}t = 0 - \left(\int_0^T x'^2y'' - \int_0^T x'x''y'\right)$$
$$= -\int 0^T x'(t)^2y''(t)\,\mathrm{d}t - \left[\frac{1}{2}x'^2(t)y'(t)\right]_0^T + \frac{1}{2}\int_0^T x'(t)^2y''(t)\,\mathrm{d}t$$

or

$$\int_0^T x'(t)^2y''(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int_0^T (1-y'(t)^2)y''(t)\,\mathrm{d}t \text{ car } x'(t)^2 = 1 - y'(t)^2$$
$$= -\frac{1}{2}\left[y'(t) - \frac{y'(t)^2}{3}\right]_0^T = 0(\text{idem par symétrie pour } y).$$

b) -Comme $\int k' = 0$, $\exists t_1 \in [0,T] | k'(t_1) = 0$ et k' change de signe.
-Comme $\int_{t_1}^{t_1+T} k' = 0$, alors $\exists t_2 \in]t_1, t_1+T[| k'(t_2) = 0$ et k' change de signe. Raisonnons par l'absurde, supposons que k' ne s'annule pas ailleurs qu'en t_1 et

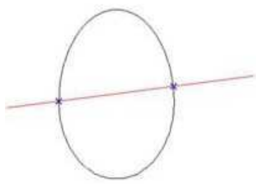

Fig. 3. La figure

t_2. k' est par exemple > 0 sur $]t_1, t_2[$ et < 0 sur $]t_2, t_1+T[$.
On prend une équation de la droite passant par les points de paramètre t_1 et t_2 : $ax+by+c = 0$, les points de Γ de paramètre $t \in]t_1, t_2[$ vérifient $ax(t)+by(t)+c > 0$, ceux de paramètre $t \in]t_2, t_1+T[$ vérifient $ax(t)+by(t)+c < 0$. Quitte à renverser la figure.
Avec le calcul du a),

$$\int_0^T (ax(t)+by(t)+c)k'(t)\,\mathrm{d}t = 0 = \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{(ax(t)+by(t)+c)}_{>0}\underbrace{k'(t)}_{>0}\mathrm{d}t + \int_{t_2}^{t_1+T} \underbrace{(ax(t)+by(t)+c)}_{<0}\underbrace{k'(t)}_{<0}\mathrm{d}t$$

On obtient une contradiction.
La fin de la preuve sur le dessin.

(2) Cela ressemble un peu à Maths Ulm, en dim2, on a A diagonalisable et comme $\det(A) = 1$, A a ses coeff entiers, les racines vérifient $\lambda\mu = 1$ et $\lambda+\mu \in \mathbb{Z}$. De plus, comme $|\lambda| \leqslant 1$ et $|\mu| = \frac{1}{|\lambda|} \leqslant 1$ donc $|\lambda| = 1$. En notant $k = \lambda + \frac{1}{\lambda}$, $|k| \leqslant 2$, on pourrait distinguer les 5 cas, mais comme c'est un oral d'ENS on va essayer d'être un peu plus subtil (Le nombre de cas explose dans la généralisation à $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$)

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = P\begin{pmatrix}\lambda^n & 0\\ 0 & \frac{1}{\lambda^n}\end{pmatrix}P^{-1}.$$

Ici c'est comme les suites d'entiers qui convergent, elles sont constantes à partir d'un certain rang (il a apprécié quand j'ai dit ça), car A est une matrice d'entiers et A^n est convergente (ou du moins périodique) donc $\exists (p,q) \in \mathbb{N}^2 \mid p < q$ tq $A^p = A^q$, et en en

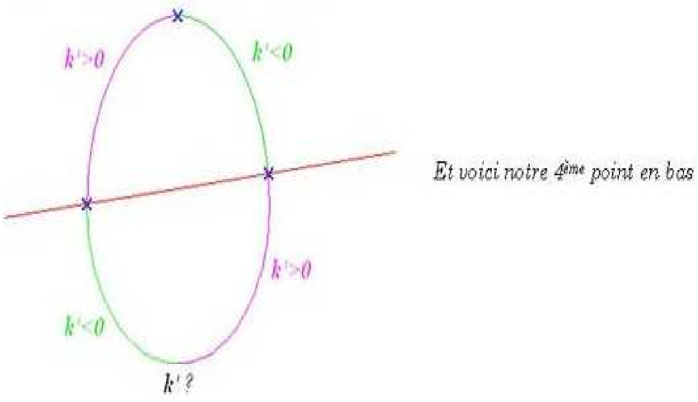

Fig. 4. Le dessin

composant par A^{-p}, on a $A^r = \mathrm{Id}$ avec $r \in \mathbb{N}$, et comme les vap sont à chercher dans les racines d'un polynôme annulateur, λ est racine r-ième de l'unité.

Solution 1.4.1 (Renaud Boussarié) Note :
Examinateur : *?*
On remarque que, si Y est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ alors $\exp(tA)Y = \exp(t\lambda)Y$. Avec cette remarque, $(i) \Leftrightarrow (ii)$ devient immédiat, en effet, $B\exp(tA)Y = \exp(t\lambda)BY$.

Solution 1.4.2 (Jonathan Donier) Note :
Examinateur : *?*
Corrigé : vraiment pénible à écrire avec des sommes et des epsilon partout, aussi voici les grandes lignes :
Sens direct : On écrit que f est uniformément continue sur $[0,1]$, On fixe e (epsilon), et on prend p tq $1/p < \eta$ (de la continuité uniforme). On se place sur les intervalles $[k/p,(k+1)/p]$. Si on pose $A(n) = \mathrm{Card}\{k \mid u_k \in [k/p,(k+1)/p]\}$, d'après 1) pour $n > N$ on majore $A(n)/n - 1/p$ par e/p.
Puis on majore la différence entre l'intégrale sur $[k/p,(k+1)/p]$ et la somme qui ne contient que les termes tq u_k est dans $[k/p,(k+1)/p]$ grâce à la continuité uniforme et l'estimation du nombre de termes dans la somme (f étant bornée).
Puis on majore la différence sur $[0,1]$ par inégalité triangulaire par $cte.e$ ce qui achève la preuve.
Sens réciproque : fixer a et b, et considérer les fonctions trapèzes valant 1 sur $[a,b]$, 0 sur $[0,a-e]$ et $[b+e,0]$. On pose $A(n) = \mathrm{Card}\{k \mid u_k \in [a,b]\}$.
Alors $1/n \sum\limits_{k=1}^{n} f(u_k)$ c'est presque $A(n)/n$ et d'après 2) c'est aussi presque $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = b-a+e$.
donc on peut majorer $A(n)/n - (b-a)$ en fonction de e.

Solution 1.4.3 (Casimir Emako Casianou) Note :
Examinateur : *?*

(1) Poser $\psi = f + \varepsilon\varphi$ et définissons la fonction $g(\varepsilon) = \phi(\psi)$. On étudie les variations de $g(\varepsilon)$, la continuité et dérivabilité de g en utilisant les théorèmes de continuité et dérivabilité sous le signe intégral. Or g est minimale en $\varepsilon = 0$, d'où la condition.
(2) $\lambda = 0$ en remplaçant φ par f on a $f' = 0$ et donc f est constante et vaut $f(0) = 0$. $\lambda \neq 0$ et par I.P.P. dans la relation 1) on obtient $\displaystyle\int_0^1 H'(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t = 0$ avec $H = \dfrac{f'}{\sqrt{1+f'^2}}$.

Lemme technique : Soit $g \in \mathcal{C}([\prime,\infty])$ si $\forall \varphi \in \mathcal{C}([\nvdash,\nVdash])$, $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ alors $\displaystyle\int_0^1 g(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t = 0 \Rightarrow g = 0$.
Ce dernier dans notre cas, en raisonnant par l'absurde et en considérant une fonction φ égale partout à g et au voisinage de 1 par une fonction affine qui s'annule en 0.
Donc en calculant l'intégrale on s'aperçoit en minorant que l'intégrale sur le voisinage du point où $g \neq 0$ est non nulle, d'où la contradiction. On en déduit que $H' = 0$ et donc $f'' = 0$, $f'(0) = 0$ et $f'(1) = \lambda$ d'où $f = \lambda x$.

Solution 1.4.4 (Alexandre Vérine) Note :
Examinateur : *Une femme d'environ 27 ans, blonde, sympathique.*

(1) Ce sont les PIL. (mais j'ai du détailler)

(2) On part de l'expression de $a_n(x)$. On montre :
 – avec l' inégalité triangulaire,
 – en majorant chaque $|f(x_i)|$ de la somme par $\|f\|$,
 – et en passant au sup sur $[a, b]$
que pour tout f, $\|P_n(f)\| \leqslant A_n\|f\|$.
Ensuite, on cherche un f particulier tel que $\|P_n(f)\| \geqslant A_n\|f\|$. On va donc chercher à avoir égalité à presque tous les niveaux dans le raisonnement précédent.
On sait qu'il existe un y de $[a, b]$ sur lequel f atteint son sup.
On veut avoir égalité dans l'inégalité triangulaire id est f doit vérifier en y : $f(x_i)L_i(y)$ de signe constant quand i varie.
On veut aussi avoir, pour tout i, $|f(x_i)| = \|f\|$.
On peut donc parachuter la fonction affine par morceaux qui vaut en chaque x_i : 1 si $L_i(y) \geqslant 0$, -1 sinon et vérifier qu'elle convient.

(3) On minore $a_n(x)$ par l'inégalité triangulaire et on reconnaît dans la valeur absolue le polynôme égal à 1 (par unicité des PIL).

Un oral qui aurait pu bien se passer. Mais peut-être que le fait qu'elle me demande de redémontrer les PIL a fait chuter mon électroencéphalogramme à zéro pour la question 2). J'ai trouvé le premier sens (en mettant 2 min à voir des trucs immédiats), mais j'ai buggé pendant presque tout le reste de l'oral sur l'autre sens, en oubliant même ce que je devais démontrer.
Elle m'a posé des lemmes évidents à démontrer (c'est la que j'ai eu la certitude que ma note serait plutôt basse), et une troisième question facile pour pas que je me démoralise sûrement.
Après la fin de l'oral, elle m'a demandé ce que je voulais faire plus tard et m'a dit qu'il faudrait que j'aie Lyon ou Cachan (c'est bien gentil...).
Enfin elle a été très gentille alors qu'elle aurait eu 12 occasions de m'écraser et de me faire chéééééééééé
Anecdote encore moins pertinente : J'ai mangé mon sandwich à coté d'elle juste après.

Solution 1.4.5 (Simon Watier) Note :
Examinateur : *sympa, aide quand il faut, jeune ... que demande le peuple ?*

(1) Avec les mains on comprends ce qui se passe... Ensuite, on montre qu'il existe une suite b_n d'entiers telle que $f(b_n) - 2\pi n \to \phi$. Pour ça on utilise la définition de $f'(x) \to 0$ avec les epsilons et le TAF ... en partant d'une suite a_n telle que $f(a_n) - 2\pi n = \phi$ puis en prenant pour b_n la partie entière de a_n...

(2) Une transformation d'Abel n'aboutit pas ...
Une comparaison série intégrale ... s'intéresser à $f(n) - \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$ puis poser $\varepsilon(x) = f(x) - f(n)$ ... après je sais pas ...

Solution 1.4.6 (Yohann Salaün) Note : 13

Examinateur : *jeune, celui de la salle de gauche (en arrivant dans le couloir), sympa (il m'a même souhaité bonne chance pour l'X après que je lui ai explicité mes préférences...) et aide quand il faut mais donne des fonctions de plusieurs variables.*

(1) Pour la première égalité c'est .... dans le cours (Schwarz pour les incultes).
Pour la seconde c'est déjà plus intéressant :

$$a_{i,j,k} + a_{j,k,i} = \sum_{m=1}^{n} \left[\frac{\partial f_m}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial f_m}{\partial x_j} + \frac{\partial f_m}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial f_m}{\partial x_i} \right]$$

en utilisant Schwarz, on remarque ainsi la dérivée d'un produit :

$$a_{i,j,k} + a_{j,k,i} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\sum_{m=1}^{n} \frac{\partial f_m}{\partial x_i} \frac{\partial f_m}{\partial x_j} \right] = \frac{\partial (C_i, C_j)}{\partial x_k}$$

en notant C_i les colonnes de la matrice jacobienne associée à f.
On traduit alors l'hypothèse donnée par ii) à l'aide de la matrice Jacobienne $\forall x, h \in \mathbb{R}^n ||J_x h|| = ||h||$, soit $\forall x J_x \in O_n(\mathbb{R})$ donc $\forall i, j \in \{1, ..., n\}, (C_i, C_j) = \delta_{i,j}$ donc la dérivée partielle est nulle et on a bien la seconde égalité.
Remarque : il m'a demandé de redémontrer les propriétés utilisées sur les matrices orthogonales.

(2) En utilisant les égalités précédentes, on a : $ii) \Rightarrow \forall i, j, k \in \{1, ..., n\} a_{i,j,k} = -a_{j,k,i} = a_{k,i,j} = -a_{i,j,k} = 0$.
3

(3) Sens "aller"
$\forall x, h \in \mathbb{R}^n \forall t \in \mathbb{R}^{+*} f(x + th) - f(x) = df_x(th) + o(th)$,
$\forall x, h \in \mathbb{R}^n \forall t \in \mathbb{R}^{+*} \|f(x + th) - f(x)\| = \|df_x(th) + o(th)\| \leqslant \|df_x(th)\| + \|th\|\varepsilon(th)$
$\forall x, h \in \mathbb{R}^n \forall t \in \mathbb{R}^{+*} \|h\| \leqslant \|df_x(h)\| + \|h\|\varepsilon(th)$ (en utilisant ii) et en divisant par t) en passant à la limite en t on obtient :
$\forall x, h \in \mathbb{R}^n \|h\| \leqslant \|df_x(h)\|$. Or on a également :

$$\forall x, h \in \mathbb{R}^n \forall t \in \mathbb{R}^{+*} f(x + th) - f(x) + o(th) = df_x(th)$$

donc par un raisonnement plus qu'analogue : $\forall x, h \in \mathbb{R}^n \|h\| \geqslant \|df_x(h)\|$ d'où l'égalité et le sens "aller" est justifié.
Sens "retour" : on va utiliser la question 2 mais il faut d'abord la traduire sous forme matricielle pour qu'elle parle plus :

$$\forall j, k \in \{1, ..., n\}, J_x^{\mathrm{T}} B_{j,k} = O \text{ avec } B_{j,k} \text{ le vecteur de terme général } \frac{\partial^2 f_m}{\partial x_j \partial x_k}$$

or la matrice Jacobienne est orthogonale donc inversible et : pour tous j, k, m dans $\{1, ..., n\}$, $\dfrac{\partial^2 f_m}{\partial x_j \partial x_k} = 0$. En intégrant on trouve : $\forall m \in \{1, ..., n\}$, $f_m(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,m} x_i + \beta_m$ soit sous forme plus parlante : $f(x) = Ax + b$ (attention A est une matrice et b, x sont des vecteurs) $\forall x, h \in \mathbb{R}^n \|f(x + h) - f(x)\| = \|Ah\|$. Or en cherchant de plus près la forme de A on trouve que $A = J_x^{\mathrm{T}}$ donc A est orthogonale et $\|Ah\| = \|h\|$ d'où le sens "retour".

Solution 2.1.1 (Renaud Boussarié) Note :
Examinateur : *plutôt vieux et qui comprenait pas tout ce que je disais, non pas parce que je parle avec autant d'articulation qu'une huître mais plutôt parce qu'il comprenait pas ma réponse tout court, je soupçonne qu'il n'était pas en forme ou pas très bon en maths, ce qui paraîtrait assez étonnant...*

(1) Cf. 2

(2) On pose $\Delta_n = \det(A_n)$ et on remarque que A_n est antisymétrique.
- Si $n = 2p+1$ alors $\Delta_{2p+1} = \det(A_{2p+1}) = \det(A_{2p+1}^{\mathrm{T}}) = \det(-A_{2p+1}) = (-1)^{2p+1}\det(A_{2p+1})$ i.e. $\Delta_{2p+1} = -\Delta_{2p+1} = 0$.
- Si $n = 2p$ on développe par rapport à la première colonne puis par rapport à la première ligne d'où $\Delta_{2p} = \Delta_{2(p-1)} = \Delta_2 = 1$.

(3) Adaptation de la solution de l'exo 2.2.1 Oral 2007.
On suppose $f(0)$ et $f(1)$ non nuls, on prend $A = \{x \in [0,1] \mid f(x) \leqslant 0\}$ et a sa borne supérieure :
- Par caractérisation de la borne supérieure, il existe une suite croissante (a_n) qui tend vers a. On a $f(a_n) \leqslant 0$ puis, comme $f+g$ est croissante
$$f(a_n) + g(a_n) \geqslant f(a) + g(a)$$
puis, vu que $f(a_n) \leqslant 0$
$$g(a_n) \geqslant f(a) + g(a)$$
on passe alors à la limite en exploitant la continuité de g
$$g(a) \geqslant f(a) + g(a)$$
soit $f(a) \leqslant 0$.
- Soit $x > a$ (possible car $f(0) > 0$ et $f(1) < 0$) alors
$$f(a) + g(a) \geqslant f(x) + g(x) < g(x)$$
car $f(x) < 0$, on fait tendre x vers a, on en déduit que $f(a) \geqslant 0$.

Conclusion : par double inégalité on a obtenu $f(a) = 0$.

Solution 2.1.2 (Jean Rochet) Note :
Examinateur : *Le même que nécro pour math1, sauf que j'ajouterais qu'il était très gentil et qu'il mettait en confiance. Bon c'est vrai, il était un peu mou du genou, mais je crois qu'il était fatigué (il m'a laissé sortir avant la fin...) ou malade (il est allé au toilette pendant la planche, sachant qu'il y était allé à la planche précédente), bref il comprenait pas toujours ce qu'on lui disait, ce qui a tendance à ralentir la khole.*

(1) a) On pose $g(x) = \left(-\dfrac{1}{f''}\right)$, d'où $g(x) = Ax + B$, puis on inverse et on intègre deux fois ! Abdes m'a dit (il a eu la même colle) que lui avait du distinguer les cas à cause du log, moi j'ai foncé tête baissée, j'ai intégré sans réfléchir, il m'a dit "ok ça marche".

b) "Comment caractérisez vous une fonction à deux variables convexes ?" Je lui sors le truc des cordes, il me dit que je vais galérer, je lui dis on montre que la matrice Hessienne est symétrique positive, visiblement, il n'avait pas prévu le coup, il avait l'air impressionné (il était dans ma poche désormais). Donc on y va, si $H(x_0, y_0)$ est cette matrice, alors il faut montrer que $\operatorname{Tr} H > 0$ et $\det H > 0$ (il a mis du temps à être d'accord) ça se fait en utilisant que $f'' > 0$ et $\left(-\dfrac{1}{f''}\right)'' > 0$. Pour le retour, un peu délicat, trois fois rien, on fait par l'absurde, on dit que si $f''(y_0) < 0$ alors la fonction à une variable $g(x, y_0)$ est concave ! pas possible ! (là il a bien buggé, mais il a fini par être d'accord).

c) Immédiat grâce à notre caractérisation.

d) $1 < r \leqslant 2$.

(2) Fastoche. Soit λ une vap a priori complexe (on a le droit $\mathbb{C}$ est algébriquement clos ! !) et X une vep a priori complexe aussi. Alors on calcule
$(X, AX) = \lambda\|X\|^2$ (attention au produit scalaire hermitien). Mais $(X, AX) = (A^*X, X) = (AX, X) = \overline{\lambda}.\|X\|^2$. C'est dans la poche.
Et c'est encore mieux si on se souvient des compléments du cours sur les matrices hermitiennes !
Puis le polynôme est scindé à racine simple (1 est racine (merci monsieur) et le trinôme qui apparaît a un discriminant négatif donc deux racines complexes conjugués (distinctes)). A commute avec I_n et avec son cube donc on diagonalise tout le monde ! l'équation devient pour tout λ dans le spectre de A, il vérifie $\lambda^3 + \lambda = 2$ or il est réel donc égal à 1 $A = I_n$, seule solution

---

Solution 2.1.3 (Abdessamad Benzakour) Note :
Examinateur : ...

(1)

(2) Soit $P(x) = \det(A + xJ)$, si on soustrait la première colonne à toutes les autres, on obtient le déterminant d'une matrice où les dernières colonnes ne dépendent plus de x et où la première s'écrit $xJ_1 + C_1$, J_1 étant une colonne formée de 1 et C_1 étant la première colonne de A. En utilisant la linéarité par rapport à cette colonne, on en déduit que P est un polynôme du premier degré : $P(x) = \alpha x + \beta$. En plus, on a $P(x) = \det[(A + xJ)^{\mathrm{T}}] = \det(-A + xJ) = (-1)^n P(-x)$.
 – Si $n = 2p$ alors $P(-x) = P(x)$ donc P est constant et vaut $\det A$.
 – Si $n = 2p + 1$ alors $\beta = 0$ car P est impair.

Solution 2.1.4 (Renaud Boussarié) Note :
Examinateur : *super sympa et intéressé, d'Artagnan ?*

(1) a) On remarque que $(M + H)^k = M^k + M^{k-1}H + M^{k-2}HM + \cdots + M^{k-p}HM^{p-1} + \cdots + HM^{k-1} + O(H^2)$ puis que $\mathrm{Tr}(M^{k-p}HM^{p-1}) = \mathrm{Tr}(M^{k-1}H)$ d'où

$$\Phi'(M)(H) = (\mathrm{Tr}(H), 2\,\mathrm{Tr}(MH), \ldots, n\,\mathrm{Tr}(M^{n-1}H)).$$

b) On va montrer que $\mathrm{Rg}(\Phi'(M)) = \deg(\pi_M)$ polynôme minimal de M. On note p le degré de π_M.
 – Montrons que les $f_i : H \in \mathcal{M}_n(C) \mapsto \mathrm{Tr}(M^i H)$ pour $i \in [\![0, p-1]\!]$ sont des formes linéaires indépendantes.
 En effet, si $\sum\limits_{i=0}^{p-1} \lambda_i f_i = 0$ alors, par linéarité de la trace,

$$\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \mathrm{Tr}\left(\sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i M^i H\right) = 0.$$

Il suffit alors de prendre $H = \left(\sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i M^i\right)^*$ pour en déduire que $P(M) = \sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i M^i = 0$ (en effet, $(A,B) \mapsto \mathrm{Tr}(AB^*)$ est un produit scalaire hermitien). $P = 0$ car $\deg P < \deg \pi_M$ d'où $\forall i \in [\![0, p-1]\!]$, $\lambda_i = 0$.

– Si $i \geqslant p$ alors $f_i \in \mathrm{Vect}(f_k)_{k \leqslant p-1}$: on fait la division euclidienne de X^i par π_M, $X^i = \pi_M.Q + R$ où $\deg R < p$ donc $M^i = R(M)$ ce qui permet de conclure.

Conclusion : $\mathrm{Rg}\,\Phi(M) = \dim \mathrm{Vect}(f_i)_{i \in [\![0,n-1]\!]} = p$.

(2) Soit $F = O^c = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \deg \Pi_A < n\}$ et montrons que F est fermé.
Soit (A_p) une suite d'éléments de F qui converge vers $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Supposons par l'absurde que $\deg \Pi_A = n$. On pose $A_p = A + E_p$ où $E_p \to 0$. On écrit que

$$\Pi_{A_p}(A_p) = \lambda_p \sum_{i=0}^{n-1} a_{i,p}(A + E_p)^i = 0$$

où λ_p est un scalaire choisi pour que $\sum_{i=0}^{n-1} a_{i,p}^2 = 1$. On remarque alors deux choses :

– $(A+E_p)^i = A^i + O(E_p)$ car, en développant, si on note $\mathcal{N}_i = \{(k_1, l_1, \ldots, k_i, l_i) \in \{0,1\}^{2i} \mid \sum_{j=1}^{i}(k_i + l_i) = i \text{ et } (l_i) \neq (0)\}$,

$$(A+E_p)^i = A^p + \sum_{\mathcal{N}_i} A^{k_1} E_p^{l_1} \ldots A^{k_i} E_p^{l_i}$$

et $\|A^{k_1} E_p^{l_1} \ldots A^{k_i} E_p^{l_i}\| \leqslant \|A\|^{k_1+\ldots+k_i}.\|E_p\|^{l_1+\cdots+l_i} = O(\|E_p\|)$.

– $a_p = (a_{0,p}, \ldots, a_{n-1,p})$ est dans la sphère unité de $\mathbb{R}^n$, compacte, donc on peut en extraire une suite convergente $(a_{\varphi(p)})$ vers $a = (a_0, \ldots, a_{n-1}) \neq 0$.

On a ainsi

$$\underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} a_{i,\varphi(p)} A^i + O(E_{\varphi(p)})}_{\to \sum_{i=0}^{n-1} a_i A^i} = 0$$

donc $\sum_{i=0}^{n-1} a_i A^i = 0$ i.e. $P = \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$ est un polynôme annulateur de A de degré $\leqslant n-1$ i.e. $\deg \Pi_A < n$ ce qui est contradictoire.
Conclusion : $A \in F$, F est fermé donc O est ouvert.
Remarque : on pouvait aussi utiliser la première question et dire que $O = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Rg}(\Phi'(M) = n\}$. Si on écrit la matrice de $\Phi'(M)$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on obtient une matrice $n \times n^2$ N et le rang de cette matrice vaut n ssi il existe un mineur d'ordre n extrait non nul. On considère alors l'application polynomiale g qui à M associe la somme des carrés des mineurs de N. g est continue et O est l'image réciproque de $]0, +\infty[$ par g donc O est un ouvert.

(3) Imagine les élèves sont numérotés de 1 à 100, ainsi que les boites. La stratégie optimale va être d'utiliser les permutations 100 100. Dans les boites y'a un nom d'élève qui correspond à un nombre, donc si je suis l'élève 1, j'ouvre la boite 1, je découvre le numéro 12 (par exemple) donc je vais ouvrir la boite 12 (ainsi de suite). Ainsi, si la permutation ne possède pas d'orbite (ou de cycle) de taille supérieur à 50 c'est dans la poche !
Après il va s'agir d'un calcul de proba : "quelle est la probabilité qu'il n'y ait pas d'orbite de plus de 50 ?" Là faut répondre, "je sais pas !" mais normalement il te pose la question

à la fin de l'heure, donc normalement si tu dis ça c'est déjà bienjesus.
Proba (pas de cycle de longueur ¿50) $= 1 - \ln(2) \sim 30,7\%$:
$n := 50;;$
Soit $k > n$, comptons les permutations ayant un cycle de longueur k exactement.Il y a $\binom{2n}{k}$ choix pour les éléments de C, $(k-1)!$ manières de les arranger, et $(2n-k)!$ manières d'arranger le reste ; le produit de ces nombres vaut $(2n)!/k$. Étant donné qu'il ne peut y avoir plus d'un k-cycle dans une permutation, $(k > n)$, la probabilité est donc $\frac{1}{k}$. La proba qu'il n'y ait pas de cycle long est donc

$$1 - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \ldots - \frac{1}{2n} = 1 - H_{2n} + H_n$$

Où H_m est la somme des m premiers inverses (série harmonique), $\sim \ln(m)$. Notre proba est donc $1 - \ln(2m) + \ln(m) = 1 - \ln(2)$.
Pour $n = 50$, la proba que les prisonniers s'en sortent est de 31.1827821
Voir

`http://www.springerlink.com/content/c1107q6614555085/fulltext.pdf`

Solution 2.1.5 (Abdessamad Benzakour) Note :
Examinateur : *il était sympa, laisse réfléchir, aide quand il le faut.*

(1) a) On écrit $A = P^{\mathrm{T}}DP$ avec P orthogonale on pose alors $X' = PX$, $Y' = PY$.
Il suffit de démontrer l'inégalité pour une matrice diagonale définie positive, ce qui s'obtient par Cauchy-Schwarz : en effet $X^{\mathrm{T}}DX = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$ avec $\lambda_i > 0$ d'où

$$(X^{\mathrm{T}}Y)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\lambda_i} x_i \times \frac{y_i}{\sqrt{\lambda_i}}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2\right) \times \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i^2}{\lambda_i}\right) = X^{\mathrm{T}}AX \times Y^{\mathrm{T}}A^{-1}Y.$$

Remarque : (merci Charlotte) si on prend le produit scalaire $(X|Y) = X^{\mathrm{T}}AY$ alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne directement le résultat :

$$\underbrace{(X|A^{-1}Y}_{=(X^{\mathrm{T}}Y)^2} \leqslant \underbrace{(X|X)}_{=X^{\mathrm{T}}AY} . \underbrace{(A^{-1}Y|A^{-1}Y)}_{=Y^{\mathrm{T}}A^{-1}Y}.$$

b) On a $A^{-1} = \operatorname{com} A^{\mathrm{T}} / \det A$, donc $e_1^{\mathrm{T}}A^{-1}e_1 = \det(A_1)/\det(A)$ car $e_1^{\mathrm{T}}\operatorname{com} A^{\mathrm{T}}e_1$ est le premier terme de la première ligne de $\operatorname{com} A^{\mathrm{T}}$, cofacteur de a_{11}, égal à $\det A_1$.

c) On utilise 1 pour A puis B avec comme vecteurs X quelconque et e_1 :

$$(X^{\mathrm{T}}AX).(e_1^{\mathrm{T}}A^{-1}e_1) = (X^{\mathrm{T}}AX) \times \frac{\det A_1}{\det A} \geqslant x_1^2$$

l'égalité étant atteinte pour $X = e_1$. $e_1^{\mathrm{T}}A^{-1}e_1$ est donc la borne inférieure de la fonction qui a X associe $X^{\mathrm{T}}A^{-1}X/x_1^2$ où x_1 est la première composante de X (en supposant $x_1 \neq 0$).
On a alors

$$\begin{aligned}\det(A)/\det(A_1) + \det B/\det(B_1) &= 1/(e_1^{\mathrm{T}}A^{-1}e_1) + 1/(e_1^{\mathrm{T}}B^{-1}e_1) \\ &\geqslant (X^{\mathrm{T}}AX)/x_1^2 + (X^{\mathrm{T}}BX)/x_1^2\end{aligned}$$

ce qui est égal a $(X^{\mathrm{T}}(A+B)X)/x_1^2$, ceci étant vrai pour tout X.
Ainsi pour $A + B$ le membre de droite minore cette fonction donc est inférieur a sa borne inf ce qui fournit le résultat demandé.

(2) On minore le carré de la distance entre deux vecteurs par une constante strictement positive :

$$\|X - X'\|^2 = \|X\|^2 + \|X'\|^2 - 2(X|X') = 2(1 - (X|X')) \geqslant 2(1 - \lambda)$$

d'où $\|X - X'\| \geqslant \sqrt{2(1-\lambda)}$.
Ensuite si B infini on peut trouver une suite infinie d'éléments distincts dans B, comme la boule unité est compacte il existe une sous suite (X_n) convergente ce qui contredit la minoration précédente car $\|X_{n+1} - X_n\| \to 0$.

Solution 2.1.6 (Jean Rochet) Note :
Examinateur : *Le même que nécro, c'est-à-dire le gars qui connaît Lembrez. Par contre il ne m'a pas posé le coup de "Lembrez pète les plombs", j'aurai pu torcher, je connaissais déjà. Il était très gentil, il s'est limite excusé de m'avoir posé son exo vu comment je me suis raté... Il faut dire, il n'arrêtait pas d'utiliser des mots que je ne connaissais pas... (des notions de math hors programme).*

(1) On pose $u = \dfrac{f'}{2i\pi f}$ c'est légal car f ne s'annule pas, le tout est de montrer que u est réelle.
On a $\|f\|^2 = 1$ donc $f\overline{f} = 1$ et donc $f'\overline{f} = -(\overline{f})'f$ soit $\dfrac{f'}{f} = -\overline{(\dfrac{f'}{f})}$ donc le rapport f' sur f est un imaginaire pur ! Ça tombe bien on divise par $2i\pi$ pour avoir u.
(Moi j'ai donné un argument géométrique, j'ai dessiné un cercle et j'ai mis en évidence le fait que $f(x)$ est orthogonale à sa tangente $f'(x)$, donc le rapport est imaginaire pur, mais je préfère l'autre méthode (c'est celle pour laquelle il m'a dit ("on peut aussi faire comme ceci...")).

(2) D'après la question 1), f vérifie une équa diff, donc est de la forme voulue avec F définie comme une primitive de u donc dérivable, attention à ne pas oublier la constante d'intégration ! $F(x) = \displaystyle\int_a^x u(t)\,\mathrm{d}t + \alpha$ (α représente l'argument de $f(a)$).

(3) ... Là j'ai plus rien compris, il m'a donné des indications qui m'ont perdu... bref la fin de la colle fut un désastre total...
A la fin, je lui ai fait comprendre que je n'étais pas content de moi et que je me disais que c'était fini pour moi, il m'a dit "Oh, à votre place, je me ferais pas de souci". Il a sans doute dit cela pour être gentil... je m'attends pas à avoir une note très haute...

Solution 2.1.7 (Johann Michael Thiebaut) Note :
Examinateur : *À la vue de l'exercice, on devine M. Rosso, un type habillé en costume noir l'ai sympa et qui devrait coller avec le d'Artagnan qui sommeille dans l'inconscient collectif. Ce qui est bien c'est qu'il répond si vous demandez une indication et qu'il pose les bonnes questions si vous allez trop vers le décor. J'ai aussi eu un spectateur qui disait qu'il était examinateur pour un truc dont je n'ai rien à faire (sans vouloir être méchant, hein) et il ne m'a pas perturbé le moins du monde. Un bon point pour lui.*

(1) Moi je me dis ça y est, c'est la fin, va falloir montrer qu'elles sont simultanément trigonalisables... Je me sentais gêné parce que j'avais oublié le truc du vep commun.
Après un passage rapide dans les broussailles (ie une idée qui ne sert à rien), il me fait remarquer que $f(t) = e^{tA}$ est un fonction intéressante.
"Oui, lui dis-je car c'est la seule solution de l'équation $f'(t) = Af(t)$ vérifiant $f(0) = I_n$.

Je lui sors donc la fonction $g(t) = e^{tA}e^{tB}e^{-\frac{t^2}{2}C}$ et calcule illico la dérivée :

$$g'(t) = Ae^{tA}e^{tB}e^{-\frac{t^2}{2}C} + e^{tA}Be^{tB}e^{-\frac{t^2}{2}C} - te^{tA}e^{tB}Ce^{-\frac{t^2}{2}C},$$

en lui faisant remarquer qu'il faut faire attention parce que A et B ne commutent pas (sauf si on se place dans le cas $C = 0$ dirait Ahmed).
Le truc que tout le monde voit, c'est bien sûr d'échanger e^{tA} et B en faisant apparaître un terme correctif. On écrit donc :

$$e^{tA}B = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k A^k B}{k!},$$

en remarquant que $A^kB = BA^k + kCA^{k-1}$, pour k¿0 (ceci ce prouve par récurrence), on a :

$$e^{tA}B = B\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k A^k}{k!} + tC\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^{k-1}A^{k-1}}{(k-1)!} = Be^{tA} + tCe^{tA}.$$

On en déduit $g'(t) = (A+B)e^{tA}e^{tB}e^{-\frac{t^2}{2}C} = (A+B)g(t)$ et comme $g(0) = I_n$, on a le résultat : $\forall t \in \mathbb{R}$, $e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}e^{-\frac{t^2}{2}C}$.
Il me dit alors qu'on va prouver que C est nilpotente, je lui sors donc le truc de la trace :

$\forall k \in \mathbb{N}*,\ \operatorname{Tr}(C^k) = \operatorname{Tr}((AB-BA)C^{k-1}) = \operatorname{Tr}((AC^{k-1})B) - \operatorname{Tr}(BAC^{k-1}) = 0.$

S'en suit une histoire sordide de système d'équations sur les vap de C. Après moult cafouillages de ma part, on s'est mis d'accord pour dire que la seule vap de C est zéro de multiplicité n, grâce à des déterminants de système qui sont des Vandermonde.
Conclusion : C est nilpotente.
Pour montrer que A, B, C sont simultanément trigonalisables, la force est avec moi, je me suis souvenu du truc entre temps et lui ai montré un vep commun à A, B et C, pris évidemment dans le noyau de C.

- Montrons par l'absurde que C n'est pas inversible :
  La première relation donne $I_n = ABC^{-1} - BAC^{-1}$. Or C commutant avec A et B, il en est de même de C^{-1} donc

$\operatorname{Tr}(ABC^{-1}) = \operatorname{Tr}(AC^{-1}B) = \operatorname{Tr}(BAC^{-1})$ en utilisant la propriété $\operatorname{Tr}(MN)\operatorname{Tr}(NM)$.

  On a ainsi $\operatorname{Tr}(I_n) = 0$ ce qui est absurde (on a bien sûr supposé que $n \geqslant 1$!).
  Conclusion : $\operatorname{Ker} c \neq \{0\}$.
- On va maintenant prouver ce résultat par récurrence sur n. La propriété au rang 1 est immédiate, on la suppose vraie au rang n.
  On appelle respectivement a, b, c les endomorphismes de $\mathbb{C}^{n+1}$ de matrice A, B, C.
  Soit $a' = a_{|| \operatorname{Ker} c}$ et $b' = b_{|| \operatorname{Ker} c}$ (a et b stabilisent $\operatorname{Ker} c$ vu qu'ils commutent avec c).
  Pour tout $x \in \operatorname{Ker} c$, $ab(x) - ba(x) = c(x) = 0$ donc a', b' commutent. On sait alors qu'ils admettent un vecteur propre commun que l'on note e_1. En complétant (e_1) en une base de $\mathbb{C}^{n+1}$, on écrit les matrices de a, b, c dans cette base : $A_1 = \begin{pmatrix} \lambda & L \\ 0 & A_1' \end{pmatrix}$, $B_1 = \begin{pmatrix} \mu & L' \\ 0 & B_1' \end{pmatrix}$, $C_1 = \begin{pmatrix} 0 & L \\ 0 & C_1' \end{pmatrix}$. Le produit matriciel par blocs donne les relations $A_1'B_1' - B_1'A_1' = C_1'$, $A_1'C_1' = C_1'A_1'$ et $B_1'C_1' = C_1'B_1'$. On utilise alors l'hypothèse de récurrence :

$$A_1' = PTP^{-1},\ B_1' = PT'P^{-1},\ C_1' = PT''P^{-1}$$

  d'où $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & L_1 \\ 0 & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix}$, de même pour B_1 et C_1.

Conclusion : a, b, c sont trigonalisables dans la même base.
Conclusion : Si un gars a le même l'an prochain, il pourra nous dire les autres propriétés des matrices A, B et C.

Solution 2.1.8 (Thomas Cassou) Note :
Examinateur : *je crois qu'il répond assez bien à la description de d'Artagnan.*
Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(\phi)$ (existe sur $\mathbb{C}$), f vep associé (donc f non identiquement nul). Alors $\forall n \in \mathbb{N}, f \circ g^n = \lambda^n f$ (je note en exposant la composition).
– Si $|\lambda| > 1$, alors par continuité de $f \circ g^n$ sur un compact, le membre de gauche est borné, le membre de droite diverge.
– Si $|\lambda| < 1$, par surjectivité de g, $\forall n \in \mathbb{N}, g^n([-1,1]) = [-1,1]$ donc $\forall x \in [-1,1]$, $\exists y_n \in [-1,1]$: $x = g^n(y_n)$ donc $f \circ g^n(y_n) = f(x) = \lambda^n f(y_n)$. La suite $(f(y_n))$ est bornée (continuité de f sur un compact), donc en passant à la limite $f(x) = 0$ d'où $f = 0$, contradictoire.
D'où $|\lambda| = 1$.
Soit $x \in [-1,1]$: $f(x) \neq 0$.
– Si $g(x) \leqslant x$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, g^{n+1}(x) \leqslant g^n(x)$ i.e. $(g^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et bornée donc converge ;
– Si $g(x) \geqslant x$, idem (croissante) ;
– Si $g(x) = x$, c'est encore mieux.
Donc, en notant $y = \lim\limits_{n\to\infty} f \circ g^n(x)$ (qui existe par continuité de tout le monde), $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda^n$ existe (et vaut $\mu = \frac{y}{f(x)}$).
Comme le cercle unité est fermé, $|\mu| = 1$. $\lim_{n\to\infty} \lambda^{n+1} = \mu = \lambda\mu \Rightarrow \lambda = 1$.
1 est donc l'unique valeur propre de ϕ. (ouf!!)
Ensuite, sur $\mathbb{C}$, ϕ est trigonalisable : $\phi = a(\mathrm{Id} + n)a^{-1}$ où n est nilpotent, Id et n commutent, donc avec $n^r = 0$, $n^{r-1} \neq 0$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $\phi^p = a \left(\sum\limits_{k=0}^{r-1} C_p^k n^k \right) a^{-1}$. Or ϕ^p est borné et C_p^{r-1} diverge...
$n = 0$, donc $\phi = \mathrm{Id}$.

Solution 2.1.9 (Thomas Cassou) Note : exo récupéré.
Examinateur : *J'ai sympathisé avec l'ennemi (qui n'en est pas tellement un en tant que provincial comme nous...) et lui ai soutiré ses exos de maths.*
Je n'ai pas de corrigé explicite, je crois qu'il y a une histoire de TVI, à vous de me le dire.
Solution proposée par Yan Shu.
Par absurde : supposons pour tout $y \in \mathbb{R}$, $f(y)$ est atteint un nombre pair de fois.
on suppose $f(0) < f(1)$, soit $y \in]f(0), f(1)[$, ses antécédents sont $x_1 < x_2 < ... < x_{2p}$ et on a

$$f(0) < y = f(x_1) = ... = f(x_{2p}) < f(1)$$

alors $\exists i \in [\![1, 2p]\!]$ tq la fonction $g\ : x \mapsto f(x) - y$ ne change pas la signe en x_i (i.e x_i est un extremum local).
En effet, si g change de signe à chaque fois, $g < 0$ pour $x < x_1$ et, comme on a un nombre pair de x_i, $g < 0$ pour $x > x_{2p}$ ce qui est contradictoire car $g(1) > 0$ et g ne s'annule pas sur $]x_{2p}, 1]$.
On pose alors $r(x) = 1/2 \min(|x_i - x_{i-1}|, |x_i - x_{i+1}|)$, $f(x_i)$ est un extrema strict dans l'intervalle $[x_i - r(x_i), x_i + r(x_i)]$.
À chaque $y \in]f(0), f(1)[$, on peut faire correspondre ainsi x_y tel que f réalise un extremum local strict dans les conditions que l'on vient d'exposer.
Soit alors l'injection $h\ : y \in]f(0), f(1)[\mapsto x_y$. Comme $]f(0), f(1)[$ est infini non dénombrable, $\mathrm{Im}\, h$ est non dénombrable.

$$E = \mathrm{Im}\, h = \{x \in [0,1] \mid f(x) \text{ min local }\} \cup \{x \in [0,1] \mid f(x) \text{ max local }\}.$$

L'un des deux ensembles est non dénombrable. Supposons que ce soit le premier. Pour $x \in E$, $r(x) > 0$ notons $E_n = \{x \in E \mid r(x) > 1/n\}$ alors $\operatorname{Card} E_n < n$ car dans un intervalle de largeur $< 1/n$, il ne peut pas avoir 2 éléments de E_n (sinon on a 2 minima globaux et strict, impossible !). Donc $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} E_n$, où E_n est de cardinal fini donc E dénombrable et on obtient la contradiction attendue.

Solution 2.1.10 (Thomas Cassou) Note :
Examinateur : *?*

(1) J matrice symétrique réelle, de rang 1, de trace $\sum_{i=1}^n x_i^2$ d'où $J = \begin{pmatrix} X^{\mathrm{T}}X & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(2) On vérifie que la suite est définie de manière unique. On utilise des séries entières pour faire apparaître un produit de Cauchy.
$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k x^k\right) \exp(x) = \frac{1}{1-x}$. Je crois qu'il faut multiplier par e^{-x} puis quelques manips pour trouver que u_n tend vers $\frac{1}{e}$.

(3) Une fois de plus je n'ai que des bribes de démo : développement asymptotique, le deuxième terme se somme, le premier est pas beau. Il faut ensuite effectuer des transformations d'Abel sur le premier, je crois qu'au final la somme converge.
On a $u_n \sim v_n = \dfrac{(-1)^n \sin n}{n}$ d'où l'idée de calculer $u_n - v_n$: $u_n - v_n = \dfrac{-\sin^2 n}{n^2 + (-1)^n n \sin n} = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. $\sum u_n - v_n$ converge. Pour prouver que $\sum v_n$ converge, on utilise la transformation d'Abel.
$v_n = \dfrac{a_n}{n}$ où $a_n = \sin[n(1+\pi)]$. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ alors

$$\begin{aligned} |S_n| &= \left|\operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ik(1+\pi)}\right)\right| = \left|\operatorname{Im}\left(\frac{\mathrm{e}^{i(n+1)(1+\pi)} - 1}{\mathrm{e}^{i(1+\pi)}}\right)\right| \\ &\leqslant \frac{2}{\sin(1+\pi)/2} = M. \end{aligned}$$

On utilise alors le critère de Cauchy :

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{n+p} \frac{a_k}{k} &= \sum_{k=n}^{n+p} (S_k - S_{k-1})\frac{1}{k} = \sum_{k=n}^{n+p} S_k \frac{1}{k} - \sum_{k=n-1}^{n+p-1} S_k \frac{1}{k+1} \\ &= S_{n+p}\frac{1}{n+p} - S_{n-1}\frac{1}{n} + \sum_{k=n}^{n+p-1} S_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \end{aligned}$$

d'où, en prenant les modules et en majorant $|S_k|$ par M, on obtient

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} \frac{a_k}{k}\right| \leqslant \frac{M}{n+p} + \frac{M}{n} + \sum_{k=n}^{n+p-1} M\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{2M}{n}.$$

On peut donc conclure avec le critère de Cauchy que la série $\sum v_n$ converge donc $\sum u_n$ converge.

Solution 2.1.11 (Thomas Cassou) Note :
Examinateur : *apparemment ça serait Grigis, pas très parlant. A l'affût de la moindre hésitation, demande alors des justifications.*

J'ai commencé par montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u$ existe, donc l'intégrale dans l'intégrale est toujours bien définie.

On pose $g(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u$. Par une I.P.P. (on intègre le sinus), on montre que g admet une limite en $+\infty$ (qui vaut $\frac{\pi}{2}$). g est donc bornée en valeur absolue par M.

– $f \in \mathcal{C}^\infty(]0,+\infty[)$: soit $h(x,t) = \mathrm{e}^{-xt}\,g(t)$.
  – $\dfrac{\partial^p h}{\partial x^p}(x,t) = (-t)^p h(x,t)$ est continue,
  – Sur $[a,b] \subset]0,+\infty[$, $|(-t)^p h(x,t)| \leqslant t^p\,\mathrm{e}^{-at}$ qui est intégrable.

  En vertu du théorème de dérivation sous l'intégrale, f est bien $\mathcal{C}^\infty$ sur tout intervalle $[a,b]$ donc sur $]0,+\infty[$.

– $f'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} -t\,\mathrm{e}^{-xt}\,g(t)\,\mathrm{d}t$. On fait une I.P.P. en intégrant $-\mathrm{e}^{-xt}$. La partie toute intégrée s'annule ce qui fournit l'équation différentielle $f'(x) = -\dfrac{f(x)}{x} - \dfrac{1}{x(x^2+1)}$.

  L'intégration nous donne la forme de f : $f(x) = \dfrac{C - \operatorname{Arctan} x}{x}$.

  On fait à nouveau une I.P.P. avec $xf(x)$ d'où $xf(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ et, en majorant $\left|\dfrac{\sin t}{t}\right|$ par 1, on a

$$|xf(x)| \leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x} \to 0.$$

  Conclusion : $C = \dfrac{\pi}{2}$ soit $f(x) = \dfrac{\pi/2 - \operatorname{Arctan} x}{x} = \dfrac{1}{x}\operatorname{Arctan}(1/x)$.

Commentaire : on pouvait dès le départ trouver l'équa diff, mais elle n'apparaît pas directement, puis il y a un second membre donc variation de la constante... je suis donc parti sur les séries entières, mais ça se fait bien, et on utilise plein de théorèmes marrants !

Solution 2.1.12 (Johann Michael Thiébaut) Note :
Examinateur : .
Ma solution :
On pose $h(x,t) = e^{-xt}\left(\int_0^t \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u\right)$, et on a : h continue sur $]0,+\infty[\times[0,+\infty[$
$|h(x,t)| \leqslant Me^{-x_0 t}$, où on majore $\int_0^t \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u$ par M (puisque c'est continu par rapport à t et ça possède une limite fine quand $t \to +\infty$), et ceci pour tout $x > x_0$.
On a donc une fonction intégrable sur $[0,+\infty[$, f est continue sur $]x_0,+\infty[$ (pour tout x_0), donc sur $]0,+\infty[$.
Ensuite, on écrit :
$\frac{\partial^n h}{\partial x^n}(x,t) = (-1)^n t^n e^{-xt}\left(\int_0^t \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u\right)$ $\left|\frac{\partial^n h}{\partial x^n}(x,t)\right| \leqslant Mt^n e^{-x_0 t}$.
On a donc f de classe C^∞ sur son intervalle de définition.
Pour l'expression de f, j'ai fait l'équa. diff. :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \int_0^{+\infty} -te^{-xt}\left(\int_0^t \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{e^{-xt}}{x}t\left(\int_0^t \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u\right)\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{x}\left(\int_0^t \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u + \sin t\right)\mathrm{d}t \\
&= -\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{x}\left(\int_0^t \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u + \sin t\right)\mathrm{d}t \\
&= -\frac{f(x)}{x} - \frac{1}{x(x^2+1)}
\end{aligned},$$

puisque $\int_0^{+\infty} e^{-xt}\sin t \ \mathrm{d}t = \frac{1}{x^2+1}$.
On obtient alors : $f'(x) + \frac{f(x)}{x} = \frac{-1}{x(x^2+1)}$, d'où : $f(x) = \frac{\lambda - \mathrm{Arctan}(x)}{x}$.
Là, aucune CI ne peut vous aider, mais on a :

$$xf(x) = \int_0^{+\infty} xe^{-xt} \left(\int_0^t \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u \right) \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{x}\,\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t,$$

par une IPP. Donc $xf(x) \to 0$ lorsque $x \to 0$. On a donc $\lambda = \frac{\pi}{2}$, et par la formule magique $\mathrm{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}(\frac{1}{x})$, on obtient bien le même résultat.
On peut aussi ajouter un développement de f au voisinage de 0 : $f(x) = \frac{\pi}{2x} - 1 + \frac{x^2}{3} + \cdots + (-1)^{p+1}\frac{x^{2p}}{2p+1} + o(x^{2p})$.
Commentaire : J'ai fait une erreur de signe sur l'équa. diff. et le développement de f en 0 a fait apparaître mon erreur. Je crois qu'il a apprécié que je lui dise qu'on pouvait essayer de trouver une équa. diff. même si j'ai ramé un peu pour la trouver (de deux trucs possibles à intégrer dans l'IPP j'ai d'abord choisi le mauvais parti). Justifier a posteriori les IPP par un "les fonctions sont intégrables" ne lui a pas posé de problème, tant mieux.

Solution 2.1.13 (Clotilde Laigle) Note :
Examinateur : *assez âgé, les cheveux gris, maigre, le visage un peu sec mais vraiment sympa. Les exercices sont relativement faciles, mais bon, je n'ai pas été très rapide ...*
A noter que deux personnes voulait assister à la planche. Il m'a demandé si j'étais d'accord, et comme j'ai dit oui d'un air un peu ennuyé, il a dit "c'est votre planche, vous n'êtes pas obligée d'accepter" et il leur a fermé la porte au nez en ajoutant "il faut savoir parfois être un peu égoïste !"

(1) On trouve $\frac{3\pi}{2}$.

Solution 2.1.14 (Clotilde Laigle) Note :
Examinateur : *Jeune, peut être sympa mais laisse vraiment seul (ne donne aucune indication). Il souhaite bonne continuation, ce qui ne veut pas forcément dire que la planche est réussie, car j'ai vraiment été très lente...*

(1)

Solution 2.1.15 (Simon Watier) Note :
Examinateur : *?*

(1) -]0; +∞[
(2) Faire un dessin de ϕ , poser $A = \max(\phi(1-\delta);\phi(1+\delta))$ découper l'intégrale en trois ... je n'ai pas compris comment on s'arranger pour montrer que $\displaystyle\int_{1+\delta}^{+\infty} (\phi(t))^x \,\mathrm{d}t = O(A^x)$ et comme il ne voulait pas s'éterniser dessus on a passé ...
(3) DL ...
(4) Changement de variable $u = \sqrt{kx}t$. On trouve $\displaystyle\int_{-\delta}^{+\delta} e^{-kxt^2}\,\mathrm{d}t \sim \sqrt{\frac{\pi}{kx}}$.

Solution 2.1.16 (Mylène Dupas) Note :
Examinateur : *celui là avait du mal à former ses mots...porte des lunettes, a des petits yeux et des cheveux blancs.*

(1) $h(x) = x - 1/x$ est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{R}_-^*$ dans $\mathbb{R}$. Donc on prend a et b de même signe et non nuls et on fait le changement de variable $u = x - 1/x$, on majore l'intégrale de a à b de la valeur absolue de g par l'intégrale de la valeur absolue de f et c'est bon.

(2) On sépare l'intégrale de g en 2 et puis ça consiste à calculer x en fonction de u (trinôme du second degré) et de faire les calculs. L'expression de x change selon que x est positif ou non. A la fin on trouve bien l'égalité.
Une fois que j'avais terminé, il m'a dit de le redémontrer pour f fonction caractéristique d'un segment (ça fait moins de calculs). Puis je lui ai dit qu'on pouvait s'en servir en disant que f était limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier que l'on peut exprimer avec des fonctions caractéristiques de segments.

Solution 2.1.17 (Mylène Dupas) Note :
Examinateur : *?*
Il faut tout interpréter en terme de vecteurs :
On écrit la condition sous la forme d'un déterminant non nul, on pose $A(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$. A est une fonction $\mathcal{C}^1$, avec le théorème de relèvement il existe $\theta(t)$ fonction continue tel que

$$A(t) = p(t)(\cos(\theta(t))e_1 + \sin(\theta(t))e_2)$$

avec $p(t) = |A(t)|$ et (e_1, e_2) base canonique de $\mathbb{R}^2$. En exprimant la condition avec cette expression et en utilisant une formule de trigonométrie on a $\theta(t) - \theta(s) \neq 0[\pi]$ pour $t \neq s$, de plus θ est continue sur un compact donc son image est un intervalle compact $[m, n]$ avec $n - m < \pi$. En prenant alors l'angle $(m+n)/2$ et avec $a = \cos((m+n)/2)$, $b = \sin((m+n)/2)$ on a bien la stricte positivité de $au(t) + bv(t)$ (encore une fois avec une formule de trigonométrie).

Solution 2.1.18 (Yohann Salaün) Note : 12
Examinateur : *le même que l'an dernier (ce n'était pas Grigis ni "Lembrez pête les plombs" ni Rosso (il ne ressemblait pas trop à d'Artagnan) et comme il m'a pas posé de géométrie je pense que c'est Henri, d'ailleurs je pense que le"fan de géométrie" n'a pas sévi cette année à l'oral de l'X). L'an dernier il m'a mis 8, là je pense (et espère) qu'il ma mis une meilleure note.*

– en utilisant les propriétés de ces matrices on remarque facilement que leur trace est majorée en valeur absolue par n, de plus ces 2 extrema ne peuvent être atteint qu'en I_n et $-I_n$.
– Maintenant les locaux c'est tout de suite plus drôle :
Il m'a demandé si je connaissais une décomposition de telles matrices et je ne voyais pas trop (honte à moi, on l'avait fait en préparation ....) et donc après avoir étudié le cas $n = 2$ il m'a donné la décomposition en me disant qu'elle se démontrait par récurrence et m'a pas demandé de le faire (tant mieux) :

$$\Omega \in O_n(\mathbb{R}) \text{ alors } \Omega = P \begin{pmatrix} I_{p1} & 0 & & 0 & \\ 0 & -I_{p2} & & 0 & \\ & & R_{\theta_1} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & 0 & \cdots & R_{\theta_q} \end{pmatrix} P^{-1}$$

avec les R_{θ_i} matrices 2×2 de rotation associées à l'angle θ_i, $R_{\theta_i} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & \sin(\theta_i) \\ -\sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) \end{pmatrix}$ ce qui est bien avec cette décomposition c'est que le P disparaît dans la trace, $\mathrm{Tr}(\Omega) = p_1 - p_2 + 2\sum_{i=1}^{q} cos(\theta_i)$.
On remarque alors que si un $\theta_i \neq 0 \text{ou} \pi$ alors ce n'est pas un extremum local (en faisant varier

ce θ_i) et de plus si les θ_i ne sont pas tous égaux alors on a un point selle.
Finalement on se ramène au cas où $\Omega_p = P\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p}\end{pmatrix}P^{-1}$ pour avoir des candidats à l'extrema.
Maintenant on va en éliminer d'autres en utilisant les rotations :
pour p différent de $0, 1, n-1$ ou n on a :

$$M(\theta) = P\begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_{n-p-2} & 0 \\ 0 & 0 & R_\theta\end{pmatrix}P^{-1}$$
$$N(\theta) = P\begin{pmatrix} R_\theta & 0 & 0 \\ 0 & I_{p-2} & 0 \\ 0 & 0 & -I_{n-p}\end{pmatrix}P^{-1}$$

et surtout $N(0) = M(\pi) = \Omega_p$. En étudiant les variations de M et N on voit bien que Ω_p est un point selle.
Finalement il ne reste que :

- $p = 0$: $\Omega_0 = -I_n$ minimum global,
- $p = n$: $\Omega_n = I_n$ maximum global,
- $p = 1$: $\Omega_1 = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -I_{n-1}\end{pmatrix}P^{-1}$ minimum local.
- $p = n-1$: $\Omega_{n-1} = P\begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}P^{-1}$ maximum local.

Pour les deux derniers cas , en réutilisant $N(\theta)$ et $M(\theta)$ on trouve que si ce sont des extrema ils sont nécessairement min et max (comme décrit ci-dessus) mais je n'ai pas prouvé que c'était le cas et je n'ai vraiment pas envie de chercher (si ça se trouve ya plus grand chose à dire mais mode vacances oblige...)
Solution de Yan Shu : il suffit de chercher les maxima locaux (les minima locaux s'obtiennent en prenant l'opposé d'un maximum local).

- on montre tout d'abord qu'une matrice orthogonale réalisant un extremum est nécessairement symétrique : soit A un extremum local pour la trace, $A = (C_1, \dots, C_n)$ où les C_i sont les colonnes de A. Soit $A(\theta) = (C'_1, \dots, C'_n)$ où $C'_k = C_k$ pour $k \neq i, j$ et $C'_i = C_i \cos\theta + C_j \sin\theta$, $C'_j = -C_i \sin\theta + C_j \cos\theta$. On a $A(0) = A$ et comme la trace passe par un extremum en A alors $\mathrm{Tr}(A(\theta)'(0) = 0$ ce qui donne directement $a_{ij} = a_{ji}$.
- Comme A est symétrique, on sait qu'elle est $\mathbb{R}$-diagonalisable et que ses valeurs propres sont de module 1 donc $A \sim D = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p}\end{pmatrix}$.
- Montrons que $p = n-1$: par l'absurde, si $p \leqslant n-2$ alors, en isolant les 2 dernières colonnes, on pose $D(\theta) = \begin{pmatrix} D_{|R^{n-2}} & 0 \\ 0 & R(\theta)\end{pmatrix}$ où $R(\theta)$ est la matrice d'une rotation. $D(\pi) = D$ et $\mathrm{Tr}(D(\theta) - D) = 2(\cos\theta + 1) > 0$ pour $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$ ce qui est contradictoire.
- Enfin, montrons que $\begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}$ est un maximum local.
  - On sait (cf. compléments du cours) que toute matrice normale est unitairement semblable à $D = \mathrm{Diag}(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n})$ et, en particulier si la matrice est réelle, alors elle sera orthogonalement semblable à cette même matrice où les $e^{i\theta_k}$ sont deux à deux conjugués.
  - On raisonne alors par l'absurde : on suppose qu'il existe $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\|H\| < \varepsilon$ et $\mathrm{Tr}(M + H) > \mathrm{Tr}(M) = n-2$, $M + H \in \mathrm{O}(n)$. On note u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$

de matrice $M+H$ dans la base canonique (que l'on note (e_i)).

$$M+H=\begin{pmatrix} & & h_1 \\ & & \vdots \\ * & & \\ & & h_{n-1} \\ & & -1+h_n \end{pmatrix} \sim D=\mathrm{Diag}(\mathrm{e}^{i\theta_k})$$

où la matrice D est la matrice de u dans la base (e'_i).

– Intéressons-nous à l'image de e_n par u : $e_n=\sum\limits_{k=1}^{n} x_k e'_k$ où $\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k|^2=1$ (b.o.n. oblige).

$$\begin{aligned} u(e_n) &= -e_n+\underbrace{\sum_{k=1}^{n} h_k e_k}_{=\varepsilon_n} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{i\theta_k}\, x_k e'_k \text{ car } u \text{ est diagonale dans } (e'_k) \\ &= -\sum_{k=1}^{n} x_k e'_k+\varepsilon_n \end{aligned}$$

d'où, en égalant les deux expressions trouvées : $\sum\limits_{k=1}^{n}(\mathrm{e}^{i\theta_k}+1)x_k e'_k=\varepsilon_n$. Or $\|\varepsilon_n\|=\|He_n\|<\varepsilon$ d'où

$$\sum_{k=1}^{n}|\,\mathrm{e}^{i\theta_k}+1|^2.|x_k|^2=4\sum_{k=1}^{n}\cos^2\theta_k/2.|x_k|^2<\varepsilon^2$$

donc il existe $l\in[\![1,n]\!]$ tel que $\cos^2\theta_l/2<\varepsilon^2$ donc $\cos\theta_l=2\cos^2\theta_l/2-1<2\varepsilon^2-1$ et pour ε assez petit, $\cos\theta_l<0$.

Conclusion : après renumérotation des valeurs propres, en considérant celles qui sont réelles d'abord, on arrive à

$$\mathrm{Tr}(M+H)=p+2\sum_{k=p+1}^{r}\cos\theta_k<p+2\sum_{k\neq l}\cos\theta_k\leqslant n-2$$

avec $p+2r=n$. On obtient la contradiction attendue.

Solution 2.1.19 (Jonathan Donier) Note :
Examinateur : *Math 1*
Trigonaliser A et B et se ramener à une application g qui a les mêmes vap que f de la forme $g(X)=TX+XT'$.
On sait qu'il existe des matrices P et Q dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, T et T' triangulaires telles que $A=PTP^{-1}$, $B=QT'Q^{-1}$, d'où, en posant $Y=P^{-1}XQ$ on obtient

$$\begin{aligned} f(X)=AX+XB &= PTP^{-1}X+XQT'Q^{-1} \\ &= P(TY+YT')Q^{-1}=Pg(Y)Q^{-1}. \end{aligned}$$

On a alors équivalence entre X vep de f associé à λ et Y vep de g associé à λ.
Si $Y=ZW^{\mathrm{T}}$ où Z est un vep de T de vap α et W un vep de T'^{T} de vap β alors $g(Y)=\alpha Y+(T'^{\mathrm{T}}WZ^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=(\alpha+\beta)Y$ donc $\mathrm{Sp}(A)+\mathrm{Sp}(B)=\mathrm{Sp}(T)+\mathrm{Sp}(T')\subset\mathrm{Sp}(g)=\mathrm{Sp}(f)$.
Réciproquement : étudions tout d'abord le cas où T et T' sont diagonales : $T=\mathrm{Diag}(\alpha_i)$, $T'=\mathrm{Diag}(\beta_j)$ alors l'équation $TY+YT'=\lambda Y$ donne $\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $[(\alpha_i+\beta_j)-\lambda]y_{ij}=0$ et comme Y n'est pas la matrice nulle, on en déduit qu'il existe $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$ tel que $\lambda=\alpha_i+\beta_j$.

Dans ce cas, on a bien l'inclusion dans l'autre sens d'où $\mathrm{Sp}(A) + \mathrm{Sp}(B) = \mathrm{Sp}(f)$.
Si T et T' sont simplement triangulaires : soit Y un vep de g alors $g(Y) = TY + YT' = \lambda Y$ soit $(T - \lambda I_n)Y = -YT'$.
Si $MY = YN$ alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $M^k Y = YN^k$ (immédiat par récurrence) donc, par linéarité, pour tout polynôme P, $P(M)Y = YP(N)$. Si on prend le polynôme caractéristique de T' alors $P_{T'}(T - \lambda I_n)Y = P_{T'}(T' - \lambda I_n)(Y) = 0$. La matrice $P_{T'}(T - \lambda I_n)$ n'est pas inversible car son noyau n'est pas réduit à $\{0\}$, son déterminant est donc nul. $P_{T'}(T - \lambda I_n)$ est une matrice triangulaire et, sur la diagonale, on a $\alpha_i - (\lambda - \beta_i)$ où les α_i et β_i sont respectivement les valeurs propres de T et T'. L'une de ces quantités est donc nulle soit il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $\lambda = \alpha_i + \beta_i$.
Ceci prouve l'inclusion dans l'autre sens.
Conclusion : on a $\mathrm{Sp}(g) = \mathrm{Sp}(T) + \mathrm{Sp}(T')$ soit $\mathrm{Sp}(f) = \mathrm{Sp}(A) + \mathrm{Sp}(B)$.

Solution 2.1.20 (Jonathan Donier) Note :
Examinateur : *Math 2*

(1) Non : prendre $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui est semblable à $A_p = \begin{pmatrix} 0 & 1/p \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Si $N(A) = N(A_p)$ alors, par continuité de la norme, on obtient $N(A) = 0$ ce qui est contradictoire. Dans le cas général, il suffit de prendre $B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B_p = \begin{pmatrix} A_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(2)
- $N(A) = 0$ si A strictement triangulaire supérieure (et inférieure) : en effet, si $A = (C_1\ C_2\ \ldots C_n)$ l'écriture de A par blocs alors A est semblable à $A_p = (C_1\ C_2(p)\ \ldots C_n(p))$ dans la base $(e_1, e_2/p, \ldots, e_n/p^{n-1})$ où les termes des colonnes de A_p sont de la forme a_{ij}/p^{j-i} pour $j > i$ et $a_{ij} = 0$ sinon. Par passage à la limite sur p, on obtient le même résultat que ci-dessus i.e. $N(A) = 0$.
- Si A est à diagonale nulle alors $A = T_i + T_s$ où T_i et T_s sont des matrices respectivement strictement triangulaires inférieure et supérieures donc de norme nulle donc $N(A) = 0$.
- Si $\mathrm{Tr}(A) = 0$ alors A est semblable à une matrice à diagonale nulle (classique) et on peut conclure.

(3) $N(.) = p.|tr(.)|$ convient. En effet si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ alors $B = A - \dfrac{\mathrm{Tr}(A)}{n} I_n$ est une matrice de trace nulle donc sa norme est nulle. $A = B + \dfrac{\mathrm{Tr}(A)}{n} I_n$ et, par l'inégalité triangulaire, $N(A) \leqslant \dfrac{|\mathrm{Tr}(A)|}{n} N(I_n)$. On obtient l'inégalité dans l'autre sens en écrivant $\dfrac{\mathrm{Tr}(A)}{n} I_n = A - B$.
Conclusion : $N(A) = p|\mathrm{Tr}(A)|$.

Solution 3.1.1 (Simon Watier) Note :
Examinateur : *?*
On commence par se ramener à un truc fini : par exemple en invoquant une invariance par translation ... On commence par dire que ça va dépendre du rayon ... On dit que ce qui nous intéresse c'est la position du centre du disque (tirée dans une répartition uniforme) ... On se ramène à $[0, 1]^2$ puis quitte à faire une rotation, à $[0, 1/2]^2$. On fait deux zoli dessin : On s'intéresse aux trois cas suivant :
- $r \geqslant (1/2)^{1/2}$ ... OK.
- $(1/2)^{1/2} > r > (1/2)$ deuxième dessin.

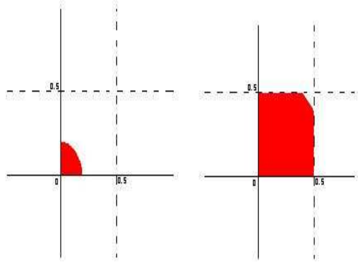

FIG. 5. Le disque

– $r \leqslant (1/2)$ premier dessin.
En fait il suffit de calculer l'aire du truc en rouge sur les dessins pour conclure ...

Solution 3.1.2 (Jean Rochet) Note :
Examinateur : .
Le bâton est repéré par la position de son centre t modulo 1 et l'angle θ qu'il fait avec l'axe Ox. Compte tenu de la périodicité des droites, on prend $t \in [0, .5]$ et $\theta \in [0, \pi/2]$. Les variables t et θ sont indépendantes et le bâton touche une droite ssi $2t \leqslant \sin\theta$. La probabilité cherchée est égale au rapport de l'aire de $\{(t, \theta) \in [0, 0.5] \times [0, \pi/2] \mid 2t \leqslant \sin\theta\}$ sur l'aire du rectangle et vaut $\dfrac{2}{\pi}$.
Je crois que cette idée est due à Buffon (et non bouffon) mais si vous voulez calculer π avec cette méthode, il va falloir être très patient !

Solution 3.2.1 (Jean Rochet) Note :
Examinateur : *Très gentil, met à l'aise, fait oui de la tête quand ce qu'on dit est bien (moi, ça m'aide beaucoup). Il a les cheveux blancs, et porte des lunettes.*

(1) C'est encore une histoire avec Abel, si $r = s + t$, $t > 0$ on pose $u_n = \dfrac{a_n}{n^s}$ et $v_n = \dfrac{1}{n^t}$, $r_n = \sum\limits_{k=n}^{+\infty} u_k$. On utilise alors le critère de Cauchy en remplaçant u_n par $r_n - r_{n+1}$: pour $\varepsilon > 0$, on choisit N pour que $n \geqslant N \Rightarrow |r_n| \leqslant \varepsilon$ alors, comme la suite (v_n) est décroissante,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=n}^{n+p} u_i v_i\right| = \left|\sum_{i=n}^{n+p} (r_i - r_{i+1}) v_i\right| &= \left|\sum_{i=n}^{n+p} r_i v_i - \sum_{i=n}^{n+p} r_{i+1} v_i\right| \\ &\leqslant |r_n v_n| + \left|\sum_{i=n+1}^{n+p} r_i (v_i - v_{i+1})\right| + |r_{n+p+1} v_{n+p}| \\ &\leqslant \varepsilon v_n + \varepsilon (v_{n+p} - v_n) + \varepsilon v_{n+p} = 2\varepsilon v_n.\end{aligned}$$

Le critère de Cauchy est donc satisfait donc la série converge.
On remarque que pour que ce résultat soit valable, il suffit que $v_n \geqslant 0$ et soit décroissante.
Si $r > s + 1$ alors, comme la suite u_n définie ci-dessus est majorée et que $t > 1$, on a bien la convergence absolue.

(2) On prend $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln n}$ et $s = 0$. La série $\sum \dfrac{1}{n \ln n}$ diverge.

Solution 3.2.2 (Renaud Boussarié) Note :
Examinateur : *sympa, ridé avec des lunettes et une tête assez spéciale et indescriptible.*

(1)

Solution 3.3.1 (Simon Watier) Note : 16.5
Examinateur : *?*
Cf. sujets d'étude sur l'algèbre.

Solution 3.3.2 (Jonathan Laliberté) Note :
Examinateur : *Ensemble : jury ultra sympa, moment d'absence quand il se lève et commence à parler entre eux alors que je n'en suis qu'à la moitié de l'ADS mais sympa et le flux passait bien.*

Solution 3.3.3 (François Dayrens) Note :
Examinateur : *assez sympa, n'avait pas l'air de trop se faire chier (sauf à un moment il y en a un (celui de maths) on aurait dit qu'il dormait).*

Solution 3.3.4 (Thomas Liverzay) Note :
Examinateur : *?*

Solution 4.1.1 (Jean Rochet) Note : 13
Examinateur : *Sympa, pourtant il avait des lunettes. J'ai eu l'impression de passer une colle comme pendant l'année, c'est pour dire qu'il mettait vraiment à l'aise.*

(1) a) On obtient $(1 - A^n)^2$.

b) On utilise Riemann, attention de justifier que dans le log c'est toujours > 0 et à voir que le "pas" n'est pas $1/n$ comme d'ab mais $\frac{2\pi}{n}$. Puis on calcule la limite grâce à des équivalents on obtient que l'intégrale vaut 0 si $|A| < 1$ et $4\pi \ln |A|$ sinon.

(2) Par l'absuuuuuuuurde !!!

Soit M une telle matrice, on a $M^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ or $M^6 = 0$ donc M nilpotente donc $M^3 = 0$ contradiction.

(3) La CNS est A et B sont cycliques et $\operatorname{Card} A \wedge \operatorname{Card} B = 1$.

- CN : Il est facile de voir que A et B se doivent d'être cyclique :
Si $A\times B$ est cyclique et $\operatorname{Card} A \wedge \operatorname{Card} B = d$ alors il existe un élément (a, b) de $A\times B$ qui engendre $A\times B$ et son ordre est $\operatorname{Card} A\times \operatorname{Card} B = \operatorname{Card}(A\times B)$. Or $(a, b)^{\operatorname{Card} A \vee \operatorname{Card} B)} = (e_A, e_B)$ donc $(\operatorname{Card} A)\times(\operatorname{Card} B) | (\operatorname{Card} A \vee \operatorname{Card} B)$ autant dire que $d = 1$.
- CS : Soit $A = (a)$ et $B = (b)$ deux groupes cycliques finis, on note $n = \operatorname{Card} A$ et $m = \operatorname{Card} B$ et $n \wedge m = 1$.
Soit (x, y) appartenant $A\times B$, alors il existe p et q tel que $a^p = x$, $b^q = y$.
Si $p = q$ alors $(a, b)^p = (x, y)$ sinon on sait que $a^{p+kn} = x$ et $b^{q+k'm} = y$ d'où grâce à l'identité de Bézout, on trouve u et v tels que $ux + vy = 1$ d'où $k = u(q - p)$ et $k' = v(p - q)$ conviennent. $A\times B$ est cyclique !

Solution 4.1.2 (Alexandre Vérine) Note : 12
Examinateur : *en P 202, un mec entre 3 et 4 fois 12 ans avec une barbe d'une semaine légèrement grisonnante, qui paraissait sympa et ouvert à une discussion au début... mais qui ne dit presque rien par la suite.*

(1) a) OK : comme $f^{n-1} \neq 0$ et $f^n = 0$ alors il existe $x \in E$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$ et on montre que la famille $(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ est libre.

b) Je l'ai fait en passant par des considérations exotiques sur le polynôme minimal et autres annulateurs, en faisant l'arnaque de dire que si E est la réunion finie de s.e.v., l'un d'eux est égal à E (arnaque valable sur un corps infini sinon c'est une vanne). L'examinateur s'était montré muet jusque là, ne regardant jamais mon tableau et faisant mine de ne pas écouter ; 1 min après mon arnaque, il me demande d'expliciter la ligne en question.
Et là, ...je craque et je lui dis que je l'arnaque et que je saurais pas le démontrer, et que je pense que ma démonstration est beaucoup trop compliquée. Il acquiesce ... et me dit, je vois pas comment vous allez faire pour la troisième question. Je lui dis que cette fois j'ai une démonstration simple, il me demande donc de passer directement au 3. Pris de remords, je conclus la question b) à l'oral et j'enchaîne.
Vu que l'examinateur ne m'a donné aucune indication sur le b) et c) et que j'ai tout fait a ma façon, je ne propose pas de solution claire et simple pour ces questions.
Solution : soit (e_k) une base diagonalisante (c'est possible car dire que les vap sont 2 à 2 distinctes signifie qu'elles sont d'ordre 1). On prend alors $x = \sum_{k=1}^{n} e_k$. $f^p(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^p e_k$ et si $\sum_{p=0}^{n-1} \mu_p f^p(x) = 0$ alors, en décomposant sur la base des (e_k) on a $\sum_{p=0}^{n-1} \mu_p \lambda_k^p = 0$. Soit $P = \sum_{p=0}^{n-1} \mu_p X^p$, P est un polynôme de degré $\leqslant n-1$ qui admet n racines distinctes, c'est donc le polynôme nul i.e. $\mu_p = 0$.

c) Tout se passe bien, je lui propose une solution qui s'apparent à celle du b) mais en beaucoup plus simple.
Comme f est diagonalisable et qu'elle admet au moins une valeur propre multiple alors son polynôme minimal est de degré $\leqslant n-1$ donc, pour tout x, $(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ est liée.
Ce raisonnement peut aussi servir dans le cas de la question précédente, le polynôme minimal étant, au signe près, le polynôme caractéristique.

(2) Là je commence à parler de sortir le log, puis de calculer la somme du bas avec les sommes de Riemann, puis je dis que la somme pourrait être équivalente à $n(\ln n)^\alpha$, puis je la majore par cette quantité, pas de réponse du mec malgré toute ma bonne volonté....J'essaie de montrer que $u_n - 1/(n^2(\ln n)^\alpha) \to 0$, puis il me dit : cette somme, on l'explicite par un calcul classique.
Je bataille 5 min puis je fais une comparaison série intégrale (il acquiesce, en se réveillant une nouvelle fois au préalable). Mais l'intégrale à calculer n'est pas totalement immédiate, donc je fais une I.P.P. et la, badaboum, je fais de la m**** et j'inverse tout. Il se réveille de nouveau et me dit, l'idée de l'I.P.P. est bonne, mais l'I.P.P. est mal faite. Je me ressaisis et je la fais bien, en majorant l'intégrale issue de l'I.P.P. on obtient que la somme du début est équivalente à $n(\ln n)^\alpha$, et il me demande sans me laisser conclure (même si c'était immédiat) de passer au fatidique 3e exo.

Solution : la fonction $x \mapsto (\ln x)^\alpha$ est croissante sur $[1, +\infty[$ donc, en utilisant un argument semblable à celui de la comparaison série-intégrale, on obtient l'encadrement

$$\int_1^n (\ln x)^\alpha \,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^n (\ln k)^\alpha \leqslant \int_2^{n+1} (\ln x)^\alpha \,\mathrm{d}x.$$

On en déduit que $\sum\limits_{k=1}^n (\ln k)^\alpha \sim I_n = \displaystyle\int_1^n (\ln x)^\alpha \,\mathrm{d}x$ et on fait la fameuse I.P.P. :

$$\int_1^n (\ln x)^\alpha \,\mathrm{d}x = n(\ln n)^\alpha - \alpha \int_1^n (\ln x)^{\alpha-1} \,\mathrm{d}x$$

et comme l'intégrale du second membre est majorée par $n(\ln n)^{\alpha-1}$ si $\alpha \geqslant 1$ et par n si $\alpha \leqslant 1$, on conclut que $I_n \sim n(\ln n)^\alpha$ soit $u_n \sim \dfrac{1}{n^2(\ln n)^\alpha}$.

(3) Alors là, soit on se barre, soit on fait une cypre, soit on garde les flots d'insultes pour soi et on se dit que c'est vache mais vraiment pas compliqué et que l'oral se termine dans 5min (au plus mal certes...). Je lui dis que c'est la cardioïde, pour gagner 30 secondes de répit, puis je restreins l'intervalle d'étude avec autant de précision que possible : 2 min de gagnées, puis je fais un joli tableau de variation : 1 min, puis je dis : il faut étudier les tangentes la où $r'(\theta) = 0$ (un vague souvenir me revenant), il me dit allons-y (quel sadique), et la j'arnaque vite fait la première, puis il me dit, ça ira...
Résultat : je commence sur un exo facile et plutôt cool, que je réussis bien, mais malgré tout il me pose ensuite de l'analyse, et il termine sur des courbes...youpi ! ! ! (et surtout ya des rapports devant la salle qui indique qu'on évalue la discussion entre le candidat et l'examinateur, mais malgré tous mes efforts à l'oral, c'était un super monologue, ça explique peut-être pourquoi la fille qui passait quand je préparais ne disait plus rien (elle avait peut-être découragée)).

Solution 4.1.3 (Boris Dalstein) Note : 18

Examinateur : *Disons 40-50 ans, plutôt petit, avec des lunettes, cheveux châtains dégarnis au milieu. Plutôt très antipathique, mais n'est pas totalement muet. Je lui torche la première question en 3 min étant donné que j'avais trouvé les contre-exemples pendant la période de préparation... Il se met alors à me poser des questions débiles :*
"Pour quelle norme considérez vous la limite de vos suite ?" (je lui dis par exemple la norme induite par $\mathrm{Tr}(\overline{A}^T B)$*, mais que ça revient au même puisqu'en dimension finie toutes les normes sont équivalentes...).*
"Pouvez vous prouver que c'est bien une norme ?" (là j'ai le sentiment qu'il me prend pour un débile...) je lui écris que en développant c'est égal à $\sum\limits_{i,j} \overline{a_{ij}} b_{ij}$*, et donc que c'est trivialement une forme sesquilinéaire définie positive).*
Le deuxième exo, j'ai bien fait le début, mais après ai un peu galéré pour résoudre les relations de récurrence, je n'avais vraiment pas pensé qu'il serait presque tous nuls, et m'embrouille dans les indices. Il m'a laissé galérer jusqu'à la fin, puis à finalement décidé à me dire : il ne serait pas possible de démontrer qu'à partir de c_2 *ils sont tous nuls ?*
A oui, j'avais oublié ma carte d'identité, il a pas été méchant sur ce point par contre, il m'a juste dit qu'il fallait que je la lui montre plus tard...

(1) D_n n'est ni ouvert ni fermé. Je le montre avec des contre exemple en dimension 2, il suffit de rajouter des 1 sur la diagonales en dimension n.

– Il n'est pas fermé car $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1+\frac{1}{p} \end{pmatrix}$ est diagonalisable pour tout p, mais tend vers $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui n'est pas diagonalisable.

– Il n'est pas ouvert car son complémentaire n'est pas fermé : $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{p} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas est diagonalisable, mais tend vers $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui l'est.

(2) f étant $\mathcal{C}^\infty$, on peut la développer en série de Fourier, série qui converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$. (il m'a demandé quel était le type de convergence). On écrit $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$, et on remplace dans l'équation :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{2inx} = 2\sin(x) \sum_{n\in\mathbb{Z}} inc_n e^{inx}$$

on remplace le sinus par des exponentielles d'où

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\, \mathrm{e}^{i2nx} &= (\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} nc_n\, \mathrm{e}^{inx} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} nc_n\, \mathrm{e}^{i(n+1)x} - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} nc_n\, \mathrm{e}^{i(n-1)x} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [(n-1)c_{n-1} - (n+1)c_{n+1}]\, \mathrm{e}^{inx} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [2nc_{2n} - 2(n+1)c_{2(n+1)}]\, \mathrm{e}^{i(2n+1)x} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [(2n-1)c_{2n-1} - (2n+1)c_{2n+1}]\, \mathrm{e}^{i2n)x}
\end{aligned}$$

d'où les relations :

$$2nc_{2n} - 2(n+1)c_{2(n+1)} = 0 \qquad (1)$$

$$(2n-1)c_{2n-1} - (2n+1)c_{2n+1} = c_n \qquad (2)$$

Dans (1), avec $n = 0$ on obtient $c_2 = 0$ puis, par une récurrence immédiate, $c_{2n} = 0$. De même si $n = -1$ on a $c_{-2} = 0$ puis $c_{-2n} = 0$.
Dans (2), avec $n = 1$ on a $c_1 - 3c_3 = c_1$ d'où $c_3 = 0$ puis, par une récurrence forte, si $c_k = 0$ pour $2 \leqslant k \leqslant 2n+1$ alors $c_{2n+2} = 0$ vu la première récurrence puis, avec $n \leftarrow n+1$ dans (2), $(2n+1)c_{2n+1} - (2n+3)c_{2n+3} = c_{n+1}$ ce qui donne $c_{2n+3} = 0$. On a ainsi $c_n = 0$ si $n \geqslant 2$.
On procède de même avec $n < 0$ (où on remarque que $\overline{f}$ vérifie la même équation).
Conclusion : f est de la forme $f(x) = c_0 + c_1 e^{inx} + c_{-1}e^{-inx} = c_0 + a_1\cos x + b_1 \sin x$.
On peut alors être plus précis en revenant à l'équation :

$$2\sin x f'(x) = a_1(\cos 2x - 1) + b_1 \sin 2x = c_0 + a_1 \cos 2x + b_1 \sin 2x$$

soit $f(x) = \lambda(1-\cos x) + \mu \sin x$ i.e. l'ensemble des solutions est $\mathrm{Vect}((1-\cos x), \sin x)$.

Solution 4.1.4 (Ahmed Wassfi) Note : 15
Examinateur : *C'est l'homme avec un fort accent, russe sans doute. A priori il a l'air méchant et n'est pas très souriant mais en réalité il est gentil et donne des indications lorsqu'il le faut. J'ai eu 15min de préparation. Au début il me passe le premier exercice et 10 min plus tard, me demande si j'ai fini (je réponds oui) et me donne le deuxième exercice. Il me pose d'autres*

questions au cours du premier exercice : à quelles conditions A est inversible ? Exprimer son inverse dans ce cas.

(1) Le premier exercice est dans l'oral 2008. $\deg(p) = 1$ et pour le $\det(A)$ il faut distinguer le cas $b = c$ et $b \neq c$. Pour le cas $b = c$ j'écris que $A = bJ + (a-b)I$ et je diagonalise A. Je trouve le bon résultat mais me demande comment on passe du cas $b \neq c$ au cas $b = c$. Je bloque un peu (alors qu'on l'a fait !) puis me de remplacer b par x et là j'ai réussi à conclure. Je m'en suis un peu voulu sur le coup mais ma méthode a incité l'examinateur à me poser des questions sur l'inverse et je savais répondre.

(2) Pour le deuxième exercice pour la convergence simple c'est direct (je lui dis que la série $\sum n^\alpha x^n$ converge pour $0 < x < 1$ et il me demande pourquoi. J'utilise les séries entières $n^p x^n$ et x^n ont même rayon de convergence mais il me dit que d'Alembert permet aussi de conclure.)
Pour la convergence normale on calcule la norme infinie de u_n (elle est atteinte en $n/(n+1)$ mais j'ai fait une petite erreur je crois avoir trouvé $(n-1)/n$, il me demande de reprendre mes calculs mais je lui dis que j'ai pas fait d'erreur de calcul. Il commence alors à refaire les calculs (je suis fort je réussi à le faire douter) et me demande de les refaire de mon côté et là je trouve le bon résultat. Le point positif de cette erreur est que l'examinateur qui ne sourit pas a souri.). Pour qu'il y ait convergence normale il faut $\alpha < 0$ (si je me souviens bien). Pour $\alpha \geqslant 1$ la norme infinie de u_n ne tend pas vers 0 donc il n'y pas convergence uniforme.
Pour $0 \leqslant \alpha < 1$:
Pour la convergence normale une condition nécessaire, mais pas suffisante pour que la série des u_n converge uniformément vers u est que $\|u_n\|_\infty \longrightarrow_{n\to\infty} 0$. Pour le démontrer, on écrit que $u_n(x) = \sum\limits_0^n u_k(x) - \sum\limits_0^{n-1} u_k(x)$ donc $|u_n(x)| \leqslant \|(\sum\limits_0^n u_k - u)\|_\infty + \|(\sum\limits_0^{n-1} u_k - u)\|_\infty$ par passage à la borne sup, $\|u_n\|_\infty \leqslant \|(\sum_0^n u_k - u)\|_\infty + \|(\sum_0^{n-1} u_k - u)\|_\infty$.
$\sum(u_n)$ converge vers $u \Rightarrow \|u_n\|_\infty$ tend vers 0.
On a $\sum_0^\infty u_k(1) = 0$, on va donc minorer le terme général :
$\forall n > 0, n^\alpha x^n(1-x) \geqslant x^n(1-x) = x^n - x^{n+1}$ (somme télescopique). $\sum\limits_0^\infty u_n(x) \geqslant x$. Si on avait la CU, on pourrait passer à la limite $\Rightarrow \sum u_n(1) \geqslant 1$.
Contradiction.

(3) Pour l'exercice 3 je lui demande si l'année 2010 est une année bissextile et il me dit non. Je lui réponds instantanément que 365=1 modulo 7 donc on sera mardi.

(4) Pour le dernière exercice j'utilise le théorème de convergence dominée et on trouve $f(0)$.

Pour conclure, c'est une planche facile mais je ne pense pas avoir excellé.
Pour info et en particulier pour Laurie, la personne qui est passée juste avant moi a eu l'exo suivant :
Soit A une matrice. On suppose que pour toute matrice X, $\det(A + X) = \det(A) + \det(X)$. Déterminer A.
Réponse : $A = 0$.

Solution 4.1.5 (Marc Jeanmougin) Note : 12
Examinateur : *j'ai peu parlé de lui... jeune, a l'air sympathique au premier abord, en fait non. Il laisse plus ou moins aller, sans toutefois faire autre chose, attend que l'on dise quelque chose. En résumé, je suis toujours mal réveillé, et j'irai bien me rendormir. Toute façon, les mines, pour moi c'est fini*
Commentaire : 8h du mat, mal réveillé. Bon alors cet exo en a l'air, et effectivement il est

chiantissime. J'ai dit de la merde un peu partout, il a du me prendre pour un débile et j'ai eu la flemme de lui dire que c'était son exo qui était chiant.

(1) Pas compliqué, mais distinguer les cas $x = 1$ et $x = -1$ c'est assez chiant. On trouve à moins qu'il se soit foutu de moi $(]-1, 1[\times\mathbb{R}) \cup (-1, 2\pi\mathbb{Z}) \cup (1, \pi + 2\pi\mathbb{Z})$. Après, on "constate" que les applications partielles sont des séries entières ou de Fourier, donc euh à voir pour $\mathcal{C}^1$ mais bon ça devrait marcher.

(2) Commentaire : Bon là je sais pas quoi faire, je cherche le noyau et je passe à côté d'un truc énormissime (mes trois équations étaient liées...) Enfin bref, il m'aide un peu, je trouve l'image, le rapport de l'homothétie (et sans la trace).
Correction : Bon ben on écrit, on multiplie, on trouve un super plan comme noyau, on est content, on cherche un vecteur de l'image, on dit que c'est Vect de ça, donc pour le projecteur c'est sur l'image parallèlement au noyau (sérieux ?) Pour l'homothétie, soit on prend un vecteur de l'image et on calcule, soit on regarde la trace.

(3) Commentaire : bon là, ça va un peu mieux, je lui balance le résultat intuitif : $\sum_{k=1}^{n}(k(n-k)) \leqslant f(\sigma) \leqslant \sum_{k=1}^{n} k^2$ et il me dit de le démontrer (pfff).
Éléments de correction :
L'égalité de gauche, pas eu le temps, mais ça doit se faire.
Pour l'égalité de droite, on décompose la permutation en produit de cycles disjoints, et faut montrer que $k_1k_2 + k_2k_3 + ... + k_ik_1 \leqslant \sum_{a=1}^{i}(k_a^2)$. Je bloque un moment pour montrer ça, il me dit Cauchy, et c'est fini. Ensuite on rassemble les morceaux avec plusieurs cycles disjoints, et tout marche bien.
L'autre sens j'essaierai un jour, mais là j'en peux plus.

Solution 4.1.6 (Jonathan Laliberté) Note : 12
Examinateur : *?*

(1) a) On remarque tout d'abord que $B_p(A-I) = \dfrac{1}{p+1}(A^p - I)$ et comme la suite (A^p) est bornée, on a $\lim\limits_{p\to+\infty} B_p(A-I) = 0$.
La suite (B_p) est bornée (on a immédiatement $\|B_p\| \leqslant \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \|A^k\|$), le théorème de Bolzano-Weierstrass (cf théorème 5.21 page 234) nous permet d'en extraire une suite convergente $(B_{\varphi(p)})$ vers une matrice B qui vérifiera nécessairement $B(A-I) = 0$.

b) Par une récurrence immédiate, on a $BA^k = B$, ce qui donne $BB_p = B$ et, comme la multiplication matricielle est continue, $B^2 = B$.

c) B étant la matrice d'un projecteur, on a $\operatorname{Ker} B \oplus \operatorname{Ker}(I - B) = \mathbb{C}^n$.
Comme $B(A-I) = 0$, $\operatorname{Im}(A-I) \subset \operatorname{Ker} B$.
Prouvons maintenant que $\operatorname{Ker}(A-I) \subset \operatorname{Ker}(B-I)$: si $AX = X$ alors $A^kX = X$ pour tout k i.e. $B_pX = X$ et par passage à la limite $BX = X$.
On en déduit immédiatement $\operatorname{Ker}(A-I) \oplus \operatorname{Im}(A-I) = \mathbb{C}^n$ et on a les égalités : $\operatorname{Im}(A-I) = \operatorname{Ker} B$, $\operatorname{Ker}(A-I) = \operatorname{Ker}(B-I)$.

d) Toute valeur d'adhérence B' de B_p vérifie $B'^2 = B'$ donc B' projecteur, son image et son noyau sont déterminés (sans dépendre de B) donc il y a unicité de la valeur d'adhérence et B_p tend vers B.

(2) Second exo pour $x \notin \{-1, 1\}$ puis passer à l'angle moitié et factoriser par u^2. On obtient du tangente...
On trouve $f(x) = \dfrac{\pi}{|1-x^2|}$.

(3) Le dernier bah OMo. $v(\theta) = Y(\theta)$ i.e. ça tend vers $-1/2$ selon mes calculs : $r(\theta)\sin(\theta - \pi/4) \to -1/2$. On en déduit l'asymptote et, avec un petit effort supplémentaire, la position de la courbe par rapport à son asymptote.

Solution 4.1.7 (Nicolas Fleury) Note : 10
Examinateur : *Je me suis fait simplement détruire.*

(1) pour le 1 il faut chercher le projeté orthogonal de X^4 sur $\mathbb{R}_2[X]$ avec comme produit scalaire $(P, Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt$ (où P, Q sont 2 polynômes réels).
Le plus direct est de chercher une bon de $\mathbb{R}_4[X]$ puis de projeter mais bon .... (je pense pas qu'il y ait beaucoup plus simple).

(2) C'est une equa diff d'Euler, donc les solutions de l'équation homogène sont $\dfrac{\lambda}{x^2} + \dfrac{\mu}{x}$. Je trouve comme solution particulière $(\dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{x^2})\ln(1+x) - \dfrac{1}{3x} + \dfrac{1}{6} - \dfrac{x}{9}$. A vérifier

---

Solution 4.1.8 (Yohann Salaün) Note : 14
Examinateur : *plutôt vieux mais très sympa, donne un exo à préparer puis en rajoute après. J'ai eu 3 exos pas trop compliqués mais en voulant aller trop vite j'ai enchaîné un certain nombre de conneries (mais j'ai pas l'impression qu'il m'en ait beaucoup voulu pour ça ..)*

(1) En testant pour la série harmonique (qui ne converge pas mais bon ....) on voit que $\sum b_n$ converge donc on se doute que ça va toujours converger.
En utilisant Cauchy-Schwarz (ou la convexité généralisée) on montre que :

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k}\frac{1}{\sqrt{a_k}} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}}$$

que l'on peut traduire par :

$$b_n \leqslant \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n^{2\alpha}} \leqslant \frac{S}{n^{2\alpha}} = O(\frac{1}{n^{2\alpha}})$$

heureusement que $\alpha > \dfrac{1}{2}$.

(2) Soit S la matrice de passage de la première base (sans le U) à la seconde (avec le U), $S = I + \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \lambda_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_n & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$ donc l'équivalence revient à trouver les cas où l'on a $\det S = 0$.
Or la matrice des λ est de rang 0 ou 1 donc les vap de S sont 1 et $1 + \mathrm{Tr}(\Lambda)$. Ainsi $\det S = 0 \Leftrightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = -1$. Je laisse au lecteur le soin de trouver la CNS finale (très dur)

(3) On pose $U = \sum\limits_{i=1}^{n} e_i$, $|U^{\mathrm{T}}MU| \leqslant \|U\|.\|MU\| = \|U\|^2$ par Cauchy-Schwarz, or $|U^{\mathrm{T}}MU| = |\sum\limits_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{i,j}|$ donc $|\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} m_{i,j}| \leqslant n$ et ce majorant est le meilleur possible car il est

atteint pour $M = I$.
Pour l'autre inégalité on utilise l'inégalité géométrique :

$$\prod_{i=1}^{n} a_i \leqslant \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}\right)^n$$

ainsi que la caractéristique des matrices orthogonales : $\forall j \sum_{i=1}^{n} m_{i,j}^2 = 1$ ainsi pour $a_i = m_{i,j}^2$ on trouve : $\forall j \prod\limits_{i=1}^{n} m_{i,j}^2 \leqslant \frac{1}{n^n}$. Finalement $|\prod\limits_{i=1}^{n}\prod\limits_{j=1}^{n} m_{i,j}| \leqslant \frac{1}{n^{\frac{n^2}{2}}}$.

Je n'ai pas prouvé que c'était la meilleure majoration, d'ailleurs je sais même pas si c'est le cas mais elle est quand même assez optimale (c'est mieux que de majorer par 1 quoi !)
L'examinateur m'a dit que pour des espaces de dimensions 2^p ça pouvait se prouver "facilement".

Solution 4.1.9 (Thomas Liverzay) Note : 18
Examinateur : *Salle M001. La cinquantaine, barbe hirsute et regard pétillant. Plutôt sympa, il donne les indications juste quand il faut, à petites doses, et nous dit de vérifier quand il décèle une erreur d'étourderie (en recopiant une intégrale par exemple). Mais on ne sait pas trop ce qu'il pense, car il ne dit rien de plus. Un spectateur (un élève de sup qui doit s'ennuyer pendant ses vacances...) était présent.*
Remarque : apparemment les salles sont fixes (en tout cas pour la série) car il occupait la même salle lundi et mardi, idem en Anglais et Francais
Déroulement : comme tous les candidats convoqués à 9h, je passe une heure après. Pas de préparation. Il me laisse faire, et me pose parfois des "questions" du genre "précisez", pour mieux guider.

(1) Le sens indirect est immédiat.
Pour le sens direct :
On veut construire u en donnant l'image d'une base. On cherche aussi à réaliser $u(\mathrm{Ker}(\phi)) \subset \mathrm{Ker}(\psi)$. Ayant dit ça, et après quelques (longues) minutes de solitude pour ma part, je propose :
1er cas : $\phi(a) = \psi(b) \neq 0$ alors, on a $E = \mathrm{Vect}(a) \oplus \mathrm{Ker}\,\phi = \mathrm{Vect}(b) \oplus \mathrm{Ker}\,\psi$
On construit alors l'automorphisme u en envoyant une base sur l'autre : a va sur b, puis $\mathrm{Ker}(\phi)$ va sur $\mathrm{Ker}(\psi)$ (on sait qu'ils sont de même dimension, il suffit d'expliciter les bases pour construire u). Et ça marche.
2eme cas : $\phi(a) = \psi(b) = 0$, c'est presque pareil, sauf que $\mathrm{Ker}(\phi)$ contient a, et $\mathrm{Ker}(\psi)$ contient b. On envoie donc $\mathrm{Ker}(\phi)$ sur $\mathrm{Ker}(\psi)$. Puis, pour les supplémentaires, si on note $E = \mathrm{Vect}(x) \oplus \mathrm{Ker}\,\phi = \mathrm{Vect}(y) \oplus \mathrm{Ker}\,\psi$, on prend $u(x) = y$. Pour que ça marche, il suffit qu'on ait choisi x (hors du noyau de ϕ), puis y tels que $\psi(y) = \phi(x)$. Il me demande si c'est possible. Je lui dis qu'on peut prendre $y = \dfrac{\phi(x)h}{\psi(h)}$ où $\psi(h)$ est non nul. Il essaie de me faire dire ensuite qu'une forme linéaire est surjective, donc le y existe, de toute façon. Bref, ça marche en recollant tous ces morceaux.

(2) Comme on a une inégalité, je lui dis qu'on peut penser à Cauchy-Schwarz, et qu'on peut introduire l'espace ℓ^2. On le munit du produit scalaire $(u|v) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}^\star} \overline{u_n} v_n$. Il m'a demandé de justifier rapidement que la série convergeait, que tout ça marchait bien... cf cours.
Mais le taupin éveillé (pas moi ce matin là) n'oublie pas de d'abord justifier l'existence des sommes de l'énoncé. Pour la première, c'est grâce à la C.N. de la série de Fourier. Pour celle de droite, on développe la parenthèse, et on utilise que $|c_n(f')| = n|c_n(f)|$,

puis que d'après Parseval (f' est continue et périodique), $\sum |c_n(f')|^2$ converge.
En cherchant un peu, connaissant le résultat à prouver, et à partir de l'inégalité de Cauchy Schwarz pour le p.s. introduit, on se rend compte qu'il faut appliquer C.S. à $u_n = \sqrt{4n^2-1}|c_n(f)|$ et $v_n = \frac{1}{\sqrt{4n^2-1}}$.
On l'écrit, et on doit donc calculer $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}^\star} \frac{1}{4n^2-1}$. Il suffit de décomposer en éléments simples, et de faire un changement d'indice. On trouve 1. Puis on conclut sur le résultat, en justifiant bien :

$$\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}^\star} c_n(f)\right|^2 \leqslant \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}^\star} |c_n(f)|\right)^2 \leqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}^\star} (4n^2-1)\,|c_n(f)|^2 .$$

(Remarque : passer par l'intermédiaire du milieu n'était pas nécessaire)

(3) (Il restait 5 minutes, ce qui explique le genre de l'exo)
Il suffit de paramétrer la parabole. Pour l'abscisse curviligne, c'est du calcul d'intégrale, avec changement de variable en Argsh, puis linéarisation de ch^2. Il ne m'a pas demandé de simplifier le résultat final (ch($Argsh$), etc), et je n'ai pas refait le calcul en sortant) donc je ne connais pas le résultat.

Solution 4.1.10 (Pierre Weyl) Note : 13
Examinateur : *plutôt sympa, s'est trompé dans le premier exo en me disant que f était seulement $\mathcal{C}^1$ ce qui est gênant pour calculer $g''(0)$.*

(1) On pose $k(t) = a + th$ et on a $g'(t) = \mathrm{d}f(k(t)).k'(t)$ et on explicite. De même pour $g''(0)$ (ceci dit je vois pas l'intérêt de faire calculer $g''(0)$ et pas $g''(t)$ parce qu'il faut d'abord calculer $g''(t)$ pour calculer $g''(0)$).

(2) En fait il faut penser à introduire la droite D_t : $x\cos(t) + y\sin(t) + 1 = 0$ on fait un dessin.
Et on se souvient (ou l'examinateur nous pousse à se souvenir) de l'expression de la distance d'un point à une droite. On est ramené à : $\mathrm{d}(M, D_t) = OM$.
D'où d'après la définition géométrique d'un conique : c'est une parabole de directrice D_t de foyer O..
Lieu des sommets : c'est un cercle de rayon 1/2. Utiliser le dessin pour s'en rendre compte, comme le sommet est à demi distance de la directrice et de O...

(3) Trifouiller. Je ne me rappelle plus des détails.

(4) On prend une borne finie en 0 et on fait le changement de variable $x = \ln(t)$ on est ramené à l'intégrabilité de $x^{20}\exp(x)$ en ∞ donc ça converge bien.

Solution 4.1.11 (Thomas Cassou) Note : 15
Examinateur : *le Russe d'Ahmed il me semble. Très sympa.*

(1) a) Avec le TVI si A est l'ensemble des points fixes de f, A est non vide, puis ici A borné d'où l'existence du sup M et de l'inf m. Caractérisation séquentielle et passage à la limite (f continue).

b) Si a point fixe de f, $g(a)$ l'est aussi. Donc $g(m) \geqslant m$, $g(M) \leqslant M$. TVI pour $h = f - g$ sur $[m, M]$.

(2) On a $N(q)$ inclus dans $C(q)$.
– Si q est positive ou négative, on applique Cauchy Schwarz pour le sens retour.

– Sens direct : par contraposée. Soit x_1 tel que $q(x_1) > 0$, x_2 tq $q(x_2) < 0$. $t \to q(tx_1 + (1-t)x_2)$ est continue, donc s'annule en un certaine t dans $]0,1[$. Ensuite si $y \to b(tx_1 + (1-t)x_2, y)$ était identiquement nulle, en évaluant en x_1 puis x_2, $b(x_1, x_2) > 0$ et $b(x_1, x_2) < 0$. D'où le résultat.

(3) a) On fait un changement de variable pour avoir du $\ln(1+u)$, puis DL en 0 de la fraction en justifiant que l'on peut l'intégrer (continuité des fonctions dans les bornes, etc...).

On pose $u = t - 1$ d'où $f(x) = \displaystyle\int_{x-1}^{x^2-1} \frac{\mathrm{d}u}{\ln(1+u)}$. Or $\ln(1+u) = u - \dfrac{u^2}{2} + o(u^2)$ donc

$$\frac{1}{\ln(1+u)} = \frac{1}{u}\left(1 + \frac{u^2}{2} + o(u^2)\right) = \frac{1}{u} + \frac{u}{2} + o(u)$$

ce qui donne

$$f(x) = \underbrace{\int_{x-1}^{x^2-1} \frac{\mathrm{d}u}{u}}_{=\ln\frac{x^2-1}{x-1} \to \ln 2} + \underbrace{\int_{x-1}^{x^2-1} (\frac{u}{2} + o(u))\,\mathrm{d}u}_{\to 0}$$

donc $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \ln 2$.

b) On dérive sans état d'âme $f(x)$, qu'il faut alors intégrer entre 0 et 1, en justifiant que la limite en 0 vaut 0.

On écrit que $f(x) = F(x^2) - F(x)$ où $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$ si $x < 1$ et $F(x) = \displaystyle\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$ si $x > 1$ ($\dfrac{1}{\ln t} \to 0$ quand $t \to 0$). On sait que f se prolonge par continuité en 1 vu la question précédente puis

$$f'(x) = 2xF'(x^2) - F'(x) = \frac{2x}{\ln x^2} - \frac{1}{\ln x} = \frac{x-1}{\ln x}.$$

f' admet une limite en 1 et en 0 donc, grâce au théorème du prolongement dérivable, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$.

Il suffit de prendre $x = 1$ ci-dessus pour conclure $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t = \ln 2$.

(4) TCD, la 1ere fonction converge simplement vers $\exp(-x)$, l'autre vers la fonction constante égale à 1, et à partir du 2eme terme de la suite on peut majorer par $1/(\sqrt(x))$, intégrable en 0.

On note que la suite $I_n = \displaystyle\int_0^1 \big(1 + \frac{x}{n}\big)^{-n} x^{-\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}x$ n'est définie qu'à partir de $n = 2$. On pose $f_n(x) = \big(1 + \frac{x}{n}\big)^{-n} x^{-\frac{1}{n}}$.

– $\lim\limits_{n\to+\infty} x^{-1/n} = 1$ si $x > 0$ (on intègre sur l'intervalle $]0,1]$),
– $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^{-n} = \mathrm{e}^{-x}$,
– $0 \leqslant f_n(x) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ (pour $n \geqslant 2$) qui est intégrable sur $]0,1]$.

Le théorème de convergence dominée s'applique d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 1 - \mathrm{e}^{-1}$.

Solution 4.1.12 (Laurie Goffinon) Note : 09
Examinateur : *?*

(1) $u(0)$ est non nul, et pour tout n non nul, $u(n)$ appartient à $[2/3, 4/3]$.
On étudie $f(x) = 1 + \sin(1/x)/3$ sur $[2/3, 4/3]$, f est décroissante sur $[2/3, 4/3]$.
Je dis qu'on peut représenter les termes de la suite sur un graphe, ce que je fais (en me trompant avant d'effacer et de recommencer...). Je dis qu'il faudrait savoir si le graphe de f coupe la première bissectrice. Il me répond que f admet un point fixe dans $[2/3, 4/3]$. Je ne sais pas s'il attendait que je le démontre ou s'il avait prévu de me le donner pendant l'étude de f...
Soit $g(x) = x - f(x)$, $g'(x) = 1 + \dfrac{1}{3x^2}\cos(1/x)$. Sur $[2/3, 4/3]$, $g'(x) > 0$, $g(2/3) < 0$, $g(4/3) > 0$ donc il existe un unique $l \in [2/3, 4/3]$ tel que $g(l) = l - f(l) = 0$. f admet un unique point fixe sur $[2/3, 4/3]$.
f est contractante. En effet, $|f'(x)|$ est inférieure ou égale à $3/4$ sur $[2/3, 4/3]$. D'après la version au programme du théorème du point fixe, $u(n)$ converge vers le point fixe de f.

(2) On cherche le noyau de f. On trouve un espace de dimension 2. f admet donc 0 comme valeur propre double. Le rapport de l'homothétie est la troisième valeur propre de f. Je commence à calculer le polynôme caractéristique, il me laisse calculer durant quelques minutes avant de me faire remarquer qu'avec la trace, c'est immédiat... On trouve que le rapport est 3. L'image de p est le sous-espace propre associé à la valeur propre 3.
Un calcul direct donne $M^2 = 3M$ donc f est la composée de l'homothétie h de rapport 3 et du projecteur de matrice $\dfrac{1}{3}M$.

(3) Il y a convergence simple sur $[0, 1]$.
Pour montrer la convergence uniforme, je reviens à la définition.
Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue en 1, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout x dans $[1-\eta, 1]$, $|f(x)| < \varepsilon$.
Posons $a = 1 - \eta$: sur $[a, 1]$, $|f_n(x)| \leqslant |f(x)| < \varepsilon$. On choisit alors N tel que, pour $n \geqslant N$, $a^n\|f\|_\infty < \varepsilon$.
Conclusion : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant N$, $|f_n(x)| \leqslant \varepsilon$ en distinguant les cas $x \leqslant a$ et $x \geqslant a$.

Solution 4.1.13 (Jonathan Donier) Note : 19
Examinateur : *?*

(1) a) Faire apparaître du Vandermonde.
 b) Le complémentaire est l'image réciproque d'un fermé par une certaine application continue...

(2) a) Non.
 b) Pour la 3ème.

Solution 4.1.14 (Alexandre Debétancourt) Note : 11
Examinateur : *assez muet, laisse réfléchir et donne des indications quand il le faut. Oral pas très bien réussi, je ne comprenais pas très bien ce qui se passait à la question 2, du moins au début, et c'est presque lui qui a fait l'exo....*

(1) On calcule les premiers termes. on trouve $0, 2, 6, 2, 0$ et ça se répète. On fait un récurrence sur cinq termes pour prouver ce fait. Dès lors le calcul de la somme est très simple.

(2) Il faut connaître un autre méthode du développement du Vandermonde que celle qui consiste à remplacer la dernière colonne avec des X. J'expose cette méthode sur un vrai

Vandermonde, par ex sur la matrice $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{pmatrix}$

On considère le polynôme $P(X) = (X-a).(X-b).(X-c)$. En le développant, on a $X^3 + \alpha.X^2 + \beta.X + \gamma$ avec les coefficients connus en fonction des racines. On réalise l'opération $C_4 \leftarrow \gamma.C_1 + \beta.C_2 + \alpha.C_3$, on obtient des zéros sur les trois premières lignes et $P(d)$ sur la dernière. On recommence ce processus pour avoir une matrice triangulaire inférieure.

Ici on va procéder de même en considérant le polynôme $P(X) = (X-a)^2.(X-b)^2.(X-c)$. On obtient après l'opération citée : $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 & 0 \\ 1 & b & b^2 & b^3 & b^4 & 0 \\ 1 & c & c^2 & c^3 & c^4 & 0 \\ 0 & 1 & 2a & 3a^2 & 4a^3 & 0 \\ 0 & 1 & 2b & 3b^2 & 4b^3 & 0 \\ 0 & 1 & 2c & 3c^2 & 4c^3 & P'(c) \end{pmatrix}$ où $P'(c) = (c-a)^2.(c-b)^2$

Solution 5.1.1 (Yohann Salaün) Note : 17

Examinateur : *physiquement on pourrait dire "à la jean" qu'il a des cheveux sur la tête mais son point particulier est clairement le "Kwik !Kwik" du couinement de ses chaussures (certainement neuve) comme pourra le certifier Clotilde qui l'a eu juste avant moi (j'en profite d'ailleurs pour dire qu'elle a posé M tilde quelque part dans son exo et ça c'est la classe). A part ça il est sympa mais faut éviter de torcher son exo en moins d1/4 d'heure paske après il va pas arrêter de dire "oui mais c'est une planche facile...." et on sent la note qui descend.*

(1) a) OK.

b) Comme $t < 1$ on fait apparaître la somme d'une suite géométrique de raison $-t^\beta$.
Soit : $J(\alpha,\beta) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{\alpha-1}}{1+t^\beta}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k t^{\beta k+\alpha-1}\,\mathrm{d}t$.
Il reste juste à prouver que la somme de l'intégrale de la valeur absolue converge pour "inverser les 2 sigma". Mais si on y va à la bourrin on a un terme en $1/n$ qui diverge donc on prend 2 termes consécutifs :

$$\int_0^1 t^{\beta k+\alpha-1} - t^{\beta^{k+1}+\alpha-1} dt = \frac{\beta}{(\alpha+\beta k)(\alpha+\beta(k+1))} = O\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

Donc ça converge bien et on peut inverser somme et intégrale pour trouver finalement : $J(\alpha,\beta) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{\beta k+\alpha}$.
Maintenant attaquons la 2ième méthode.... en fait yen a pas : je lui ai dit que je voyais pas comment faire (qu'un changement de variable en $1/t$ ne menait pas à grand chose) et il m'a finalement dit qu'il ne voyait plus ce qu'il voulait faire en demandant une 2ième méthode.
Si, une deuxième méthode consiste à ne pas développer en série :

$$J(\alpha,\beta) = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{\beta k+\alpha-1}\,\mathrm{d}t + R_n$$

où $R_n = \displaystyle\int_0^1 (-1)^{n+1}\frac{t^{\beta(n+1)+\alpha-1}}{1+t^\beta}\,\mathrm{d}t$ et, en minorant $1+t^\beta$ par 1, on obtient $|R_n| \leqslant \displaystyle\int_0^1 t^{\beta(n+1)+\alpha-1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\beta(n+1)+\alpha} \to 0$ ce qui permet de conclure.

(2) Pour la convergence de la série, on sépare termes pairs et impairs et on utilise d'Alembert (ou D'alembert ou D'Alembert ou d'alembert ...) pour le calcul on fait pareil

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{3^{n+(-1)^n}} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(2p)^2}{3^{2p+1}} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(2p+1)^2}{3^{2p}}$$

puis on regroupe en fonction des puissances de p et on trouve (attention il faut justifier qu'on peut bien séparer les sommes) :

$$S = \frac{16}{3}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{p^2}{9^p} + 4\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{p}{9^p} + \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{9^p} = \frac{16}{3}h(\frac{1}{9}) + 4g(\frac{1}{9}) + f(\frac{1}{9})$$

avec : $f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} x^p = \frac{1}{1-x}$, $g(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} px^p = xf'(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$, $h(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} p^2x^p = xg'(x) = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$.

Finalement on trouve $S = \dfrac{21}{8}$.

Rqe : je me suis petit peu trompé dans le calcul des dérivées mais a priori ça va par contre je laisse le reste des calculs au(x) lecteur(s).

(3)
- Cex de $R \neq \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$: la suite définie par (0,1,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,0,1,.....), on met à chaque fois p zéros avec p qui va de 1 à l'infini tout en intercalant des 1 entre chaque série de zéros par l'absurde si cette suite est dans R à partir d'un certain rang elle est nulle (ce qui n'est pas le cas).
- Cex de $G \neq \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$: la suite (1,1,0,....,0,.......) par l'absurde si cette suite est dans G on a une combinaison linéaire de ρi^n et ya du Vandermonde (en prenant l'égalité des termes à partir du 2nd à l'infini) donc le déterminant est non nul et l'unique solution impose que les coefficients devant les ρi^n soient tous nuls ce qui est gênant pour le 2ième terme (et pas le premier car $0^0 = 1$) mais l'examinateur n'a pas trop aimé mon contre exemple et m'en a demandé un autre :
  - "prenez une suite qui croît plus vite que les géométriques"
  - "euh .... exponentielle ? ?" (sur le coup j'ai vraiment bien joué, mais quand on me parle de qqchse qui croit vite je pense forcément à l'exponentielle...) mais je me suis vite rattrapé en parlant de $n!$ (désolé si j'ai crié un peu trop fort ...). On a alors par l'absurde $n!$ est une CL de ρi^n, on divise l'égalité par $2\sup|\rho i|^n$ et en passant à la limite on trouve que l'infini vaut zéro ce qui permet de dire que la "censuré" d'Ahmed est infinie (rappelons le lemme important : $e^{\text{ the JAM}} + 1 = Ahmed$) ou alors tout simplement de dire qu'il y a contradiction donc la suite des factorielles n'est pas dans G
- Montrons que $G \subset R$ mais $G \neq R$ en s'inspirant des démos de sup sur les suites à relation de récurrences d'ordre 2 :
  Soit $u(n) = \sum\limits_{i=0}^{p} \lambda(i)\rho(i)^n$ suite de G (les $\rho(i)$ sont tous distincts ...). On considère alors la suite a_n de R définie par la relation de récurrence

$$v(n+p) = \sum_{i=0}^{p-1} a(i)u(n+i)$$

et des conditions initiales tq les $p-1$ premiers termes soient les mêmes que la suite de G. De plus on a $\prod_{i=1}^{p}(X-\rho(i)) = \sum_{i=0}^{p-1} a(i)X^i + X^p$ en continuant sur la demo de sup on trouve que $u = v$ car vérifiant la même relation de récurrence et les mêmes CI, donc $G \subset R$.
Soit $u \in R$ tq $u(n+2) = 2u(n+1) - u(n)$, $u(0) = 0$ et $u(1) = 1$. Par l'absurde on suppose que $u(n) = \sum_{i=0}^{p} \lambda(i)\rho(i)^n$ alors $\sum_{i=0}^{p} \lambda(i)(\rho(i)^{n+2} - 2\rho(i)^{n+1} + \rho(i)^n) = 0$ car u vérifie sa relation de récurrence.
Soit $\sum_{i=0}^{p} \lambda(i)(\rho(i)^2 - 2\rho(i)^1 + 1)\rho(i)^n = 0$ pour tout n. On a donc une combinaison linéaire nulle de suites $\rho(i)^n$ qui forment une base de G (on le fait avec Vandermonde) ainsi pour tout i, $\lambda(i)(\rho(i)^2 - 2\rho(i)^1 + 1) = 0$ soit $\lambda(i) = 0$ ou $(\rho(i)^2 - 2\rho(i)^1 + 1) = 0$ donc $\lambda(i) = 0$ ou $\rho(i) = 1$ ainsi la suite u est constante ce qui est loin d'être le cas ....
d'où la conclusion ....

.

Solution 5.1.2 (Nicolas Fleury) Note : 11
Examinateur : *?*

(1) En utilisant Parseval :
On a $\cos(9t) + 1$ qui vérifie $1 + 1/2 < 9/2$ (inégalité des intégrales en utilisant Parseval et en multipliant par 2π) donc cette fonction est dans A. De même $\cos(9t)$ est dans A $(1 < 9/2)$ donc si A sev alors 1 est dans A .... et donc 1¡0 donc (par récurrence triviale) on trouve que l'infini est nul et donc :
"la "censuré" d'ahmed est infinie (rappelons le lemme important :) " (je me cite moi même) on s'en lasse pas hein Ahmed ? ? ? donc on a la contradiction pour le 1

(2) On décompose en série de Fourier dans $\mathbb{R}$ on prend $f(0) = f(2\pi)$ pour avoir $a_n(f') = na_n(f)$ puis on voit que l'ensemble des fonctions vérifiant $a_0 = a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 0$ et $f(0) = f(2\pi)$ est un s-ev de $\mathcal{C}^1([0, 2\pi]$ inclus dans A et son supplémentaire et de dim 6.

(3)

Solution 5.1.3 (Ali Boukhobza) Note : ?
Examinateur : *?*

(1) On utilise Taylor-Young à l'ordre 1 et faire une démo avec des ε.
On utilise la différentiabilité de f en 0 :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}^* \mid \forall x \in [0, 1/N], |f(x) - xf'(0)| \leqslant \varepsilon x \text{ (car } f(0) = 0).$$

On a alors l'encadrement suivant, pour $n \geqslant N$:

$$\left| \sum_{k=0}^{n} \left(f(\frac{k}{n^2}) - \frac{k}{n^2} f'(0) \right) \right| \leqslant \varepsilon \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2} \leqslant \varepsilon.$$

Or $\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2} f'(0) \to \frac{f'(0)}{2}$ donc $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n^2}) = \frac{f'(0)}{2}$.

(2) Utiliser un changement de variable et le théorème de convergence dominée.
On pose $u = x^n$ d'où

$$\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n} I_n \text{ où } I_n = \int_1^{+\infty} \underbrace{\frac{\mathrm{e}^{-u}}{u^{\frac{n-1}{n}}}}_{=f_n(u)} \mathrm{d}u\,.$$

– $f_n(u)$ converge simplement vers $\dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{u}$ sur $[1, +\infty[$,
– $|f_n(u)| = f_n(u) \leqslant \mathrm{e}^{-u}$ pour $n \geqslant 1$.

Le théorème de convergence dominée s'applique d'où $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u = K$.

Conclusion : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^n}\,\mathrm{d}x \sim \frac{K}{n}$.

Solution 5.1.4 (Abdessamad Benzakour) Note : 15

Examinateur : *pas sympa , ni méchant d'ailleurs, du genre Mr Bayle un peu dans ses interventions, puis vers la fin il te dit son impression : il m'a dit que c'était pas mal ,que j'avais des choses à dire... mais je n'ai rien fait d'exceptionnel.*

(1) a) On montre que l'ensemble des polynômes tels que $P(f)(x) = 0$ est un idéal $\mathcal{I}$ ce qui justifie l'existence de P_x.

b) On remarque que $\pi_f \in \mathcal{I}$ donc $P_x | \pi_f$.

c) Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, on divise P par P_x : $P = QP_x + R$ d'où $P(f)(x) = R(f)(x)$ donc $E_x = \{P(f)(x),\ \deg P < \deg P_x\}$ et par conséquent $\dim E_x \leqslant \deg P_x$.
Si $\dim E_x < \deg P_x$ alors il existe R de degré $< \deg P_x$ non nul tel que $R(f)(x) = 0$ ce qui est impossible donc $\dim E_x = \deg P_x$.

d) Soit $\tilde{P} = P_x \vee P_y$.
– On a $\tilde{P}(f)(x+y) = \tilde{P}(f)(x) + \tilde{P}(f)(y) = 0$ donc $P_{x+y} | \tilde{P}$.
– $P_{x+y}(f)(x+y) = P_{x+y}(f)(x) + P_{x+y}(f)(y) = 0$ et comme $E_x \cap E_y = \{0\}$ on en déduit que $P_{x+y}(f)(x) = 0$ et $P_{x+y}(f)(y) = 0$ donc $P_x | P_{x+y}$ et $P_y | P_{x+y}$ i.e. $\tilde{P} | P_{x+y}$.
En combinant les deux propriétés, on en déduit $P_x \vee P_y = P_{x+y}$.

e) – Montrons que $E_x \cap E_y = \{0\}$: il existe A et B tels que $AP_x + BP_y = 1$ d'où, si $z \in E_x \cap E_y$

$$\underbrace{A(f) \circ P_x(f)(z)}_{=0} + \underbrace{B(f) \circ P_y(f)(z)}_{=0} = z$$

soit $z = 0$.
– On a donc $\dim(E_x \oplus E_y) = \dim E_x + \dim E_y = \deg P_x + \deg P_y$: grâce au (d) on sait que $P_{x+y} = P_x \vee P_y = P_x.P_y$ car $P_x \wedge P_y = 1$ d'où $\dim E_{x+y} = \deg P_x + \deg P_y$. Or $P(f)(x+y) = P(f)(x) + P(f)(y)$ donc $E_{x+y} \subset E_x + E_y$. On a donc bien égalité.

f) Immédiat : dans $\mathbb{K}[X]$, $D\ : P \mapsto P'$ n'a pas de polynôme minimal.

(2) On trouve 2 en développant le sinus : $M = (\sin i \cos j + \sin j \cos i)_{(i,j)} = (C_1, \dots, C_n)$ où $C_j = \cos jS + \sin jC$ et $S = (\sin i)_i$, $C = (\cos i)_i$. On a donc $\operatorname{Rg} M \leqslant 2$.
Si on suppose $n \geqslant 2$ alors $\operatorname{Rg} M = \dim \operatorname{Vect}(S, C)$ or, si on considère la matrice $\begin{pmatrix} \sin 1 & \cos 1 \\ \sin 2 & \cos 2 \end{pmatrix}$ son déterminant vaut $\sin 1 \cos 2 - \sin 2 \cos 1 < 0$ car $\sin 1 > 0$, $\sin 2 > 0$, $\cos 1 > 0$ et $\cos 2 < 0$. On en déduit que (S, C) est une famille libre.
Conclusion : $\operatorname{Rg} M = 2$.

Solution 5.1.5 (Pierre Weyl) Note : 10

Examinateur : *feeling de la colle : examinateur : un gros ... , hargneux, impulsif, s'énerve pour rien (déjà sur le candidat précédent) ; a commencé à me gueuler dessus au premier exo parce que j'allais pas assez vite, et que c'est vrai que j'avais pas abouti en préparation. a la fin de la question 1 il me dit qu'on va passer à l'exo 2 en me disant :"de toutes façons je pense que vous n'avez rien trouvé au b ?"*
" si j'ai montré que n est pair "
" Ah béh vous avez du avoir déjà fait l'exo pendant l'année" (doté d'un sourire narquois)
Je lui dit quand même rapidement ce que j'ai fait. Je me rattrape sur le deuxième exo où il me dit que m'en sors mieux.
Bref bilan : il me dit à la fin qu'il me mettra la moyenne et que je devrais être content... Wouhou.
Peace ! et longue vie aux aigris !

(1) a) Par exemple on suppose u de rang > 2. Il existe a et b tels que $(u(a), u(b))$ soit libre. On traduit l'hypothèse (i) : $m_a u(a) = v(a)$, $m_b u(b) = v(b)$ (après avoir justifié que $u(a)$ et $u(b)$ sont non nuls). Ensuite on utilise le vecteur $a + b$, on traduit ensuite (i) : $m_{a+b}u(a + b) = v(a + b)$, puis par liberté de $(u(a), u(b)$ on voit que $m_a = m_b$. Ensuite soit x tel que $u(x)$ soit non nul. Au moins l'une des deux familles suivantes est libre : $(u(a), u(x))$, $(u(b), u(x))$. Donc on peux refaire la même démonstration que pour a et b et montrer ainsi que pour x tel que $u(x)$ non nul, $m_x = m_a = m_b$. Enfin si x est tel que $u(x) = 0$, on écrit $x = x - a + a$, $x - a$ et a n'appartiennent pas à $\mathrm{Ker}(u)$ donc on est ramené au cas précédent et ça marche aussi.

b) $\det f^2 = (\det f)^2 = (-1)^n$ d'où n est pair. Pour le supplémentaire stable je n'ai pas trouvé.

(2) On veut $MM^{\mathrm{T}} = I_n$, ça donne 2 conditions :
$$a^2 + b^2 + c^2 = 1,\ ab + bc + ac = 0.$$
On suppose que a, b, c existent et que les 2 conditions précédentes sont satisfaites : comme $M = M^{\mathrm{T}}$, on a soit une symétrie par rapport à un plan soit par rapport à une droite, soit $\pm I_n$. Étant donné les conditions trouvées, $\pm I_n$ est écarté. Ensuite on dit que si $\mathrm{Tr}(M) = 1$ on a une symétrie par rapport à une droite. Si $\mathrm{Tr}(M) = -1$ on a une symétrie par rapport à un plan. Ensuite on cherche à savoir si il existe a, b, c vérifiant les conditions. On pose $\varepsilon = \pm 1 = a + b + c$ et on étudie les variations du polynôme $P(t) = (t - a)(t - b)(t - c) = t^3 - \varepsilon t^2 - abc$ pour voir quand est ce qu'il a 3 racines réelles.

Solution 5.1.6 (Alexandre Debétancourt) Note : 13

Examinateur : *Mme Joly, très gentille, aide s'il le faut. Je passe le dimanche à 16 alors que tout le monde est déjà parti). Je pense qu'il aurait fallu que je sois plus rapide.*

(1) Pour les éléments de la base canonique, on a, pour k appartenant à $[\![0, n - 1]\!]$, $f(X^k) = k.X^{k-1} + (n - (k + 1)).X^{k+1}$. On on déduit, pour $P(X) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k.X^k$, $f(P)(X) = \sum_{k=0}^{n-1} k.a_k.X^{k-1} + (n - 1).\sum_{k=0}^{n-1} a_k.X^{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} k.a_k.X^{k+1}$, soit $f(P)(X) = (1 - X^2)P'(X) + (n - 1).X.P(X)$.
On va pouvoir déduire le rang de f en utilisant le théorème du rang : on cherche les éventuels polynômes du $\mathrm{Ker}(f)$; On cherche donc les éventuels polynômes non nuls solutions de l'équation différentielle $(1 - x^2)y'(x) + (n - 1).x.y(x) = 0$.
Résolution classique, on trouve pour solution sur $\mathbb{R}$: $y(x) = C.(1 - x^2)^{(n-1)/2}$.

D'où petite discussion :
- Si n est pair, on a seulement le fonction nulle pour solution polynomiale, $\mathrm{Ker}(f) = 0$ et donc $\mathrm{Rg}(f) = n$.
- Si n est impair, le noyau de f est une droite vectorielle, d'où $\mathrm{Rg}(f) = n - 1$.

(2) On cherche s'il existe λ réel tel que l'equation différentielle suivante admette au moins une solution polynomiale non nulle : $(1 - X^2)P'(X) + (n - 1).X.P(X) = \lambda.P(X)$, $(1 - x^2) * y'(x) + ((n - 1).x - \lambda).y(x) = 0$;
On trouve : $y(x) = C.(x-1)^{(n-1-\lambda)/2}.(x+1)^{(n-1+\lambda)/2}$. On trouve ainsi n valeurs propres distinctes ! Pour k dans $[\![0, n - 1]\!]$, $\lambda_k = n - 1 - 2k$ (on a bien 0 valeur propre pour n impair et ces valeurs sont symétriques par rapport à 0, ce qui est bien car la trace de la matrice était nulle).
A annule un polynôme scindé à racine simple (son polynôme caractéristique d'après Cayley-Hamilton), cette matrice est donc diagonalisable ! On a même la valeur de son déterminant (produit des vap) qui n'était pas facile à calculer, d'où l'intérêt de s'amuser avec nos amis les polynômes !

Solution 5.1.7 (Johann Michael Thiébaut) Note : 14
Examinateur : *?*
Un exo passionnant qui risque de rester dans les mémoires. On est pas non plus à ça près, des exo centrale qui tombent dans l'oubli y'en a plein et celui-ci en fera certainement partie.

(1)

Solution 5.1.8 (Jonathan Donier) Note : 19
Examinatrice : *Mme Pagès.*

(1) Cette question est beaucoup plus dure qu'il n'y paraît.
Considérons la matrice de taille $2n$ intersection des $2n$ 1ères lignes et des $2n$ 1ères colonnes de A, et montrons qu'elle est inversible (alors les 2n 1ères colonnes de A seront libres donc $\mathrm{Rg}(A) \geqslant 2n$).
Montrons que $\det(A) \neq 0$:

$$\det(A) = \sum_{\sigma} \prod_{i=1}^{2n} a_{i,\sigma(i)}.$$

Les seuls termes de la somme non nuls sont ceux associés aux dérangements (i.e. $\sigma(i) \neq i$ pour tout i) et valent 1 ou -1. Il suffit alors (!) de montrer que le nombre de dérangements de $S_{2n}D(2n)$ est impair car alors $\det(A)$ sera non nul.
Pour cela montrons d'abord que $D(n) = (n - 1)(D(n - 1) + D(n - 2))$.
Posons $j = \sigma(1)$, distinguons les dérangements qui vérifient $\sigma(j) = 1$ et les autres.
- 1er cas : Pour j variant entre 2 et n, on enlève 1 et j et on établit ainsi une bijection avec les dérangements de S_{n-2} : il y en a donc $D(n - 2)$ pour chaque j soit $(n - 1)D(n - 2)$ en tout.
- 2eme cas : Si $\sigma(j) \neq 1$, on enlève j et on fais correspondre à chaque dérangement un dérangement σ' de S_{n-1} qui "saute" j i.e. $\sigma'(1) = \sigma(j)$ et $\sigma'(i) = \sigma(i)$ sinon. Cela établit une bijection et on a donc pour j fixé $D(n-1)$ dérangements vérifiant $\sigma(j) \neq 1$, d'où $(n - 1)D(n - 1)$ en tout.

En sommant les deux on a bien $D(2n) = (n - 1)(D(n - 1) + D(n - 2))$.
Puis montrons que $D(2n)$ est pair par récurrence :
- $n = 1$: $D(1) = 0$.
- $n = 2$: $D(2) = 1$ c'est ok.

– Soit $n \geqslant 1$ fixé. $D(2n+1) = 2n(D(2n)+D(2n-1))$ donc $D(2n+1)$ est pair. Alors $D(2n+2) = (2n+1)(D(2n+1)+D(2n))$.
– Par hypothèse de récurrence $D(2n)$ est impair donc $D(2n+2)$ est impair ce qui achève la preuve.

(2) Si on note X le vecteur colonne des $2n+1$ éléments considérés, il existe une matrice B de la forme décrite en 1) (avec en plus autant de 1 que de -1 sur chaque ligne) telle que $BX = 0$.

(3) Le vecteur (1,...,1) est dans $\mathrm{Ker}(B)$ et $\dim(\mathrm{Ker}(B)) \leqslant 1$ d'après 1) donc X est un multiple de (1,...,1) ce qui montre le résultat (au passage on n'utilise pas le fait que les éléments soient > 0...).

Solution 5.1.9 (Thomas Liverzay) Note : 14
Examinateur : *M. Franchini. Plutôt cool. Celui d'avant l'a exaspéré en venant en touriste (selon ses mots), donc il était sympa avec moi. J'ai quasiment rien eu à justifier, il me disait de passer a la suite, à chaque fois.*

(1) a) cf. oraux 2008, la plupart des questions ont été traitées. Pour le commutant, il voulait une démonstration bourrine avec des matrices et des coefs indéterminés.
Il fallait au préalable montrer que dans une certaine base les endomorphismes s'écrivaient sous la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ pour la (ii), et sous la forme $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ pour le (iii). L'examinateur m'a dit d'abréger (j'ai pas fait la (ii) par exemple, et j'ai fait la (iii) à l'oral) pour passer à la partie "intéressante".

b) (i) On écrit $E = \overset{m}{\underset{i=1}{\oplus}} E_i$. Puis $h \in C(f) \iff \forall i \in [1,m], h\,o\,f_i = f_i\,o\,h$. Si on se place sur un sep on constate que tous les endomorphismes du sep conviennent. Alors, matriciellement, h s'écrit par blocs dans la base de la décomposition $\begin{pmatrix} H_1 & & \\ & \ddots & \\ & & H_m \end{pmatrix}$. Je lui ai dit que ça donnait le résultat (le justifier rigoureusement serait fastidieux pour les notations), et il m'a dit ok.

(ii) Immédiat, par double inclusion

(iii) Il suffit de dire que $\mathrm{Im}(g)$ est stable pour g, et pour tout élément de son commutant. Donc la matrice est triangulaire par bloc (et en haut a gauche, il y a le fameux $\tilde{h}$ de la question suivante).

(iv) En notant $\tilde{g}$ l'endomorphisme issu de g induit sur $\mathrm{Im}(g)$, $\tilde{h}$ et $\tilde{g}$ commutent. Puis... il m'a dit de changer d'exo.

(2) Il faut regarder les congruences du nombre en question selon les puissances croissantes de 2.

Solution 5.1.10 (Simon Watier) Note : 14
Examinateur : *Incroyablement désagréable (en même temps à 9 h du matin ça se comprend ...) n'est à priori pas d'accord si la méthode employée n'est pas la sienne ... bref : génial !*

(1) J'ai pas envie ...

```
> with(linalg):
> A:=matrix([[0,1,0,0],[0,0,1,0],[0,0,0,1],[0,0,0,0]]):
```

```
> Y:=matrix([[a,b,c,d],[e,f,g,h],[i,j,k,l],[m,n,o,p]]):
> Z:=evalm(A&*Y-Y&*A-A);

                   [e    f - a - 1      g - b       h - c  ]
                   [                                       ]
                   [i      j - e      k - f - 1     l - g  ]
              Z := [                                       ]
                   [m      n - i        o - j     p - k - 1]
                   [                                       ]
                   [0       -m           -n           -o   ]
```

et on résout à la main : $Y = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0 \end{pmatrix} +$ $c \begin{pmatrix} 0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix}$, qu'on peut encore écrire : $Y = O + aI_4 + bA + cA^2 + dA^3$ on a bien un espace affine de dimension 4 ...

(2) $A^pM - MA^p = pA^p$. On écrit $P(X) = \sum a_nX^n$ et on utilise la formule précédente pour l'égalité.

a) On fait remarquer la numérotation astucieuse des questions ... Soit P le polynôme minimal, $XP'(X)$ est aussi annulateur donc $\lambda XP'(X) = P(X) \Rightarrow P$ est un monôme. X^p annule A donc A est nilpotente

b) $f^{n-1} \neq 0 \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R}/f^{n-1}(x) \neq 0$. On montre que $(f^{n-1}(x), f^{n-2}(x), ..., x)$ est une base. Miracle, dans cette base, la matrice de f est celle voulue !
Ensuite, on prend Y une matrice vérifiant l'égalité, et on étudie $Y - M$: $A(Y - M) - (Y - M)A = 0$.
Soit g l'endomorphisme associé à $(Y - M)$ dans la base canonique. Comme f et g commute, f et g^p aussi ... on peut donc facilement écrire g dans la base de la question précédente et on obtient un polynôme en f ... donc c'est bon.

(3) Inversement, si A est nilpotente on parachute $M = \text{Diag}(i - 1)$ dans la base de la question 2 et c'est fini !

Solution 5.1.11 (Laurie Goffinon) Note : 13
Examinatrice : *Mme Pagès. Donne des indications s'il le faut.*

(1) a) $3^k - 1 = 2*(3^{k-1} + 3^{k-2} ... + 3 + 1)$. Dans la parenthèse on a une somme de k nombres impairs, donc de la forme $2p + k$. Or, k est impair donc ce qui est dans la parenthèse est impair. $v_2(3^k - 1) = 1$.

b) Je ne suis pas arrivée à traiter cette question durant la préparation (la méthode que j'ai utilisée pour les 3 autres ne s'applique pas ici). Elle m'a demandé de passer à la question suivante et on est revenues à cette question à la fin. Elle m'a proposé la méthode suivante :
$k = 2p : 3^k + 1 = 3^{2p} + 1 = 9^p + 1 = (8 + 1)^p + 1 = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} 8^k + 1 = 2 + 8m = 2(4 * m + 1)$, $v_2(3^k + 1) = 1$.

c) $3^k + 1 = 4(3^{k-1} - 3^{k-2} + ... - 3 + 1)$. Pour la même raison qu'au 1), $v_2(3^k + 1) = 2$.

d) $k = 2^m p$ avec p impair, $v_2(3^k - 1) = v_2(3^p + 1) + m = m + 1$

e) On cherche $k \mid 3^k = 1[2^n]$ soit $3^k - 1 = 2^n p$ soit $v_2(3^k - 1) \geqslant n$ pour $k = 2^{n-1}$ alors $v_2(3^k - 1) = n$.

Remarque : si $k = 2p+1$ alors $3^{2p+1} = 3\times 9^p \equiv 3[8]$ ce qui simplifie les questions a,b,c.

(2) Directement

$$\sum_X |X| = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} n!/((n-k)!(k-1)!)$$
$$= n\sum_{k=1}^{n} (n-1)!/((n-k)!(k-1)!) = n\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k} = n2^{n-1}.$$

Solution 5.1.12 (Ahmed Wassfi) Note : 14
Examinateur : *?*

(1) a) C'est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$.

b) Rien de difficile $J^2 = -I$, $T^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $MJ = \begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix}$ et enfin $MT^n = \begin{pmatrix} a & na+b \\ c & nc+d \end{pmatrix}$.

c) C'est la question difficile de l'exo. On va montrer que c'est $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ (c'était mon intuition et il me l'a confirmée). On suppose que $|b| > |a|$ sinon on multiplie M par J. Puis on effectue la division euclidienne de b par a (on note q le quotient) et on multiplie M par T^{-q}. On obtient une matrice dont le coefficient en haut à droite est en module inférieur à $|b|$. On réitère le processus pour obtenir un 0 en haut à droite (la suite des restes est strictement décroissante et donc s'annule à partir d'un certain rang). Puis comme le déterminant de la matrice obtenue vaut 1 on en déduit que les coefficients de la diagonale valent soit 1 soit -1. Il est alors facile de montrer que cette matrice est un produit des puissances de J et de T.

(2) Je commence par lui dire que $\mathrm{Vect}(A)$ est différent de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car la trace d'une matrice nilpotente est 0. Il me demande alors de montrer que c'est l'ensemble des matrices de trace nulle. Je lui propose de démontrer d'abord qu'une matrice de trace nulle est semblable à une matrice dont la diagonale est nulle. Cela se fait par récurrence mais je n'ai pas eu le temps de finir. Vu sa réaction je pense que c'est une bonne piste.
On a donc $\mathrm{Vect}(A) \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$, comme $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$ est un hyperplan (noyau d'une forme linéaire non nulle), cherchons une famille libre de n^2-1 vecteurs dans $\mathrm{Vect}(A)$: en fait il suffit de prendre la famille $(E_{ij})_{i\neq j} \cup (E_{11}+E_{1i}-E_{ii}-E_{i,1})_{i\geqslant 2}$ qui contient $n^2-n+n-1$ vecteurs.
On pouvait aussi monter que toute matrice de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle qui s'écrit comme somme d'une matrice triangulaire strictement supérieure et d'une matrice triangulaire strictement inférieure qui sont deux matrices nilpotentes.

Solution 5.1.13 (Nicolas Martin) Note : 07
Examinateur : *Thérèse Pagès.*
Un oral tout bonnement inutile. Une examinatrice antipathique, n'appréciant guère l'éloignement vis à vis de son corrigé, alternant désintérêt et mépris.
Par contre, comble de chance, l'exercice est assez intéressant, mais pas de leurre, ce n'est que de peu que j'ai évité l'extraordinaire couple géométrie/quadriques : le candidat précédent en a

fait les frais...
Note à la hauteur de l'examinatrice et du concours Centrale, on ne va pas faire de commentaire là-dessus. Mais bon, on est tellement content de ne pas avoir à utiliser Maple...

(1) a) J'étais parti sur l'idée que $A = \operatorname{Ker}\phi$ où $\phi \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})*$, car on sait qu'il existe B tel que $\phi(M) = \operatorname{Tr}(BM)$...
En fait, il suffit d'écrire que $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) = A \oplus \operatorname{Vect}(I_n)$, $M = A + \lambda I_n$ d'où $M^2 = \underbrace{A^2 + 2\lambda A}_{\in A} + \lambda^2 I_n$ donc $M^2 \in A \Rightarrow \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow M \in A$.

b) Pour $i \neq j$, $E_{i,j}^2 = 0 \Rightarrow E_{i,j} \in A$. Or $E_{i,i} = E_{i,j}E_{j,i} \in A$.

c) $I_n = \sum_{i=1}^{n} E_{i,i} \in A$, contradiction...

(2) Laissé à la discrétion du lecteur passionné.

Solution 5.1.14 (Pierrick Jamaux) Note : 17
Examinateur : *?*

(1) (a) et (b) : on pose $f(x,t) = \dfrac{\cos xt}{1+t^2}$.
– $(x,t) \in \mathbb{R}\times[0,+\infty[\mapsto f(x,t)$ est continue,
– $|f(x,t)| \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$ qui est intégrable.
On en déduit l'existence de g sur $\mathbb{R}$ et on remarque que g est paire. Par la suite, on ne s'intéressera qu'au cas $x > 0$.

(2) a) On fait une récurrence en posant $f_n(x,t) = \dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t) = \dfrac{t^n \cos(xt + n\pi/2)}{1+t^2}$.
– $(x,t) \in \mathbb{R}\times[0,n] \mapsto f_n(x,t)$ est continue,
– $|f_n(x,t)| \leqslant \dfrac{t^n}{1+t^2}$ qui est intégrable sur $[0,n]$.
Donc g_n est bien $\mathcal{C}^\infty$.

b) On utilise le théorème de dérivation d'une limite de fonction. Soit $[a,b] \subset]0,+\infty[$.
– $g_n \xrightarrow[{[a,b]}]{C.S.} g$.
– Montrons maintenant la convergence uniforme de la suite (g_n'). On pose $u = tx$ et on fait une I.P.P. :

$$\begin{aligned} g_n'(x) &= \int_0^n \frac{-t\sin xt}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{nx} \frac{-u\sin u}{x^2+u^2}\,\mathrm{d}u \\ &= \left[\cos u \frac{u}{u^2+x^2}\right]_0^{nx} + \int_0^{nx} \frac{(x^2-u^2)\cos u}{(x^2+u^2)^2}\,\mathrm{d}u \end{aligned}$$

La partie toute intégrée vaut $\dfrac{\cos nx}{(n^2+1)x^2}$ majorée par $\dfrac{1}{(n^2+1)a^2}$ en valeur absolue.
L'intégrale qui reste converge donc $g_n' \xrightarrow[{[a,b]}]{C.S.} h$ où $h(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(x^2-u^2)\cos u}{(x^2+u^2)^2}\,\mathrm{d}u$.

En outre, on a la majoration suivante :

$$\begin{aligned}|h(x)-g_n'(x)| &\leqslant \frac{1}{(n^2+1)a^2}+\int_{nx}^{+\infty}\frac{u^2-x^2}{(u^2+x^2)^2}\,\mathrm{d}u\\ &\leqslant \frac{1}{(n^2+1)a^2}+\int_{nx}^{+\infty}\frac{1}{u^2+x^2}\,\mathrm{d}u\\ &\leqslant \frac{1}{(n^2+1)a^2}+\frac{1}{x}\int_{n}^{+\infty}\frac{1}{1+v^2}\,\mathrm{d}u\\ &\leqslant \frac{1}{(n^2+1)a^2}+\frac{1}{a}[\pi/2-\operatorname{Arctan} n]\end{aligned}$$

donc $g_n' \xrightarrow[{[a,b]}]{C.U.} h$.

Le théorème s'applique, on en déduit que g est dérivable et que

$$g'(x)=h(x)=\int_0^{+\infty}\frac{(x^2-u^2)\cos u}{(x^2+u^2)^2}\,\mathrm{d}u$$

qui est continue sur $]0,+\infty[$.

c) Là, j'ai beau le tourner dans tous les sens, je ne vois pas de moyen immédiat pour conclure. Je vous renvoie au problème de l'X Maths 1 1999 où, à la 11[ième] question, on demande de calculer $\psi(p)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{ipx}}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x$ et où on trouve $\psi(p)=\pi\dfrac{\mathrm{e}^{-|p|a}}{a}$. On prend $a=1$, on remplace p par x et x par t d'où $\psi(x)=2\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{2\cos(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\pi\,\mathrm{e}^{-|x|}$ ce qui donne finalement $g(x)=\dfrac{\pi}{2}\,\mathrm{e}^{-|x|}$.

Solution 5.2.1 (Yohann Salaün) Note : 18

Examinateur : *encore une femme, j'ai pourtant l'impression que ya plus de mec nan ? ? ? ? ? Examinatrice très sympa mais j'ai pas eu beaucoup besoin d'elle pour résoudre son exo.*

(1) L'inverse est bien sûr $\sum_{k=0}^{+\infty} A^k$ mais encore faut il le démontrer proprement (elle m'a pas mal saoulé dessus d'ailleurs). On prend les sommes partielles ($C_n=\sum_{k=0}^{n} A^k$ et on remarque que $C_n(I-A)=I-A^{n+1}$. En passant au déterminant (qui est continu) et comme $\det(I-A^{n+1})$ tend vers 1 on sait qu'à partir d'un certain rang $C_n(I-A)$ est inversible donc $I-A$ aussi donc $C_n=((I-A)^{-1})(I-A^{n-1})$ qui tend vers l'inverse de $I-A$ et c'est fini.

(2) On peut faire comme demandé mais ça a l'air très très ********* donc je le ferais pas. Comme on connaît bien les suites arithmético-géométriques on pose $Y_k=X_k-L$ avec $L=(I-A)^{-1}B$. On a alors une suite géométrique et tout se fait alors très bien.
Pour trouver $X_{k+r}-X_k$ on remarque que ça vaut $Y_{k+r}-Y_k$ et on l'exprime alors en fonction de X_1-X_0 (on a alors la formule bizarre en passant à la limite).

(3) Je ne crois pas avoir écrit de question.

(4) Cf 3).

Bilan : exo super intéressant mais au moins je n'ai pas eu de quadriques.

Solution 5.2.2 (François Dayrens) Note : 08

Examinateur : *un peu (censuré) (pour être gentil), ne laisse pas le temps de réfléchir et empêche d'aller au bout de ses idées, du coup elle ne comprend pas lorsqu'on fait une démo différente de ce qu'elle veut (c'était galère pour moi qui ai un peu trop l'habitude de faire des démos originales, elle a quand même avoué que ce que je lui disais était juste en me laissant finir de parler).*

Maple : il servait à traiter des exemples, il fallait savoir entrer des matrices, faire un produit, produit par bloc (bien que dans ce cas on peut l'esquiver vu la tête de M), polynômes caractéristiques (et sa factorisation) et détermination du Ker *et* Im *d'une matrice.*

(1) Bidon (produit scalaire).

(2) Débile (revenir à la déf)

(3) Maple : il faut $(MR)^2 = MR$ (proj) et $MR = (MR)^{\mathrm{T}}$ (orthog) on a un truc du genre $T = U$, $S = -V$, T et S symétriques.

(4) Produit scalaire et décomposition sur Ker et Im de p : $q(x) = q(x) - \mu x + \mu x$ pour les normes ne pas oublier que $q^2 = q = q^*$ et faire $(q(x)|x)$ pour le spectre je ne sais pas (pas fait).

Solution 5.2.3 (Nicolas Fleury) Note : 09

Examinateur : *fan de Maple, j'ai passé une heure devant l'ordi à galérer parce que je ne connaissais pas les fonctions collect expand et coeffs.*

(1) Savoir utiliser Maple.
On remplace x et y dans l'équation du cercles par leurs valeurs en fonction de u :
$$x = \frac{a}{2}(u + \frac{1}{u}),\ y = \frac{b}{2i}(u - \frac{1}{u})$$
et on multiplie par $4u^2$ ou un truc dans le genre.

(2) Pour u_1, u_2, u_3, u_4 distincts deux à deux, ce sont les racines de $Q_c \Rightarrow u_1u_2u_3u_4 = a4/a0 = 1$ après si ils sont pas tous distincts par continuité c'est OK,

(3) La racine restante est $\frac{1}{u_0^3}$ grâce à 2 donc toutes les racines sont déterminées d'où unicité du cercle. Ensuite on résout a, β et ? en fonction de a, b et u_0 grâce à Maple en vérifiant que ce soit des réels d'où l'existence.

(4) $Q_c = (a^2 - b^2)(u - u_0)^4 \Rightarrow u_0^4 = 1$ d'où $1, -1, e^{flower\ power}, e^{-flower\ power}$ pour ceux qui n'aurait pas compris (flower power = ip).

(5)

Solution 5.2.4 (Simon Watier ?) Note : 16

Examinateur : *Celui qui donne la note à la fin de l'oral ... Vieux blasé ... mais bon bougre au fond de lui ...*

(1) On s'intéresse à $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et en montrant par l'absurde que $\exists n \in \mathbb{N}, u_n < 1$ on en déduit que u_n est décroissante. Il ne reste qu'à passer à la limite pour trouver que $u_n \to 0$.
Tout d'abord, si (u_n) a une limite l alors $l = 0$.
Supposons donc par l'absurde que $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \geqslant 1$. $u_{n+1} \leqslant \dfrac{u_n^2}{u_n u_{n-1}} \leqslant u_n$ car $u_{n-1} \geqslant 1$.
La suite (u_n) est décroissante et minorée, elle converge vers une limite $l' \geqslant 1$ ce qui est impossible. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N \leqslant 1$. Par une récurrence immédiate, on en déduit que $u_{N+p} \leqslant 1$ puis, pour $n \geqslant N$, $u_{n+1} \leqslant u_n^2 \leqslant u_n$. La suite est décroissante à partir de N, elle est minorée donc elle converge bien vers 0.

(2) Transformation d'Abel.
On a

$$x_n - x_{n+1} = \frac{2\ln u_n - \ln u_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{\ln(1+u_n u_{n-1}}{2^{n+1}}$$
$$\leqslant \frac{u_n u_{n-1}}{2^{n+1}}$$

On a ainsi $|x_{n+1} - x_n| \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}}$ qui est le terme général d'une série convergente. La série aux différences $\sum x_{n+1} - x_n$ converge donc la suite (x_n) converge vers un réel a.

(3) Il suffit de reprendre la question précédente ... on montre que $x_n - \lim\limits_{n\to+\infty} x_n \to 0$ et c'est fini ...
On a $x_n - a = \lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{p=n}^{N} (x_p - x_{p+1}) = \sum\limits_{p=n}^{+\infty} (x_p - x_{p+1})$ or $x_p - x_{p+1} \leqslant \dfrac{u_p u_{p-1}}{2^{p+1}} = o\left(\dfrac{1}{2^{p+1}}\right)$
donc, grâce au théorème de sommation des relations de comparaison,

$$0 < x_n - a \leqslant v_n \text{ où } v_n = o\left(\sum_{p=n}^{+\infty} \frac{1}{2^{p+1}}\right) = o\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

d'où $x_n = a + o\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$ soit $\ln u_n = a2^n + o(1)$ i.e. $u_n = (\mathrm{e}^a)^{2^n} \times \mathrm{e}^{o(1)}$ donc $u_n \sim k^{2^n}$ où $k = \exp\left(x_0 + \sum\limits_{p=0}^{+\infty} (x_{p+1} - x_p)\right)$.

Notes :
– Je déconseille fortement le beignet moins d'une heure avant une colle ... ma préparation n'a pas été fructueuse du tout ...
– A la fin de la colle il restait un peu de temps ... il m'a demandé de définir le rayon de convergence ... puis de calculer celui de la série $\sum a_n x^n$ où a_n est le nombre de nombres premiers inférieurs à n.

Solution 5.2.5 (Pierre Weyl) Note : 17
Examinateur : *Le gars est un fanatique de Maple et semblait tout triste quand je lui ai dit que Maple n'arrivait pas à résoudre l'équation pour trouver les points doubles. Sinon la colle s'est plutôt bien passée.*

(1) faire un dessin. puis dire $H_t = A + m\overrightarrow{n_t}$ où $\overrightarrow{n_t}$ est le vecteur normal à P en M_t. On a l'équation de la tangente en M_t par dédoublement des termes. On remplace les coordonnées de H_t dans l'équation de la tangente ça donne m d'ou H_t.

(2) Avec maple, lui faire résoudre le système.

(3) Dire que $A = Mt + m\overrightarrow{n_t}$ et ça donne comme CNS $Q(t) = 0$ un polynôme de degré 3. M_t appartient à Γ_A par définition géométrique de celle ci.

(4) On trouve les racines de Q avec Maple et on remplace.

(5) display(plot(..) , implicitplot(...))

Solution 5.2.6 (Johann Michael Thiébaut) Note : 19
Examinateur : *?*

(1))Séance intensive de Maple...

a) Rentrer :

```
int(x^n*(1-x)^m,x=0..1);
```

Maple répond : $\dfrac{\Gamma(m+1)\,\Gamma(n+1)}{\Gamma(2+n+m)}$. (Testé sur la version 9 à Centrale et 11 chez moi, la version 5 ne répond pas correctement.)

b) Rentrer :

```
int(x^4*(1-x)^4/(1+x^2),x=0..1);
```

Maple répond : $\dfrac{22}{7}-\pi$.
Ensuite, comme

$$\frac{1}{2}\int_0^1 x^4(1-x)^4\mathrm{d}x < \int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\mathrm{d}x < \int_0^1 x^4(1-x)^4\mathrm{d}x?$$

on a : $\dfrac{22}{7}-J_4<\pi<\dfrac{22}{7}-\dfrac{1}{2}J_4$, ce qui donne bien le résultat attendu.

(2) On écrit $x^4(1-x)^4 = A(x)(1+x^2)+R(x)$ ($R(x)$ est donc le reste de la division).

a) On remarque que $R(x)=-4$:

$$\begin{aligned} x^2 &= -1[1+x^2]\\ x^4 &= 1[1+x^2]\\ (1-x)^2 &= -2x[1+x^2]\\ (1-x)^4 &= 4x^2 = -4[1+x^2]\\ x^4(1-x)^4 &= -4[1+x^2] \end{aligned}$$

Le résultat est alors immédiat.

b) En remplaçant $A(x)$ par $\dfrac{x^4(1-x)^4+4}{1+x^2}$, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{p}\left(-\frac{1}{4}\right)^k L_k = \int_0^1\left(\frac{x^{4(p+1)}(1-x)^{4(p+1)}}{(-4)^p(1+x^2)}+\frac{4}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x,$$

soit :

$$\sum_{k=0}^{p}\left(-\frac{1}{4}\right)^k L_k = \pi+\int_0^1\frac{x^{4(p+1)}(1-x)^{4(p+1)}}{(-4)^p(1+x^2)}\mathrm{d}x.$$

La fonction dans l'intégrale tend uniformément vers la fonction nulle, donc on a bien le résultat attendu.

(3) Encore du Maple...

a) Bourriner...

b) Deux solutions :
brute n1 : écrire $B(x)=a+b\,x(1-x)+c\,x^2(1-x)^2+d\,x^3(1-x)^3$, développer avec Maple et résoudre le système d'équations avec Maple.
brute n2 : méthode des divisions euclidiennes successives :

```
a:= rem(B(x),x*(1-x),x);
b:= quo(rem(B(x)-3,x^2*(1-x)^2,x),x*(1-x),x);
c:= quo(rem(B(x)-a-b*x*(1-x),x^3*(1-x)^3,x),x^2*(1-x)^2,x);
d:= quo(rem(B(x)-a-b*x*(1-x)-c*x^2*(1-x)^2,x^4*(1-x)^4,x),x^3*(1-x)^3,x);
```

On vérifie ensuite que ça marche...

```
quo(x^4*(1-x)^4,1+x^2,x);
A := x -> x^6-4*x^5+5*x^4-4*x^2+4;
B := x -> 1/2*(A(x)+A(1-x));

simplify(a+b*x*(1-x)+c*x^2*(1-x)^2+d*x^3*(1-x)^3);
simplify(B(x));
```

(4) Je sors.

Les petites tranches d'humour insérées dans l'énoncé ont été fournies par le GQMPADE-PRAODCSLIFUM : Groupuscule Qui Milite Pour Avoir Des Énoncés Plus Rigolos Aux Oraux De Centrale Surtout Lorsqu'Il Faut Utiliser Maple.

Solution 5.2.7 (Alexandre Debétancourt) Note : 17
Examinateur : *M.Douillet.*
Bilan : je sait pas trop comment il va noter, car il n'y avait pas de réelles difficultés. Examinateur très attentif à ce qui a été fait sur Maple : il se met à coté du candidat qui a préparé devant l'ordi et demande des explications, ne fait passer au tableau que de temps en temps pour des petites démonstrations.
Variation des constantes, c'est bourrin.
Pour la décomposition on utilise la décomposition en série on utilise l'équation, et ça marche et on est content, on peut passer à un exo plus marrant...
On cherche le développement en série de Fourier de $|\sin x|$ qui est une fonction paire, de période π. Comme cette fonction est continue, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, le théorème 7.15 page 292 s'applique et on a

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos 2kx}{4k^2-1}.$$

On cherche alors une solution sous la forme $y_0 = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k \cos 2kx$ d'où, par analyse-synthèse, on trouve

$$b_k = \frac{4}{\pi(4k^2-1)^2} \text{ si } k \geqslant 1 \text{ et } b_0 = \frac{2}{\pi}.$$

Conclusion : toutes les solutions sont 2π-périodiques et s'écrivent :

$$y = \lambda \cos x + \mu \sin x + \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(4k^2-1)^2}\cos 2kx.$$

Solution 5.2.8 (Laurie Goffinon) Note : 19
Examinateur : *Avec Maple 8 ou Maple 9 (au choix)*

(1) Si $u(n)$ tend vers l réel.
Si l est non nul, on a $l = 2 - a/l$ soit $l^2 - 2l + a = 0$ qui n'admet pas de solution réelle.
Si l est nul, on obtient avec la relation de récurrence $0 = \infty$.

(2) a) On écrit d'abord une procédure qui calcule le n-ième terme de la suite u.

```
u:= proc(n,a);
if n=0 then infinity else if n=1 then 2
    else if u(n-1)=0 then infinity else if u(n-1)=infinity then 2
        else 2 - a/u(n,a)
fi;fi;fi;fi;
end;
```

```
f:=proc(n,a)
local k,L;
L:=[];
for k from 0 to n do
L:=[op(L),u(k,a)]
od;
L;
end;
```

b) Calculer $f(13, a)$ avec $a = 8 - 2\sqrt{(3)})$, on voit que $u(13, a) = 2 = u(1, a)$.
Remarque : utiliser la commande "factor" pour simplifier l'expression obtenue (la commande "simplify" ne donne rien d'intéressant sur la version 9...)

(3) a) Par récurrence, utiliser que $\tan(2\theta) = 2$
$tan(\theta)/(1 - \tan(\theta)^2)$ et $\tan((n + 1)\theta) = (\tan(\theta) + \tan(n\theta))/(1 - \tan(\theta)\tan(n\theta))$.

b) S'il existe p tel que $u(n + p) = u(n)$ alors $n\theta = (n + p)\theta + k\pi$ soit $\theta = -k\pi/p$ ($r = -k/p$, r est dans $]0, 1/2[$ car θ est dans $]0, \pi/2[$).
Réciproquement, si $\theta = r\pi$ avec $r = k/p$ alors u est p-périodique.
Soit x dans $[1, +\infty[$, $x = 1 + \tan(\theta)^2$.
– Si $\theta = 0$ alors $a(n) = 1 + \tan(\pi/n)$ est une suite de P et converge vers x.
– Si $\theta \neq 0$, on écrit $\theta = r\pi$ avec r dans $]0, 1/2[$. Il existe $q(n)$ suite de rationnels qui converge vers r car $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. $b(n) = 1 + \tan(q(n)\pi)$ est une suite de P qui converge vers x.

c) $r = k/12$ d'après 3)b) et k est un entier dans $[1, 5]$. On teste les 5 possibilités avec Maple.

Solution 5.2.9 (Ahmed Wassfi) Note : 06
Examinateur : *?*

Solution 5.2.10 (Thomas Liverzay) Note : 13
Examinateur : *Jeune, sympathique. Je ressors de l'oral avec un très mauvais feeling : j'ai bloqué bêtement dès la question 2, que j'ai passée, et ensuite j'ai raconté quelques bêtises, j'ai été très lent... Mais il m'a quand même mis 13. Il a du se dire que je connaissais mon cours (théorème de Lebesgue d'inversion somme intégrale, et le TCD, c'est a peu près les seuls trucs que j'ai su lui dire !). Je pense qu'avec certains autre examinateurs ca se serait passé beaucoup plus mal. Un conseil, quand on a Maple et qu'on tombe sur un exo d'analyse, Maple ne sert pas uniquement à calculer des intégrales ou à conjecturer des sommes en analyse. Il faut penser (ce que j'ai oublié), quand il y a une suite de fonctions, à* <u>*tracer*</u> *les premieres fonctions (avec des couleurs...) par soi même, pour ensuite conjecturer un comportement, "tout se voit sur le dessin" m'a-t-il dit. Ca permet ensuite pendant l'oral d'amener une conjecture à démontrer de manière élégante, ou, faute d'idées pendant la préparation, de s'en faire une.*

(1) La 1 se fait sans trop d'encombres.

(2) Pour la 2, on trace les premieres fonctions, on conjecture que u_n tend vers 0. On le montre avec le TCD. Le truc est de remarquer que $sh(x) > x$ sur $]0, +\infty[$ (ce qui là aussi peut se voir sur un dessin) et donc on est ramené à une suite géométrique de raison inf à 1, pour x fixé. pour la domination, on a $f_n < f_1$.

Pour la 3, a et b, on utilise le coefficient binomial généralisé, et on simplifie comme il faut.

Je n'ai pas eu le temps de faire la c, j'ai juste écrit les hypothèses suffisantes pour le théorème d'inversion. J'avais commencé au brouillon un calcul par IPP qui s'annoncait bien (? !).

Remarques : "Maple" : Ne pas confondre (pour les plots) fonction et expression (avec une fonction, définie par f :=(n,x)-¿... ;, plot(f(1,x),¡domaine en x¿) ; suffit pour tracer f1 ; ce n'est pas la même commande si l'on pose f :=... ;).
Pour superposer plusieurs courbes, ne pas utiliser display, mais construire une séquence, et utiliser plot(¡sequence de fonctions¿) ;, le matheux préfère...

Solution 5.2.11 (Pierrick Jamaux) Note : 14
Examinateur : *?*

(1)

(2) a) Notons $B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \cdots & \cdots & A_{(n-1)1} & A_{n1} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \cdots & \cdots & A_{n(n-1)} & A_{nn} \end{pmatrix}$ (je crois que je n'ai jamais autant apprécié le Copier-Coller).

Calculons $\det(AB)$ de deux manières :
$\det(AB) = \det A \times \det B$, soit $\det(AB) = (A_{1,1}A_{n,n} - A_{1,n}A_{n,1}) \times \det A$.
Calculons le produit AB (youpi une autre énorme matrice à écrire...) $AB = \begin{pmatrix} \det A & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \det A \end{pmatrix}$

Je sens que vous allez me croire sur parole, mais je justifie quand même un peu :
Pour la case en haut à case et en bas à droite, on trouve $\sum_{i=1}^{n} a_{i1}A_{i1}$ et $\sum_{i=1}^{n} a_{i_n}A_{i_n}$ ce qui correspond au développement par rapport à la première et à la dernière colonne du déterminant de la matrice A, d'où $\det A$.
Pour les autres 0, prenons par exemple celui de la première ligne juste à droite de $\det A$.
Le calcul donne $\sum_{i=1}^{n} a_{i2}A_{i1}$ ce qui correspond au développement par rapport à la première colonne du déterminant d'une matrice dont la première colonne est composée des a_{i2} et dont les autres colonnes sont les mêmes que celles de A. En particulier, sur la deuxième colonne on aura les a_{i2}. Oh, deux colonnes identiques ! D'où les 0 sur la première et la dernière ligne.
Bon on finit le calcul de $\det(AB)$, on simplifie par $\det A$ car A est inversible et hop on a $\det[(a_{ij})_{2 \leqslant i,j \leqslant n-1}] \times \det(A) = A_{1,1}A_{n,n} - A_{1,n}A_{n,1}$.

b) On utilise la densité de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
On prend (z_k) une suite de complexe qui tend vers 0 et telle que $A_k = A - z_k I_n$ soit inversible. On fait tendre k vers l'infini et d'après la continuité du déterminant, tout va bien !
On a donc établi le résultat pour A non inversible.

c)
