SPÉCIALE MP* : ORAL 2011

Mis à jour le 15 juin 2012 à 19:44

Avec la contribution de

ANADON	Laurent
BOIVERT	Stéphane
BONNETAIN	Xavier
BONREPAUX	Benjamin
CAMUS	Pauline
CARCY	Cécile
COMBES	Frédéric
DE POTTER	Clémentine
DREVET	Sacha
DUSSAUD	François
FOURNIE	Paul-Guillaume
GANGLOFF	Sylvère
GAUDELET	Thomas
GAYE	Moïse
HU	Jiawei
LARDY	Jonathan
LARRIEU	Robin
LOUSTAUNAU	Matthieu
MALIET	Odile
MARCHAND	Tanguy
MASSONNET	Louis
PASIN	Chloé
PECATTE	Timothée
PIZZUT	Alexandre
PREVOST	Alexis
SAINT-PAUL	Thomas
THOMAS-LAGLAYSE	Florian
TREINSOUTROT	Victor
TUDELA	Loïc
VAZQUEZ DE SOLA FERNANDEZ	Francisco

1. Sujets posés aux Écoles Normales Supérieures à l'oral 2011

1.1. Oral Maths Ulm.

Exercice 1.1.1.

(1) a) Soit $\phi \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})\ :\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y)$, ϕ bornée sur un voisinage de 0.
Montrer que ϕ est linéaire.

b) Soient E, F deux espaces vectoriels, F banach.
Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)\ :\ \exists c > 0\ :\ \forall (x, y) \in E^2,\ ||f(x+y) - f(x) - f(y)|| \leqslant c$.
Montrer qu'il existe g linéaire continue tq $\forall x \in E,\ ||f(x) - g(x)|| \leqslant c$.

(2) Soit $p \in \mathcal{P}$. On considère $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$.

a) Dénombrer les polynômes unitaires irréductibles de degré 2.

b) Dénombrer les polynômes unitaires irréductibles de degré 3.

c) Trouver la probabilité (asymptotique) de tirer au hasard un polynôme de degré 3 irréductible (là, ça va).

d) On tire 2 polynômes unitaires (de degré 2, puis 3) au hasard.
Quelle est la probabilité pour qu'ils soient premiers entre eux ? (là, ça va moins).

Exercice 1.1.2.
Soit K un corps fini, $P_K[X]$ l'ensemble des polynômes unitaires irréductibles de $K[X]$. On s'intéresse à

$$\zeta(t) = \prod_{P \in P_K[X]} \frac{1}{1 - t^{\deg P}}.$$

(1) Montrer qu'il existe $t_0 \in [0, 1[$ telle que $\zeta(t)$ soit défini sur $[0, t_0[$.

(2) Montrer que $\zeta(t)$ est D.S.E. sur $[0, t_0[$ et déterminer son développement.

Exercice 1.1.3.

(1) a) Soit $p \geqslant 2$ un entier, trouver $(c_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ complexes tels que

$$\forall l \in [\![1, p-1]\!],\ \sum_{k=1}^{p} c_k^l = 0 \text{ et } \sum_{k=1}^{p} c_k^p = p.$$

b) Soit p un entier naturel impair, $p \geqslant 2$. Trouver $(a_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ des réels tels que

$$\forall l \in [\![1, p-1]\!],\ l \text{ impair},\ \sum_{k=1}^{p} a_k^l = 0 \text{ et } \sum_{k=1}^{p} a_k^p = 2p.$$

(2) On note $\mathcal{L}$ l'ensemble des entiers naturels impairs. Soit $D \subset \mathcal{L}$, $D \neq \mathcal{L}$, $D \neq \emptyset$.
Trouver $(u_n)_{n \geqslant 1}$ une suite réelle telle que

$$\forall l \in D,\ \sum_{n \geqslant 1} u_n^l \text{ diverge et } \forall l \in \mathcal{L} \setminus D,\ \sum_{n \geqslant 1} u_n^l \text{ converge.}$$

EXERCICE 1.1.4.

(1) a) Montrer que pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $||A||^2 = r(A^T A)$, où r désigne le rayon spectral, et $||.||$ la norme d'opérateur associée à la norme euclidienne usuelle.
 b) On considère une matrice symétrique A et $\lambda_1(A) \leqslant ... \leqslant \lambda_n(A)$ ses valeurs propres. On pose $\phi(V, A) = \sup_{||x||=1, x\in V} < Ax, x >$ pour V sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\lambda_k(A) = \inf_{\dim(V)=k} \phi(V, A)$.
 c) Montrer que l'application qui à A symétrique associe $\lambda_k(A)$ est 1-lipschitzienne.

(2) Morphismes de $(\mathbb{Q}, +)$ dans $(\mathbb{Q}^*, \times)$?

EXERCICE 1.1.5.

(1) a) On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x et on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor \frac{x}{30} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{5} \right\rfloor.$$
 Montrer que f est positive et bornée.
 b) On note $A_n = \dfrac{(30n)!\times n!}{(15n)!\times(10n)!\times(6n)!}$.
 Montrer que $A_n \in \mathbb{N}^*$ et donner un équivalent de $\ln(A_n)$.
 c) On prend P l'ensemble des nombres premiers, $P_n = P \cap [\![1, n]\!]$ et $\pi(n) = \mathrm{Card}(P_n)$. Montrer qu'il existe $0 < c < C$ tels que $c\frac{n}{\ln n} \leqslant \pi(n) \leqslant C\frac{n}{\ln n}$.
 Il en a profité pour me faire un cours d'histoire des maths sur le célèbre équivalent $\pi(n) \sim \frac{n}{\ln n}$ (il est donc évidemment exclu d'utiliser cet équivalent pour répondre...).

(2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $n > 2$. Montrer qu'il existe un plan vectoriel stable par A.

1.2. **Oral Maths Ulm-Lyon-Cachan.**

EXERCICE 1.2.1.

(1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique. Soit X solution de $X' = AX$. Montrer que X est bornée
(2) Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ symétriques. On suppose que $f(t) = |||e^{tA} - e^{tB}|||$ est bornée sur $\mathbb{R}$. Que dire de A et B ?
(3) Montrer que $H(A) = \{P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que $|||P.e^{tA} - e^{tA}|||$ est bornée sur $\mathbb{R}\}$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$
(4) La fameuse question en sortant : que représente $H(A)$?...

EXERCICE 1.2.2.

On se place dans $\mathbb{R}^d$, muni d'une norme. On prend T une application linéaire, bijective, tq sa norme triple est < 1.
On prend enfin une suite x_n pour n entier (pas que naturel, sinon c'est faible) qui vérifie la condition : $\sup \|x_{n+1} - T(x_n)\| \leqslant \varepsilon$ (le sup sur $\mathbb{Z}$ donc).
Et le but de l'exercice est de montrer qu'il existe un unique x^* vérifiant :
$$\sup \|x_n - T^n(x^*)\| \leqslant \varepsilon/(1 - |||T|||).$$
(Il m'a gentiment donné la constante quand même, c'est sympa, même si ça m'a pas servi).

Exercice 1.2.3.

(1) Soit A une matrice inversible réelle.
Exprimer le polynôme minimal de son inverse en fonction de celui de A.

(2) Soit A une matrice orthogonale réelle telle que 1 et -1 ne soient pas racines de son polynôme minimal.
Montrer que son polynôme minimal est égal à celui de son inverse.
Montrer que son degré est pair.

Exercice 1.2.4.

(1) On considère E l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^2$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(0) = f(1) = 0$.
Soit a un réel et on note pour f élément de E, $N_a(f) = ||f'' + af||_\infty$. Pour quelles valeurs de a, N_a est-elle une norme ?
Ensuite on note φ telle que $\varphi(f) = \int_0^1 f$. φ est-elle continue pour N_a ? (En commençant pour $a = 0$; ensuite $a < 0$ avec pour indication : étudier $\int_0^1 (f'' + af)f$).

(2) (Dans les dernières minutes) Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^3 = I_n - M$.
Montrer que son déterminant est strictement positif.

Exercice 1.2.5.
On s'intéresse aux sous-groupes discrets (0 est isolé) de $(\mathbb{C}, +)$ et $(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}), \times)$

(1) Donner des exemples de tels groupes.

(2) Soit Γ un sous-groupe non trivial de $(\mathbb{C}, +)$ et $\lambda \in \mathbb{C}^*$, tel que $\lambda\Gamma = \Gamma$.
Montrer que $\lambda^4 = 1$ ou $\lambda^6 = 1$.

(3) Soit Γ engendré par $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$.
A quelle condition sur λ, Γ est-il discret ?

Exercice 1.2.6.
Soit λ un réel non nul, $x > 0$. On pose $x^{i\lambda} = \mathrm{e}^{i\lambda \ln x}$.
Si $u_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} k^{i\lambda}$, étudier le comportement asymptotique de u_n.

Exercice 1.2.7.
Chercher toutes les applications $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ bijectives telles que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) + \varphi^{-1}(x) = 2x.$$

Exercice 1.2.8.
Que penser de la limite en $+\infty$ de $\frac{u_n}{n}$ où la suite u est sous additive, ie

$$\forall n > 0, m > 0, u_{n+m} \leqslant u_n + u_m$$

Il suffit de penser à la borne inf.
Puis, même question en rajoutant une constante

$$\forall n > 0, m > 0, u_n + u_m - D \leqslant u_{n+m} \leqslant u_n + u_m + D$$

Il s'agit en fait d'une suite linéaire plus une suite bornée.
Puis, soit f fonction de deux variables, doublement périodique de période 1, dérivable de dérivées continues, et on s'intéresse aux solution de $y' = f(t, y(t))$. Faut réutiliser les résultats précédents mais je sais pas trop comment.

1.3. **Oral Maths Lyon.**

Exercice 1.3.1.
On se place sur l'ensemble des matrices de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ et, pour tout X du cercle unité de $\mathbb{R}^2$, toute matrice de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, on définit l'opérateur $\bullet$ par $M \bullet X = \dfrac{MX}{\|MX\|}$.
On pose ensuite $A(t) = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1/t \end{pmatrix}$ et $B(t) = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} t+1/t & t-1/t \\ t-1/t & t+1/t \end{pmatrix}$.

(1) Trouver la limite de $A(t) \bullet X$ et $B(t) \bullet X$ lorsque $t \to +\infty$.
(2) Soit $C(t)$ une matrice qui correspond à un produit $A(t)^{i_1} B(t)^{j_1} \ldots A(t)^{i_p} B(t)^{j_p}$.
Montrer que, pour t suffisamment grand, $C(t)$ est différent de l'identité.

Exercice 1.3.2.

(1) a) Montrer que l'image d'un cercle par une forme linéaire de $\mathbb{R}^2$ est un segment.
b) Montrer que l'image d'une sphère par une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ est convexe.
(2) Pour l réel, $t > 0$ on pose $f(t) = t^{il}$.
Trouver un équivalent de $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k)$.

Exercice 1.3.3.
On considère un sous ensemble G de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ stable par $\times$ qui engendre $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et tel que pour tout g élément de G, $\mathrm{Sp}(g) \subset [-1, 1]$.

(1) Montrer que si on note $\varphi_g : a \to \mathrm{Tr}(ga)$, alors il existe $M > 0$ tel que pour tout g élément de G, $|||\varphi_g||| \leqslant M$.
(2) Montrer que G est nécessairement borné.
(3) Montrer que $(\overline{G}, \times)$ est un sous groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
En fait, cet énoncé est faux, cf. corrigé. Sylvère propose la rectification suivante : $(\overline{G} \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$ est un sous groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 1.3.4.
Soit $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. On définit . action de groupe par $\gamma.x = \dfrac{\gamma x}{\|\gamma x\|}$, $\|.\|$ est la norme euclidienne.

(1) Mq $\mathrm{Tr}(\gamma) > 2$ ssi γ admet exactement 4 points fixes (pour .).
(2) Cas où $\mathrm{Tr}(\gamma) < -2$? En particulier, γ peut-elle alors avoir un point fixe ?

Exercice 1.3.5.
Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ bornée. On pose

$$m_f(x,t) = \frac{1}{2t}\int_{x-t}^{x+t} f(u)\,du \text{ et } M_f(x) = \sup_{t>0} m_f(x,t).$$

(1) Montrer que $M_f(x) \in [f(x), \sup f]$.
(2) Montrer que si f est uniformément continue alors $M_f(x)$ l'est aussi.
(3) Montrer que si f est continue (f n'est plus uniformément continue) alors $M_f(x)$ l'est aussi.

Exercice 1.3.6.
Une intégrale, un truc débile genre $\Phi(x) = \sup\{\frac{1}{2u}\int_{x-u}^{x+u} f(t)dt, u > 0\}$.
Mq que f uniformément continue implique Φ uniformément continue, et que f continue implique Φ continue.

1.4. Oral Maths Cachan.

Exercice 1.4.1.

(1) On s'intéresse à $P(\theta) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \cos^k \theta$.
Montrer que l'on peut écrire P sous la forme $P(\theta) = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k \cos(k\theta)$.
Quel est le lien entre a_n et b_n, coefficients dominants ?
(2) Montrer que $\max\limits_{\theta\in\mathbb{R}} |P(\theta)| \geqslant |b_n|$.
(3) Soit $P(X) = X^n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k X^k$. Montrer que $\max\limits_{x\in[-1,1]} |P(x)| \geqslant \frac{1}{2^{n-1}}$.
(4) On suppose que $\forall x \in [a,b]$, $|P(x)| \leqslant 2$.
Montrer que nécessairement $(b-a) \leqslant 4$.

Exercice 1.4.2.
L'énoncé brut :
On considère des complexes $a_1, ..a_n$ et des réels $\lambda_1, ..\lambda_n$, ainsi que $P(t) = a_1e^{i\lambda_1 t} + ... + a_ne^{i\lambda_n t}$.
On veut montrer $||P'||_\infty \leqslant M||P||_\infty$, où $M = \sup_{i\in[\![1,n]\!]}(|\lambda_i|)$

(1) Calcul brutal : On considère φ fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ impaire, telle que pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\varphi(t) = t$ et pour $t \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, $\varphi(t) = \pi - t$. Il me demande de faire un dessin (Ca ça va c'est pas trop dur..)
Calculer ses coefficients de Fourier complexes. (S'en suivent des calculs sordides qu'il ne m'obligera pas à finir.)
Ensuite : Qu'est ce que cette fonction a de sympathique ? (Réponse : Théorème de Dirichlet).
On évalue en $\frac{\pi}{2}$ pour obtenir une relation qui va servir.
(2) On suppose que $M = \frac{\pi}{2}$. Montrer le résultat attendu.
(3) Cas général.

(4) Question supplémentaire à la fin, puisque j'ai remarqué qu'on pouvait avec le résultat de la première question, retrouver : $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} = \frac{(\pi)^2}{6}$, donc il m'a demandé de faire le calcul..

Exercice 1.4.3.
Soit $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$, on pose

$$m_f(k) = \int_0^{+\infty} f(x)x^k \,\mathrm{d}x,\ k \in \mathbb{N},\ e_f(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{\lambda x}\,\mathrm{d}x,\ \lambda > 0,\ R_f(t) = \int_t^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(1) Soit k tel que $m_f(k)$ est finie. Montrer que $\forall t > 0$, $R_f(t) \leqslant \dfrac{m_f(k)}{t^k}$.

(2) Soit λ tel que $e_f(\lambda)$ est fini.
Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}$, $R_f(t) \leqslant e_f(\lambda)\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$.
Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $m_f(k)$ est finie.

(3) Montrer que, néanmoins, à $t > 0$ fixé, on a

$$\inf_{\mu \in [0,\lambda]} (e_f(\mu)\,\mathrm{e}^{-\mu t}) \geqslant \inf_{k \in \mathbb{N}} (m_f(k)/t^k).$$

Exercice 1.4.4.
Une intégrale, exercice inutile mais correcteur très sympathique, en fait on a plus discuté de critère d'intégrabilité que d'autre chose.

2. Spéciales MP* : sujets posés à l'école Polytechnique à l'oral 2011

2.1. **Exercices.**

Exercice 2.1.1.
On considère une suite de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la série converge absolument. On considère de plus g une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $]0,\infty[$ dans $\mathbb{R}$.
Soit (y_n) une suite d'éléments de K, compact de $\mathbb{R}^p$. Pour $x \in K^c$ on pose :

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty} a_n g(||x - y_n||).$$

Montrer que f est de classe C^1.

Exercice 2.1.2.

(1) Etude de : $f(x,y) = xy(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$ (Examinateur sympathique, donc..).
(2) Et ça se confirme avec la seconde question :
On considère g telle que : $g(x\cos(t), x\sin(t)) = x^2P(t)$, avec P fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
Donner une condition sur P pour que g soit de classe C^2.
Indication de l'examinateur : la formule de Taylor à l'ordre 2.

Exercice 2.1.3.

(1) a) Montrer qu'il existe m réel différent de -2 tel qu'il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tels que
$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X],\ P'(m) = aP(-2) + bP'(-2) + cP(-1).$$
b) Montrer qu'il existe m et $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tels que
$$\forall P \in \mathbb{R}_4[X],\ P'(m) = aP(-2) + bP'(-2) + cP(-1) + dP(1/2).$$
Indication de l'examinateur : Interprétation en termes d'endomorphismes.
(2) On considère A une algèbre qui vérifie : $\forall a \in A, a^3 = a$.
a) Que dire des éléments inversibles de A ?
b) Montrer que pour tout a, $6a = 0$.
c) Montrer que A est commutative.

Exercice 2.1.4.
Dans $\mathbb{R}^n$, soit A un point fixé quelconque. On définit l'application f, de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ qui à un point M associe AM.
Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ et que sa hessienne est positive.

Exercice 2.1.5.

(1) Soit E un compact métrique et f une isométrie de E dans E.
Montrer que f est bijective.
(2) Soit F un autre compact, g et h deux isométries de E dans F et de F dans E respectivement.
Montrer que g et h sont bijectives.

Exercice 2.1.6.
Soit R une courbe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$. R'' orthogonale à R, R'.
Mq (il donne les questions une par une) :

(1) R' admet une limite en $+\infty$, que l'on appellera v (indice : poser $y : t \mapsto R(t)/t$, bidouiller avec les normes).
(2) Montrer que $\|t.v - R(t)\|$ est bornée.
(3) Montrer que $\|t.v - R(t)\|$ converge en $+\infty$ si $\displaystyle\int_0^{+\infty} t.\|R''(t)\|\,\mathrm{d}t$ converge.

Et un petit exo que j'ai entendu dans les couloirs :
Soit $f\ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue, telle que l'image réciproque de tout borné est bornée.
Mq f admet un extremum.

Exercice 2.1.7.

(1) Quelles sont les matrices réelles symétriques et orthogonales ? Expliciter le cas des matrices d'ordre 2.
(2) Là il me donne une matrice 7×7 avec des a et des b :
$A = \begin{pmatrix} a & a & a & a & b & b & b \\ a & b & a & b & a & a & b \\ a & a & b & b & a & b & a \\ a & b & b & a & b & a & a \\ b & a & a & b & b & a & a \\ b & a & b & a & a & a & b \\ b & b & a & a & a & b & a \end{pmatrix}$. A quelle condition sur a et b vérifie-t-elle la propriété précédente ?
(3) Dans le cas général (A pas forcément orthogonale), quel est le polynôme minimal de A ?

Exercice 2.1.8.

(1) a) On se place sur E e.v.n de dim quelconque. On munit $\mathcal{L}(E)$ de la norme subordonnée lorsque c'est possible (comprendre quand le sup est fini). Soient p et q deux projecteurs de rangs différents.
Montrer que $\|p - q\| \geqslant 1$.
b) Soit $p : [0; 1] \to \mathcal{L}(E)$ continue (il avait oublié cette hypothèse...) telle que pour tout t, $p(t)$ est un projecteur de rang fini. Montrer que le rang est constant.
c) Trouver un projecteur non continu (en dimension infinie évidemment).
(2) Soit $E = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$. Soient a et b dans E.
Trouver une fonction de $[0, 1]$ dans E continue, affine par morceaux (il avait dit linéaire, ce qui marche beaucoup moins bien) telle que $f(0) = a$, $f(1) = b$.

Exercice 2.1.9.
Voila donc la géométrie sordide :
On cherche toutes les courbes de $\mathbb{R}^2$ qui vérifient la propriété rigolote suivante :
On prends le point $A(1; 0)$, et si un point M appartient à la courbe, en notant T le point d'intersection de sa tangente avec l'axe des ordonnées, on a :

$$\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{AT}$$

(youhou, on est content !)

Exercice 2.1.10.
On se fixe $a_0 > 0$, et $0 < r < 1$.

(1) Montrer qu'il existe une unique suite a_n strictement croissante telle que pour tout n, on ait : $\displaystyle\int_{a_n}^{a_{n+1}} \frac{1+\cos t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+r}$.
(2) Limite de la suite a_n ?
(3) Montrer qu'il existe un unique a_0 tel que a_n soit équivalente à n.

Exercice 2.1.11.
Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle que $f(x,y) = (x^2+y^2)g(x,y)$, $g(0,0) \neq 0$.

(1) Montrer que f admet un extremum en (0,0).
(2) Montrer qu'il existe un voisinage de (0,0) sur lequel f n'admet pas d'extremum en un autre point que (0,0).

Exercice 2.1.12.

(1) On considère S une partie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Toutes les matrices de S commutent entres elles et sont nilpotentes.
Montrer qu'il existe v non nul dans $\mathbb{K}^n$ tel que pour tout A dans S, $Av = 0$.
(2) On considère S une partie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont toutes les matrices commutent. $\exists v \in \mathbb{K}^n$ non nul tel que $\forall A \in S,\ \exists \lambda_A$ tel que $Av = \lambda_A v$.
Montrer que $\exists w \in \mathbb{K}^n$ tel que $\forall A \in S,\ A^{\mathrm{T}} w = \lambda_A w$.

Exercice 2.1.13.
Soit un losange $A(a,0)B(0,b)C(-a,0)D(0,-b)$. Montrer que si $a \neq b$ alors il existe une ellipse E contenant dans le losange d'aire plus grande que celle du plus grand cercle C contenu dans ce même losange.

Exercice 2.1.14.

(1) On s'interesse aux sous-groupes finis de $\{f \in \mathcal{C}([0;1],[0;1]) \mid f \text{ bijective}\}$, muni de la composition.
Montrer qu'ils sont au plus de cardinal 2.
(2) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $\left\{\begin{array}{cccc} f & : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ & (X,Y) & \mapsto & \begin{pmatrix} X^T Y \\ X^T A Y \\ \vdots \\ X^T A^{n-1} Y \end{pmatrix} \end{array}\right.$.
Montrer que f est surjective ssi le polynôme minimal de A est son polynôme caractéristique.

Exercice 2.1.15.
Trouvez tous les automorphismes d'algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 2.1.16.

(1) Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ non constante et (E) : $y'' + 2y' + 2y = f(x)$.
Montrer qu'il n'existe pas deux solutions de (E) périodiques, linéairement indépendantes.

(2) Soit W un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, $(W_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ des sous-espaces vectoriels de W tels que leur somme soit directe et égale à W.
Soit $u \in \mathcal{L}(W)$ tel que $\forall i \in [\![1, n-1]\!]$, $u(W_i) \subset W_{i+1}$ et $u(W_n) \subset W_1$.
Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ et ξ tel que $\xi^n = 1$.
Montrer que $\lambda\xi \in \mathrm{Sp}(u)$.

Exercice 2.1.17.
Soit $S = \{A_1, \dots, A_k\}$ tel que $\forall i \in [\![1, k]\!]$, $A_i \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$.
On suppose que $\forall i \in [\![1, k]\!]$, $A_i S = S$.

(1) Montrer que $\sum\limits_{i=1}^{k} \mathrm{Tr}(A_i) \equiv 0[k]$.

(2) On suppose de plus que $\sum\limits_{i=1}^{k} \mathrm{Tr}(A_i) = 0$. Que peut-on dire ?

(3) Montrer que S est un groupe.

(4) Donner un exemple de tel groupe pour $k = 8$.

(5) Rien à voir : soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.
On pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k^2$ et on suppose que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n S_n = 1$.
Donner un équivalent de u_n.

Exercice 2.1.18.
Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $u \in \mathcal{L}(E, E)$, $v \in \mathcal{L}(F, F)$ et on a $f \circ u = v \circ f$

(1) Montrer que P_u et P_v ne sont pas premiers entre eux.

(2) On suppose f injective montrer que $P_u | P_v$.

(3) On suppose f surjective montrer que $P_v | P_u$.

Exercice 2.1.19.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique, on pose $\tilde{A}$ la matrice telle que $\tilde{a}_{i,j} = 1/a_{i,j}$.
Montrer l'équivalence suivante :
(i) A et $\tilde{A}$ positives $\Leftrightarrow$ (ii) $\exists (x_1, ..., x_n) \in (\mathbb{R}*)^n$ tel que $a_{i,j} = x_i x_j$.

Exercice 2.1.20.

(1) a) Soit $\alpha > 0$, $h \in \mathcal{C}([0,\alpha],\mathbb{R})$ telle que $h(\alpha) = 0$.
Montrer qu'il existe $a \in]0,\alpha[$ tel que ? ? ?

b) Soit $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, montrer qu'il existe $a \in]0,1[$ tel que ? ? ?

(2) Soit $(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ et $A = (a_{ij})$ où $a_{ij} = \cos[(j-i)\alpha_i]$. Calculer $\det A$.

Exercice 2.1.21.
On prend une fonction f de classe C^2. On appelle T_2 son développement de Taylor à l'ordre 2 en 0 et R_2 le reste ($f = T_2 + R_2$).
Calculer la limite quand u et v tendent vers 0, u différent de v, de

$$\frac{R_2(u) - R_2(v)}{(u-v)\sqrt{u^2+v^2}}.$$

(On trouve que cela vaut 0)

Exercice 2.1.22.
On considère $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ tel que f tende vers 0 en plus l'infini, et $\displaystyle\int_0^{\infty} \|f'\|$ converge et $y \in C^2(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ tel que $y'' + (1+f)y = 0$.
Montrer que y est bornée.

3. ADS et TIPE

3.1. **TIPE aux ENS.**

Exercice 3.1.1.
Ils m'ont demandé de faire une présentation (depuis quand il y en a une aux ENS ?) et comme ils sont censés avoir lu le dossier, je n'entre pas trop dans les détails pour ne pas être trop ennuyeux et pour insister sur les points intéressants de mon TIPE.
Ensuite ils me posent quelques questions ras les pâquerettes comme "quelle structure de donnée as-tu employée ?" (c'était expliqué dans le dossier), "comment avez-vous fait ceci ou cela ?"...
Ils ne sont pas très convaincus par mes explications (pourtant claires) sur la complexité de mon algorithme, me demandent de l'écrire en pseudo-code...
Viennent ensuite des questions plus théoriques mais un peu vagues "que se passe-t-il si des arcs sont de poids négatif ?" "Comment détecter un cycle de poids négatif ?"), notamment une "comment modifier le graphe pour régler ces problèmes" où il attendait une réponse si simple (il suffit de rajouter une valeur assez grande aux poids de tous les arcs) que je me suis demandé pourquoi je n'y avais pas pensé pendant l'année (en fait, j'avais dû y penser, mais je l'avais écarté parce que c'est FAUX : si on a un chemin de trois arêtes de poids 1 et un autre de 2 arêtes de poids 2 et qu'on rajoute 4 à tout le monde, le plus court chemin change).
Bref, l'oral s'est plutôt bien passé mais je ne m'attendais pas à devoir détailler des banalités aux ENS.

Exercice 3.1.2.
Pas de présentation aux ens ? Ah beh, ils étaient pas au courant de ça ! J'arrive devant la salle Weil, salle réservée aux tipe info (plutôt cool ça) je rentre légèrement en avance. Je m'installe, ils me demandent si j'ai des transparents, ou s'il me faut le vidéoprojecteur, en me disant qu'ils sont contents que j'en ai pas besoin parce que flemme de sortir la technologie ! (et c'est des informaticiens ça !).
Ils sont deux, plutôt jeunes, l'un est imberbe, l'autre barbu, et ont des bonnes têtes d'autistes.
Le barbu me dit : "beh commencez une présentation en 10min et on vous interrompra".
Donc je commence a présenter ce que j'ai écris dans le dossier, je prouve la NP - complétude, je parle de programmation linéaire, ils ont l'air d'aimer ça. Puis le barbu me coince sur une question : "et ya un algorithme polynomial pour résoudre la prog linéaire ?", je réponds donc non, parce que sinon on pourrait résoudre le TSP en temps polynomial. Puis en fait, c'était pas une question mais une affirmation (fail !) et il me dit que la différence avec le TSP c'est que c'est de la programmation linéaire à nombres entiers, et que ca picote beaucoup plus du coup. Je continue ma présentation, parle des différentes heuristiques, pas de commentaires, puis des méta heuristiques, qui ont l'air de les faire bicher. Puis j'arrive aux derniers algorithmes compliqués que je détaille pas trop, en expliquant juste leurs intérêts. Et puis là, ils veulent que je leur sorte le grand jeu. Du coup, je leur montre sur mon ordi toutes les lignes de codes que j'ai faite, on discute un peu sur un algo. Puis je leur montre quelques résultats sur 250 villes et ils me demandent quelle heuristique je conseillerais.
Et puis voila, c'est tout ! 25 min de présentation, 10 min de commentaires/joujou sur l'ordi, soit un total de 35min en comptant large !

Exercice 3.1.3.
Examinateurs sympathiques, avaient lu mon dossier, mais m'ont tout de même demandé de le présenter. (C'est pour eux une façon d'entrer dans le vif du sujet). Je suis passé à 11h45, et il m'ont expédié... à croire qu'ils avaient faim.

Le principe était qu'ils écoutent sagement, puis qu'ils posent des questions sur des démos, en étant parfois un peu chiants (pourquoi **auto**morphisme de Frobenius). Y'a aussi eu des questions sur la complexité des algorithmes.
Et en passant, il m'ont fait remarqué que dans la mesure où on construisait un corps à 2^m éléments, on n'avait pas besoin d'en admettre l'existence...

3.2. **ADS de l'X.**

Exercice 3.2.1.
Salle 99E : Examinateur chauve, yeux bleus, assez grand de taille. Il a l'air sympathique mais ne montre pas ce qu'il pense.
Le texte comporte une vingtaine de pages d'un livre de maths. Aucune consigne particulière n'est donnée.
Sinon tout a plutôt bien commencé. On définit ce qu'est un 3-anneau (un anneau dans lequel $a^3 = a$ et $3a = 0$ pour tout a), et ce qu'est un anneau booléen (un anneau dans lequel $a^2 = a$ pour tout a), on énonce quelques propriétés simples, on montre la commutativité, on donne quelques exemples... Bref, de l'algèbre générale assez sympathique.
Puis on définit une distance booléenne ; et là, c'est le drame : On munit B anneau booléen de la relation d'ordre $a \leqslant b$ ssi $ab = a$. On montre que tout couple admet un plus grand minorant commun et un plus petit majorant commun (ce dernier est pour (a, b) : $a + b + ab$, notée a^b) et on appelle distance booléenne sur A l'application de A^2 dans B telle que :
$\mathrm{d}(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$,
$\mathrm{d}(a, b) = \mathrm{d}(b, a)$,
$\mathrm{d}(a, c) \leqslant \mathrm{d}(a, b)^{\mathrm{d}(b,c)}$.
Ca ressemble aux propriétés classiques, mais on est dans B, avec la relation d'ordre de B...
On montre ensuite que l'ensemble des éléments b de A 3-anneau tels que $b^2 = b$ muni d'une loi additive ++ (différente de celle de A) et du produit de A est un anneau booléen et on pose $\mathrm{d}(a, b) = (a - b)^2$ (ça marche vraiment...). On définit ensuite intuitivement la notion de cercles de centre $a \in A$ et de rayon $r \in B$, de disques, de milieu pour, en s'aidant des 14000 petits résultats précédents tous plus ou moins trivialisés par l'auteur, après maints tours de passe-passe calculatoires, obtenir les équations des cercles et disques, déterminer les intersections de ces objets et pleins d'autres choses dans le même genre. Autant dire que je ne comprenais plus rien à ce qui se passait, chaque démonstration renvoyant à 4 endroits différents dans le texte et les calculs devenant inextricables.
Pour la présentation, je pense bien avoir respecté les conseils dans le sens où j'ai présenté l'objectif du texte et la démarche proposée mais je me suis concentré presque exclusivement sur la partie non géométrique, reprenant clairement les points énoncés, montrant que les exemples cités convenaient bien et démontrant ce que l'auteur (à juste titre parfois) avait décidé de trivialiser ; les propriétés géométriques n'ont été qu'en partie mentionnées sans autre forme de procès...
Au final, une présentation un peu courte (12-13 minutes), mais il m'a semblé vraiment impossible, à moins de se concentrer sur une propriété particulière, d'entrer plus en détail dans le sujet avec seulement deux heures de préparation.
Pour l'entretien, l'examinateur a tenté de me poser une question sur la cocyclicité de trois points, mais je lui ai avoué que je n'avais pas vraiment abordé cet aspect du dossier. Il s'est alors rabattu sur des questions d'algèbre générale, que j'ai dans l'ensemble assez bien faite, bien qu'ayant eu un léger blanc à un moment.

3.3. **ADS et TIPE aux concours communs.**

Exercice 3.3.1.
L'accueil sur place est bien fait, grâce à une équipe portant de belles casquettes "TIPE".
L'ADS, que Laurent a aussi eu (toutes les personnes convoquées à la même heure préparent dans une même salle le même sujet), était purement mathématique. Il traitait de l'algèbre de Clifford dans le cas $n = 2$. Voici schématiquement comment était présenté le sujet qui fait 10 pages :
On introduit l'algèbre en la construisant : on prend le plan euclidien $\mathbb{R}^2$, muni d'une forme quadratique q et d'une base orthonormée pour cette forme quadratique (e_1, e_2) on veut une algèbre contenant $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ et telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, $x * x = q(x)$ ($*$ représente le produit dans l'algèbre).
On déduit alors que l'algèbre est non commutative et qu'on doit introduire un nouvel élément J de notre algèbre qui vaut $e_1 * e_2$. On veut une $\mathbb{R}$-algèbre minimale, on l'a donc. Elle est de dimension 4 sur $\mathbb{R}$ et se décompose comme $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}J$.
On regarde alors les propriétés de cette algèbre et notamment le rôle joué par J qui à une signification géométrie. On regarde comment exprimer facilement des symétries et des projections orthogonales à l'aide de cette algèbre. On définit alors RO2 et Spin2 (le revêtement de l'orthogonal et le groupe spinoriel) et on montre un homomorphisme entre RO2 et O2 (le groupe orthogonal, celui du cours) ainsi qu'entre Spin(2) et SO2.
L'énoncé indiquait clairement deux problématique possibles (il était conseillé de s'en tenir à une des deux problématiques) :
- Expliquer quelles sont les raisons qui ont poussé la construction d'une telle algèbre, et présenter les propriétés générales de cette algèbre.
- Montrer comment cette algèbre permet d'exprimer le groupe SO2 et O2.

4. Spéciales MP* : sujets posés aux Écoles des Mines à l'oral 2011

Exercice 4.1.1.
10 mins de préparation (en fait, il y avait deux exos mais je n'ai pas eu le temps de traiter le deuxième au tableau, même si je l'avais un peu cherché sur feuille).

(1) Soient A et B deux matrices symétriques, réelles vérifiant $A^3 = B^3$.
Montrer que $A = B$.

(2) (Celui que je n'ai pas fait au tableau.) Soit A matrice diagonalisable, à valeurs propres positives vérifiant $A^2 = I_n$. Montrer que $A = I_n$.

(3) Résoudre l'équation différentielle $y' = \sin(y)$.

Exercice 4.1.2.

(1) Soit $N(A) = \sqrt{\operatorname{Tr}(A^{\mathrm{T}}.A)}$, A matrice réelle.
  a) Justifier rapidement qu'il s'agit d'une norme.
  b) Montrer que $\operatorname{Tr}(A) \leqslant \sqrt{n \operatorname{Tr}(A^{\mathrm{T}}.A)}$ et discuter des cas d'égalité.
  c) Montrer que $N(A.B) \leqslant N(A).N(B)$.
  d) Soit $\|A\|_1 = \sup\limits_{j\in[\![1,n]\!]} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$. Comparer la norme N et la norme 1 (déterminer les constantes des inégalités entre normes).

(2) Soient u et v deux endomorphismes de E espace vectoriel de dimension finie tels que $u \circ v = 0$ et $u + v$ bijectif.
Montrer dans l'ordre que $\dim E = \operatorname{Rg} u + \operatorname{Rg} v$ et $\operatorname{Im} v = \operatorname{Ker} u$.

Exercice 4.1.3.

(1) Soit E un espace vectoriel de dimension quelconque (et donc peut-être infinie !), et u un endomorphisme de E tel qu'il existe P annulateur de u avec $P'(0)$ non nul.
Montrer que $E = \operatorname{Ker} u \bigoplus \operatorname{Im} u$.

(2) Soit $U_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x)^{2n} e^{-x}\,\mathrm{d}x$. Nature de $\sum U_n$.

Exercice 4.1.4.

(1) soit $N \in \mathcal{C}^1_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et $S \in \mathcal{C}^2_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.
Montrer que pour tout z appartenant à $\mathbb{C}$ privé d'un ensemble dénombrable, on peut définir une unique fonction $G \in C^2_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, telle que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ G(x) + z\int_0^{2\pi} N(x-t)G(t)\,\mathrm{d}t = S(x).$$

(2) Inverser la matrice avec des 1 sur la diagonale et la première sur-diagonale... de 2 façons différentes ! yhouhou ! ! (on est content d'avoir fait 5/2 pour ça ! !).

Exercice 4.1.5.

(1) On définit la suite U par récurrence ainsi : $U_{n+1} = U_n + U_n^2,\ -1 < U_0 < 0$.
  a) Montrer que pour tout entier n, on a $-1 < U_n < 0$.
  b) Montrer que U_n converge vers 0.
  c) Montrer que U_n est équivalent à U_{n-1}.
  d) Montrer que U_n est équivalent à $-\frac{1}{n}$ puis que $U_n + \frac{1}{n}$ est équivalent à $\frac{\ln(n)}{n^2}$.

(2) Soit $(v_1, ..., v_n)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et G le déterminant de Gramm de ces vecteurs.
  a) Montrer que $G \geqslant 0$. Cas d'égalité ?
  b) Montrer que $G \leqslant \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \|V_i\|^2$.

Exercice 4.1.6.

(1) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^3$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit g comme étant :

$$g(x,y) = \begin{cases} (f(x) - f(y))/(x-y) & \text{si } x \neq y, \\ f'(x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

  a) Montrer que g est continue.
  b) g est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

(2) Soient A, B deux matrices à coefficients dans $\mathbb{Z}$. On suppose que $\det(A) \wedge \det(B) = 1$. Montrer qu'il existe U et V deux matrices à coefficients dans $\mathbb{Z}$ telles que : $UA+VB = I_n$.

(3) Celui de Cécile Carcy de l'année dernière : Celui avec les polynômes.

Exercice 4.1.7.

(1) Soient u et v deux endomorphismes de E tels que $uv - vu = \mathrm{Id}$.
  a) Montrer que E est de dimension infinie.
  b) Calculer $u^n v - v u^n$.
  c) Montrer que u et v ne peuvent pas être tous deux continus.

(2) Etude de deux séries dont je ne me souviens pas.

Exercice 4.1.8.

(1)
  a) Soit A symétrique positive, démontrez qu'il existe une unique matrice B symétrique positive telle que $B^2 = A$.
  b) Démontrez que B peut s'écrire comme un polynôme en A.

(2) (Sans préparation)
  a) DSE de $(1-x^2)/(1-2\cos(\theta).x + x^2)$.
  b) En déduire un DSF de $1/(1 - 1/2.\cos(\theta))$.

Exercice 4.1.9.

(1) Soit une ellipse de foyers F et F'. D une de ses tangentes.
Montrer que le produit des distances des foyers à cette tangente est indépendant de la tangente.

(2) Soit $D = \{(x, y) \mid x > 0\}$ où $k > 0$
  a) Trouver f, C^1 sur D.

  b) Montrer que si f est C^1 sur $\mathbb{R}^2$ alors f est nulle. ?

(3) Soit G un sous groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $A \in G$, $A^2 = I_n$.
  a) Montrer que toutes les matrices sont codiagonalisables.
  b) Montrer que $\mathrm{Card}\, G$ est fini.
  c) Que dire du $\mathrm{Card}\, G$?

(4) Un exercice de la personne qui est passée avant moi :
Soit f une application non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $f(AB) = f(A)f(B)$ et f est linéaire.
Montrer que f conserve la trace.

Exercice 4.1.10.

(1) Soit q une fonction continue et négative sur $\mathbb{R}$. Montrer que si f est solution de l'équation différentielle (E) : $y'' + q(x)y = 0$ alors f s'annule au plus une fois.

(2) On se place dans E de dimension finie $n > 1$, euclidien. On considère un hyperplan H et on appelle réflexion d'hyperplan H la symétrie orthogonale par rapport à H.
  a) Soit u dans l'orthogonal de H et non nul. s est la réflexion d'hyperplan H.
  Montrer que : $s(x) = x - 2\frac{<x,u>}{||u||^2}u$.
  b) Soit g une isométrie fixée quelconque. Montrer que $g \circ s \circ g^{-1}$ est une réflexion.
  Par rapport à quel hyperplan ?
  c) On dit que H et H' sont perpendiculaires ssi l'orthogonal de H est inclus dans H'.
  Montrer que des réflexions d'hyperplan s et s' commutent ssi H et H' sont perpendiculaires.

Exercice 4.1.11.

(1) Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que $\exists p_q$ endomorphismes, $\forall k$, $1 \leqslant k \leqslant n+1$, $f^k = \sum_{q=1}^{n} q^k p_q$.
  a) Montrer que f est diagonalisable.
  b) Exprimer p_q en fonction des f^k. Caractériser p_q.

(2) Soit $f \in \mathcal{C}^1$ telle que $\exists \alpha > 0$, $\forall \lambda > 0$, $f(\lambda x) = \lambda^\alpha f(x)$.
Calculer $\mathrm{d}f_x(x)$. Réciproque ?
Application : soit $g(x, y) = \sqrt{x^4 + 2y^4}$, montrer que g vérifie la propriété précédente et en déduire une solution de l'équation $x\,\mathrm{d}f/\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}f/\,\mathrm{d}y = g$.

Exercice 4.1.12.

(1) (10 min de préparation).
Soit (S) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 5 = 0$, (P) $2x + y - 2z - 4 = 0$.
  a) Mq $(S) \cap (P) \neq \emptyset$.
  b) Nature et éléments caractéristiques.

  Pour ceux qui se posent la question, il m'a bien été demandé d'étudier l'intersection d'une sphère et d'un plan.
(2) Ensuite, on a un exo qui ressemble à quelque chose :
Soit $x_n \in]0;1[$ solution de $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{x^k}{k} = 1$.
  a) Existence et unicité de x_n.
  b) Limite de (x_n)
(3) Et enfin, en algèbre, exo classique sur le déterminant de Gram (dont je me souvenais plus sur le coup, mais c'est revenu).

Exercice 4.1.13.

(1) Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}/(t+1)\,\mathrm{d}t$.
  a) Df.
  b) C1
  c) Mq $f'(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} (\ln(t)/(t+1))[t^{x-1} - t^{-x}]\,\mathrm{d}t$.
  d) signe de $f'(x)$.
  e) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.
  f) Regarder la courbe de f.
(2) Algèbre : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $(A + I_n)(A - I_n)^2 = 0$.
Calcul de $\exp A$.
(3) Cours : constante gamma.
(4) Dernière question (et là si l'examinateur a appliqué la sélection dichotomique, je suis mort mort mort).
$f(x) = g(x, x^2)$ calcul de f' (!)

Exercice 4.1.14.

(1) Classique sur les intégrales de Wallis (enfin je crois).
$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,\mathrm{d}x$.
  a) Limite de I_n qd n tend vers l'infini, équivalent à l'infini.
  b) On prend a dans $]0,1[$, montrer que $\displaystyle\int_0^a (1-u^2)^n\,\mathrm{d}u$ est équivalent à l'infini à l'équivalent de la question précédente.

(2) Soit (f, g) appartenant à $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ privé de l'identité, telle que f et g commutent (l'examinateur avait oublié de donner cette hypothèse..), f différent de g.
Montrer que soit f et g sont deux rotations de même axe, soit ce sont des symétries par rapport à deux droites orthogonales.
Je voulais à tout prix éviter ce genre d'exercice donc forcément j'en ai eu un...

Exercice 4.1.15.

(1) On considère $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = \mathrm{Tr}(M).I_n + M$.
Montrer que f est linéaire. Calculer sa trace et son déterminant.

(2) Quelles sont les fonctions convexes et bornées ?

(3) Quels sont les éléments nilpotents de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?
Puis, à quelle condition 0 est-il le seul élément nilpotent ?

Exercice 4.1.16.

(1) Soit G un groupe cyclique de cardinal n.
  a) Montrer que $\forall x \in G$, $x^n = e$.
  b) Montrer que $\forall H$ sous-groupe de G, H cyclique alors $\mathrm{Card}\, H | n$.
  c) Soit d un diviseur de n. Montrer qu'il existe un unique sous-groupe de G tel que $H_d = \{x \in G \mid x^d = e\}$ et que $\mathrm{Card}\, H_d = d$.
  d) En déduire que $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$.

(2) Soit $f : \sigma \in \mathfrak{S}_n \mapsto \sum_{k=1}^{n} k\sigma(k) \in \mathbb{R}$.
Donner le minimum et le maximum de f sur $\mathfrak{S}_n$ ainsi que les permutations qui les réalisent.

(3) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $[0, 1]$ telles que
$$f_0 = 1 \text{ et } f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t - t^2)\,\mathrm{d}t.$$
Montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur $[0, 1]$.

(4) Soit $f \in \mathcal{C}^1(]0, 1[, \mathbb{R})$ telle que $g(t) = tf'(t)$ soit intégrable sur $]0, 1]$.
Montrer que f est intégrable sur $]0, 1]$.

Exercice 4.1.17.

(1) Soit $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(\frac{\pi}{2}\sin t)\,\mathrm{d}t$.
Etudier la limite de la suite (u_n).
Quelle est la nature de la série des u_n ?

(2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Déterminer $E = \{P \in \mathbb{C}[X] \mid P(A) \text{ nilpotente}\}$.

Exercice 4.1.18.

(1) Soit $F(X,Y) = X^4 + Y^4 - 2(X-Y)^2, (X,Y) \in \mathbb{R}^2$.
Extrema de F ; précisez s'ils sont globaux ou locaux.

(2) Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $p \in \mathbb{N}^*$. Mq : A diagonalisable $\Leftrightarrow$ A^p diagonalisable.

Exercice 4.1.19.

(1) On considère le système : $f'(x) = f(cx)$, $f(0) = a$ avec c appartenant à $[-1; 1]$. Le but est de trouver les fonctions dérivables vérifiant ce système.
   a) Trouver f pour $c = 1$ et $c = -1$.
   b) Trouver f sous la forme d'une série entière.
   c) Avec la fonction trouvée à la question b), déterminer la limite de f lorsque c tend vers 0.

(2) a) Calculer le déterminant de la matrice définie par : $m_{i,j} = \begin{cases} a+b & \text{pour } i = j \\ a & \text{pour } i > j \\ b & \text{pour } i < j \end{cases}$

   b) Calculer le rang de la matrice.

Exercice 4.1.20.

(1) Trouver un équivalent simple en 0 de $f(x) = \operatorname{Arccos}(\sqrt{x/\tan x})$ puis un DL à l'ordre 3.

(2) Soit E de dimension finie, f dans $\mathcal{L}(E)$, tq $\operatorname{Tr} f = \operatorname{Rg} f = 1$.
Mq f projecteur.

Exercice 4.1.21.

(1) Trouver l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ qui sont impaires, et qui vérifie $|f''| \leqslant |f|$.

(2) Soit A matrice symétrique réelle. Trouver les supremums de l'ensemble des $X^{\mathrm{T}}AY$ où (X,Y) famille orthonormée.

(3) On considère un cercle C, et deux diamètres orthogonaux de C, ainsi que les deux droites engendrées. On considère $A\ :(-R,0)$, R est le rayon du cercle. Pour une droite quelconque passant par A on considère I l'intersection de cette droite avec l'axe des ordonnées (quand il existe) et B l'intersection avec le cercle. M est défini pour cette droite par $M = A + \overrightarrow{BI}$.
Quel ensemble décrivent les points M ?

Exercice 4.1.22.

(1) Montrer que $E(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} E(\frac{x+2^k}{2^{k+1}})$

(2) On définit f sur $\mathbb{C}_n[X]$ par $f(P) = (X-a)(X-b)P' - nXP$.
f est il un endomorphisme diagonalisable de $\mathbb{C}_n[X]$?

5. Spéciales MP* : sujets posés aux Écoles Centrales à l'oral 2011

5.1. Math 1.

Exercice 5.1.1.

Soit la fonction ζ de Riemann $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ avec s complexe.

(1) Montrer que si $s \in]1, +\infty[$ la série est bien définie.
(2) Pour s complexe, sur quel domaine a-t-on ACV ?
(3) Limite de $\zeta(s)$ quand s tend vers 1 ($s \in \mathbb{R}$).
(4) Montrer, en justifiant soigneusement (écrit dans l'énoncé),que

$$\zeta(s)(1-2^{1-s}) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}/n^s.$$

(5) En déduire qu'on peut prolonger ζ sur $W = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{1\} \mid \Re(z) > 0\}$.
(6) Equivalent de ζ en 1 (s dans W).

Exercice 5.1.2.

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx}{(x+n^2)^2}$.

(1) Donner son ensemble de définition D.
(2) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.
(3) Donner un équivalent en 0.
(4) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur D.
(5) Calculer la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 5.1.3.

On considère la propriété (P) sur les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \lim_{x \to a, x<a} f(x) \text{ existe et est finie on la note } f(a-).$$
$$\forall a \in \mathbb{R},\ \lim_{x \to a, x>a} f(x) \text{ existe et est finie on la note } f(a+).$$

(1) Montrer que les fonctions continues et continues par morceaux vérifient (P).
(2) Montrer que toute combinaison linéaire de fonctions monotones vérifie (P).
(3) Si f vérifie (P), on note $\Sigma = \{a \in \mathbb{R} / |f(a^+) - f(a^-)| > 0\}$, soit $a \in \Sigma$ montrer que

$$\exists \eta > 0 \mid \forall y \in [a-\eta, a[\cup]a, a+\eta[,\ |f(y^+) - f(y^-)| < \frac{1}{2}|f(a^+) - f(a^-)|.$$

(4) Construire des applications $m(a) \in \mathbb{Q}$ et $M(a) \in \mathbb{Q}$ telles que l'on ait le même résultat sur $y \in [m(a), a[\cup]a, M(a)[$.
(5) En déduire que l'ensemble des points de Σ est dénombrable ; on pourra introduire l'application qui à $a \in \Sigma$ associe $(m(a), M(a))$.
(6) Conclure quant à l'ensemble des points de discontinuité de f. (question ajoutée à l'oral : connaissez-vous un résultat classique similaire mais un peu moins fort)

Exercice 5.1.4.

(1) Expliquer le calcul du P.G.C.D. par l'algorithme d'Euclide.

(2) Montrer que $\dfrac{12n+2}{30n+3}$ et $\dfrac{21n+4}{14n+3}$ sont irréductibles pour tout entier.

(3) Soient a, b deux entiers non nuls. Montrer que $(2^a - 1) \wedge (2^b - 1) = 2^{a \wedge b} - 1$.

(4) Je ne me souviens pas exactement de la suite mais il fallait calculer $E(k\frac{a}{b}) - E(a - k\frac{a}{b})$ pour $k \in [\![0, b-1]\!]$.

(5) 5 mn avant la fin :
soit E un e.v. de dimension n, G une partie infinie de E et $F = \mathrm{Vect}(G)$.
Montrer qu'il existe une base de F formée d'éléments de G.

Exercice 5.1.5.

A est un anneau commutatif. On dit que la partie $S \subset A$ est multiplicative si et seulement si $\forall (x, y) \in S, x \times y \in S$

On définit $S_n(A) = \{y \in A \mid \exists (x_1, .., x_n) \in A,\ y = \sum_{k=1}^{n} x_k^2\}$.

(1) Donner la définition d'un anneau commutatif. Donner des exemples d'anneaux commutatifs du programme qui ne sont pas des parties de $\mathbb{C}$.
Quelle est la différence entre une anneau et un corps ?

(2) Montrer que $S_2(\mathbb{C})$ est multiplicatif (indication : penser au module du produit de deux nombres complexes).

(3) Généraliser à tout anneau commutatif.

(4) M.Q $S_3(\mathbb{Z})$ n'est pas multiplicatif (penser à 15).

(5) Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4 \mid a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \equiv 0[8]$. Montrer que a, b, c et d sont tous pairs.

(6) En déduire que $S_3(\mathbb{Q})$ n'est pas multiplicatif.

Exercice 5.1.6.

Soit $\alpha \in]1, +\infty]$, $a = \frac{1}{\alpha}$

(1) Étudier la convergence et la somme de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{\alpha^2 n^2 - 1}$ en considérant la fonction définie sur $[-\pi, \pi]$ par $x \to \cos(\alpha x)$

(2) Après en avoir démontré l'existence, montrer l'égalité de $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+a}$ et de $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

(3) Valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{a-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 5.1.7.

(1) Soient $0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n$.

a) Soit P à coefs réels, qui a au moins q racines distinctes, montrer que P' a au moins $q - 1$ racines distinctes.

b) $\delta_n = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_0 & \ldots & \lambda_0^n \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ 1 & \lambda_n & \ldots & \lambda_{n+1}^n \end{vmatrix}$ montrer que c'est > 0.

c) Soient $d_0..d_k$, $k+1$ entiers naturels classés dans l'ordre croissants, $a_0..a_k$, $k+1$ réels tous non nuls et $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^{d_i}$.
Montrer que P a au plus k racines > 0.

d) Mêmes notations $\delta_n = \begin{vmatrix} \lambda_1^{d_0} & \lambda_2^{d_0} & \dots & \lambda_{n+1}^{d_0} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ \lambda_1^{d_n} & \lambda_2^{d_n} & \dots & \lambda_{n+1}^{d_n} \end{vmatrix}$ montrer que c'est > 0.

(2) (Il restait environ 10 minutes) $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ calculer $\lim_{p \to +\infty} (\mathbf{I} + \frac{A}{p})^p$ (il m'a demandé de redémontrer le théorème de continuité d'une série de fonctions à partir de la C.U.).

Exercice 5.1.8.
Soit E un ensemble, on définit Δ par $A \Delta B = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$.

(1) Rappeler la définition d'un anneau et donner des exemples.
(2) Montrer que $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$ est un anneau.
(3) Soit $J_a = \{A \in \mathcal{P}(E) \mid a \in A\}$.
  a) Montrer que J_a est un idéal.
  b) Montrer que J_a est un idéal maximal (i.e. si J est un idéal qui contient J_a strictement alors $J = \mathcal{P}(E)$).

Exercice 5.1.9.

(1) On considère la courbe en polaire $\Gamma : r = \frac{\cos(2\theta)}{\sin\theta}$.
  a) Donner ses propriétés particulières. (Tu voulais pas donner un énoncé encore plus vague ?).
  b) Indiquer comment on calcule la courbure (on admettra qu'elle est positive). Tracer Γ.
  c) Donner une équation cartésienne de Γ.
  d) Donner une équation cartésienne de la surface engendrée par la rotation de Γ autour de l'axe (Oy).
  e) Donner une équation paramétrique de cette surface.
(2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ montrer qu'il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que X^n divise $1 + X - P_n^2$.
(indications : "passer par des considérations analytiques" (merciiiii !). "Regarder un développement limité". Déjà c'est un peu mieux, mais comme je ne voyais toujours pas, il me l'a donné.)
On considère une matrice triangulaire avec que des 1 sur la diagonale. En se servant de ce qui précède, montrer que cette matrice est un carré.

Exercice 5.1.10.
Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), A \in E$ et $f(M) = AM + MA^T$

(1) $f \in \mathcal{L}(E)$?
(2) Si X, Y vep de A mq XY^{T} vep de f.

(3) Soit λ une valeur propre de f et B un vep associé.
Mq $\forall P \in \mathbb{C}[X], P(A)B = BP(\lambda I_n - A^{\mathrm{T}})$.

(4) $Q = \prod_i (X - z_i)$. CNS pour que $Q(\lambda I_n - A^{\mathrm{T}})$ inversible ?

(5) Mq λ est la somme de deux vaps de A.

(6) $\mathrm{Sp}(f)$?

(7) CNS pour que f soit un automorphisme ?

(8) Mq A diag implique f diag.

(9) Mq A nilpotente implique f nilpotente (question non traitée).

Exercice 5.1.11.

(1) Soit A une matrice réelle symétrique définie positive d'ordre n, de valeurs propres $\lambda_1 < \ldots < \lambda_n$.
Montrer qu'il existe une unique matrice symétrique réelle définie positive B telle que $B^2 = A$.

(2) Montrer que pour X vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$, on a $(X|X)^2 \leqslant (AX|X)(A^{-1}X|X)$.

(3) Soit $N = -A + (\lambda_1 + \lambda_n)I_n - \lambda_1\lambda_n A^{-1}$.
Montrer que N symétrique positive.

(4) Soit $P(t) = (AX|X)t^2 - (\lambda_1 + \lambda_n)(X|X)t + \lambda_1\lambda_n(A^{-1}X|X)$.
Montrer que P s'annule sur [0,1]. En déduire que

$$(AX|X)(A^{-1}X|X) \leqslant \frac{(\lambda_1 + \lambda_n)^2(X|X)^2}{4\lambda_1\lambda_n}.$$

(5) Cas d'égalité ?

5.2. Math 2.

Exercice 5.2.1.

(1) 3 équations vectorielles à résoudre sous Maple du type : $Au = b$ d'inconnue u puis $Au = b+r$ où r est un vecteur avec des coefficients qui ne dépassent pas 0.1 (modélisation de l'arrondi) et évidemment on obtient des résultats qui n'ont rien à voir, la troisième équation était $(A + rA)u = b$.

(2) On considère une norme quelconque sur $\mathbb{R}^n$ et on note $|||.|||$ la norme subordonnée associée pour les matrices.
Soit A une matrice inversible on pose $\chi(A) = |||A|||.|||A^{-1}|||$.

   a) Montrer que $\chi(A) \geqslant 1$.

   b) La norme sur $\mathbb{R}^n$ est maintenant la norme euclidienne usuelle, justifier que les valeurs propres de $A^{\mathrm{T}}A$ sont réelles et strictement positives.
   Montrer que $\chi(A) = \sqrt{\max \mathrm{Sp}(A^{\mathrm{T}}A)/ \min \mathrm{Sp}(A^{\mathrm{T}}A)}$.
   Il y avait d'autres questions que je n'ai pas abordées.

Exercice 5.2.2.

(1) Soit $x = u/v$, u non entier. Soit p tq v non multiple de p.
Mq il existe (a, w) tq $av + wp^{s+1} = u$ avec a plus petit que p pour tout s entier naturel.

(2) Soit z entier entre 0 et $p^{a+1} - 1$, mq on peut décomposer z en base p.

(3) Questions sur Maple.

Exercice 5.2.3.
On définit le Produit d'Hadamard : $A \circ B = (a_{ij}.b_{ij})$.

(1) Procédure Maple qui réalise le produit d'Hadamard.

(2) a) Pour une matrice réelle $n{\times}n$, que peut-on dire de $M^{\mathrm{T}}M$?

b) Sur Maple, écrire une procédure qui génère 10 couples (M, N) de matrices au hasard et qui calcule les valeurs propres de $(M(M^{\mathrm{T}})) \circ (N(N^{\mathrm{T}}))$ pour chacun des couples. Commentez

(3) a) Soit M sym réelle positive de rang r, montrer qu'on peut écrire $M = \sum\limits_{i=1}^{r} X_i X_i^{\mathrm{T}}$.

b) Réciproquement, si M s'écrit ainsi, que peut-on dire de M ? Exprimer son rang en fonction du rang de la famille des X_i.

(4) Il y avait une dernière question que je n'ai pas eu le temps de traiter (la faute à qui ?) : il fallait justifier que pour A et B symétriques positives on avait $A \circ B$ symétrique positive.

Exercice 5.2.4.

(1) Montrer la convergence pour tout $n \in \mathbb{N}$ de $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(n+k)!}{(k!)^2}$. On note σ_n cette somme.
Avec Maple, calculer les σ_n pour $n \in [\![0, 10]\!]$. Que peut-on conjecturer sur leur forme ?

(2) Résoudre avec Maple l'équation différentielle : $y'(1-x)^2 - (2-x)y = 0$.
Soit $S(x) = \dfrac{1}{1-x}\,\mathrm{e}^{1/(1-x)}$, solution de cette E.D. avec la C.I. $y(0) = \mathrm{e}$.

(3) Montrer que S est D.S.E. et exprimer ce développement en fonction des σ_n.

(4) Démontrer la conjecture faite à la première question (? ? ?).

Exercice 5.2.5.
On considère une série entière S, avec $a_n = \dfrac{4^n}{\binom{2n}{n}}$.

(1) Simplifier $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ et trouver R.
Convergence pour $x = R$ et $-R$?

(2) Trouver une ED d'ordre 1 satisfaite par S, et exprimer S l'aide de fonctions usuelles. (utiliser la relation liant les a_n)

(3) Il y avait une troisième question ...

Exercice 5.2.6.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\chi_A(X)$ son polynôme caractéristique, $\Pi_A(X)$ son polynôme minimal, $C = A - XI_n$, $\tilde{C}$ est la transposée de la comatrice de C, $g(X)$ est le pgcd des coefficients de $\tilde{C}$.

(1) a) Ecrire une procédure Maple qui calcule $g(X)$ à partir de A.
   b) Calculer $g(X)$ pour $A = ((i+j)^2)_{(i,j)\in[1,8]}$

(2) a) Rappeler sans la démontrer la relation entre C, $\tilde{C}$, Π_A et I_n.
   b) Montrer que g divise Π_A.
   On note h le polynôme tel que $\Pi_A = h\times g$.
   c) Montrer que $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}[X])$ tel que $\tilde{C} = g(X)\times B$.
   Justifier que ses coefficients sont de degré inférieur ou égal à n.

(3) On note $B = \Gamma_0 + \Gamma_1 X + ... + \Gamma_{n-1}X^{n-1}$.
En utilisant que $h(X)I_n = C\times B$, montrer que $h(A) = 0$.

Exercice 5.2.7.
Soit $x \in]1, +\infty[$, on considère l'équation différentielle

(1) $\dfrac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}x^2} + \left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right)^2 z = 0$

(1) Tracer les solutions vérifiant les conditions initiales $z(1) = 0$, $z'(1) = 1$ et justifier l'existence et l'unicité.

(2) Soit α_k la suite des zéros de cette fonction, classés dans l'ordre croissant, on admet qu'il y en a une infinité.
Calculer les.

Exercice 5.2.8.

(1) Tracer les courbes dans Maple avec `complexplot` des fonctions de la forme $f(t) = \alpha\,\mathrm{e}^{it} + \beta\,\mathrm{e}^{-it}$. Expliquer.

(2) Soit f une fonction continue , 2π-périodique. On définit la suite (f_n) par

$$\alpha > 0,\ f_0 = f \text{ et } f_{n+1}(\alpha) = \frac{1}{2\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha} f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

   a) Tracer f_k pour $k = 0, 1, ..., 5$ avec $f(t) = \mathrm{e}^{it} + 2\,\mathrm{e}^{-it} + \mathrm{e}^{2it}$ (je ne suis pas sûr avec les coefficients , mais ce n'est pas très grave...).
   b) Soit $\varphi(x) = \sin x/x$, $\varphi(0) = 1$.
   M.q. φ est strictement décroissante sur $[0, \alpha]$.
   M.q. $\exists\beta$ tel que $\varphi(\beta) = \dfrac{1}{x}$.
   Et pour α assez petit : $\forall k \geqslant 1, \varphi(\alpha) \geqslant \varphi(k\alpha)$
   c) Calculer les coefficients Fourier de f_n en fonction de coefficients Fourier de f.
   d) Pour α assez petit. M.q. f_n converge uniformément.(il reste une autre question dont je ne souvient plus).

Exercice 5.2.9.
On définit $f(x) = \sum_{n>x} \sin^2(\frac{\pi x}{2n})$ sur $\mathbb{R}_+$.

(1) Tracer f sur $[0,3]$ avec Maple. évaluation du saut de discontinuité.
(2) Montrer que f est continue par morceaux. et pour tout p dans $\mathbb{N}$ calcul de limite de f quand x tend vers p^-, limite de f quand x tend vers p^+ (la hauteur du saut quoi).
(3) Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux.
(4) Montrer que $\forall x \in [p, p+1[,\ f(x) \geqslant \displaystyle\int_{p+1}^{+\infty} \sin^2(\frac{\pi x}{2t})\,\mathrm{d}t$. En déduire la limite de f en l'infini.
(5) Regarder avec Maple l'existence d'une limite de $\frac{f(x_p)}{x_p}$ avec $x_p \in [p, p+1[$ pour des suites simples en tronquant la somme à 20 000 termes.

Solution 1.1.1 (Xavier Bonnetain) Note :
Commentaires : *Examinateur sympa, aide si on bloque, demande souvent des détails si on va (beaucoup) trop vite.*
Il m'a donné la dernière question à 18h20 (j'étais le dernier), et, au vu de ma tête et de l'heure, il m'a libéré à ce moment.

(1) a) Proposition de solution de Tanguy Marchand pour le premier exercice :
Cet exercice est assez classique. Grâce à l'équation fonctionnelle, on peut montrer que ϕ est $\mathbb{Q}$-linéaire. On va donc utiliser un argument de continuité pour passez à $\mathbb{R}$. Grâce à l'équation fonctionnelle, la continuité en zéro équivaut à la continuité partout sur $\mathbb{R}$. Or $\phi(0) = \phi(0+0) = 2\phi(0)$. Donc $\phi(0) = 0$.
ϕ est bornée en 0 donc il existe (M, η) tels que pour $\|x\| \leqslant \eta$, $\|\phi(x)\| \leqslant M$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|x\| \leqslant \frac{M}{n} \Rightarrow \varphi(x) \leqslant \frac{M}{n}$, ce qui justifie la continuité de φ en 0 et donc sur $\mathbb{R}$.
Or soit $r \in \mathbb{R}$, et r_n une suite de rationnelle tendant vers r. Alors on a $\phi(r_n x) = r_n \phi(x)$, donc en passant à la limite (car ϕ est continue), $\phi(rx) = r\phi(x)$.

b) Réponse de Xavier : Pour le a), j'ai fait pareil.
Pour le b), on constate que (sous réserve d'existence) $g(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{f(nx)}{n}$.
Ensuite, on va s'intéresser à $f_n(x) = \frac{1}{2^n} f(2^n x)$, qui est de Cauchy, pour pouvoir conclure.
Je recopie ci-dessous la solution de l'exercice 42 des exos 5/2.
On remplace x et y par $2^{n-1}x$ dans l'inégalité $\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leqslant c$ et, en divisant par 2^n, on obtient $\|g_n(x) - g_{n-1}(x)\| \leqslant \dfrac{c}{2^n}$ donc (g_n) est une suite de Cauchy ($\|g(x) - g_p(x)\| \leqslant \dfrac{c}{2^p}$). Soit g sa limite. g est limite uniforme d'une suite de fonctions continues est continue.
Toujours dans la même inégalité, on remplace x par $2^n x$ et y par $2^n y$. En divisant par 2^n, on obtient

$$\|g_n(x+y) - g_n(x) - g_n(y)\| \leqslant \frac{c}{2^n}$$

donc, par passage à la limite, $g(x+y) = g(x) + g(y)$ d'où l'on peut déduire que g est linéaire.
Enfin $h = f - g$ est bornée car $\|g(x) - f(x)\| \leqslant c$ (utiliser $\|g(x) - g_p(x)\| \leqslant \dfrac{c}{2^p}$ avec $p = 0$).
La décomposition est unique car $g - g' = h' - h$ est bornée et linéaire donc nulle.

(2) L'exo 2 n'est pas compliqué, on fait du dénombrement sur les polynômes qui ont des racines. Et on trouve $p^2/2$ et $p^3/3$ (asymptotiquement).

a) Posons $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
- Soit $E_2 = \{P \in \mathbb{K}_2[X] \mid P \text{ unitaire}\}$. On a p choix pour le coefficient de X, p choix pour le coefficient constant soit p^2 choix en tout. $\boxed{\operatorname{Card} E_2 = p^2}$.
- Soit $F_2 = \{P \in E_2 \mid P \text{ admet 2 racines distinctes}\}$. Tout P dans F_2 s'écrit $P = (X-n)(X-m)$ avec $m \neq n$. On a donc $\dfrac{p(p-1)}{2}$ éléments. $\boxed{\operatorname{Card} F_2 = \dfrac{p(p-1)}{2}}$.
- Soit $G_2 = \{P \in E_2 \mid P \text{ admet une racine double}\}$. $P = (x-n)^2$, $n \in \mathbb{K}$ d'où $\boxed{\operatorname{Card} G_2 = p}$.

Conclusion : le cardinal cherché vaut $p^2 - p - \dfrac{p(p-1)}{2} = \dfrac{p(p-1)}{2}$.

b) On recommence le calcul de dénombrement :

- Soit $E_3 = \{P \in \mathbb{K}_3[X] \mid P \text{ unitaire}\}$, de même que précédemment on a $\boxed{\operatorname{Card} E_3 = p^3}$.
- Soit $F_3 = \{P \in E_3 \mid P \text{ admet 3 racines distinctes}\}$. Tout élément P de F_3 s'écrit $P = (X-n)(X-m)(X-q)$ avec m, n, q distincts. On a ainsi $\dfrac{p(p-1)(p-2)}{6}$ éléments. $\boxed{\operatorname{Card} F_3 = \dfrac{p(p-1)(p-2)}{6}}$.
- Soit $G_3 = \{P \in E_2 \mid P \text{ admet une racine double et une racine simple}\}$. Tout P de G_3 s'écrit $P = (X-n)^2(X-m)$, $n \neq m$ d'où $\boxed{\operatorname{Card} G_3 = p(p-1)}$.
- Soit $H_3 = \{P \in E_3 \mid P \text{ admet une racine triple}\}$, $\boxed{\operatorname{Card} H_3 = p}$.
- Soit enfin $I_3 = \{P \in E_3 \mid P = (X-n)Q,\ Q \text{ irréductible de degré } 2\}$. Compte tenu du a, $\boxed{\operatorname{Card} I_3 = p\dfrac{p(p-1)}{2}}$.

Conclusion : le cardinal cherché vaut

$$p^3 - p - p(p-1) - \frac{p^2(p-1)}{2} - \frac{p(p-1)(p-2)}{6} = \frac{p(p^2-1)}{3}.$$

c) Immédiat ici, la probabilité cherchée vaut $\dfrac{p(p^2-1)}{3p^3} = \dfrac{p^2-1}{3p^2} \sim \dfrac{1}{3}$ (ceci correspond au cas des polynômes unitaires mais est aussi valable dans le cas général puisqu'il suffit de tout multiplier par un coefficient non nul).
Conclusion : le cardinal cherché vaut $p^2 - p - \dfrac{p(p-1)}{2} = \dfrac{p(p-1)}{2}$.

d) Un peu pénible...

Solution 1.1.2 (Thomas Gaudelet) Note :
Commentaires : *salle W 3éme étage à Ulm, examinateur sympathique, t'annonce dès le départ que tu n'es pas obligé de justifier certain points comme des interversions puis donne des indications s'il le faut.*
Intervention de Victor Treinsoutrot :
On va considérer que $P = 1$ n'est pas dans le produit.

$$\begin{aligned}\zeta(t) &= \prod_{Q \in P_{\mathbb{K}}[X]} \frac{1}{1 - t^{\deg(Q)}} \\ &= \prod_{Q \in P_{\mathbb{K}}[X]} \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} t^{k \deg(P)} \right).\end{aligned}$$

En développant, comme chaque polynôme unitaire s'écrit de manière unique comme produit de puissances de polynômes unitaires irréductibles distincts, on obtient

$$\zeta(t) = \sum_{Q \in \mathbb{K}[X] unitaire} t^{\deg Q} = \sum_{k \in \mathbb{N}} (pt)^k = \frac{1}{1 - pt}.$$

Solution détaillée suite à la correction proposée par Than Dung Nguyen.
On pose $p = \operatorname{Card} K$ (p n'est pas forcément un nombre premier mais est une puissance d'un nombre premier).

(1) Par analyse synthèse :

$$\ln\zeta(t) = \sum_{P\in P_K[X]} -\ln(1-t^{\deg P}) = \sum_{d=1}^{+\infty}\Bigg(\overbrace{\sum_{P\in P_K[X],\deg P=d}\underbrace{-\ln(1-t^d)}_{\sim t^d}}^{a_d}\Bigg)$$

et $\operatorname{Card}\{P\in P_K[X] \mid \deg P=d\}\leqslant p^d$ (qui est le nombre de polynômes unitaires de degré d). D'où, pour $0<t<1/p$, on a convergence de la dernière série ce qui permet "en remontant les calculs" de justifier le développement en série et la définition de ζ pour $t\in[0,t_0[$ avec $t_0=1/p$.

(2) On s'inspire de la formule $\displaystyle\prod_{p\in\mathcal{P}}\frac{1}{1-1/p^x}=\zeta(x)$.

$P_K[X]=\{P_1,\dots,P_n,\dots\}$ est un ensemble dénombrable (réunion dénombrable d'ensemble finis, les polynômes irréductibles de degré fixé).

On pose $F_n=\{P_1^{k_1}\dots P_n^{k_n},\ (k_1,\dots,k_n)\in\mathbb{N}^n\}$.

Montrons que $\displaystyle\prod_{P\in\{P_1,\dots,P_n\}}(1-t^{\deg P})^{-1}=\sum_{P\in F_n}t^{\deg P}$.

Par récurrence :

– $n=1$:

$$\frac{1}{1-t^{\deg P_1}}=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(t^{\deg P_1}\right)^k=\sum_{k=0}^{+\infty}t^{k\deg P_1}=\sum_{k=0}^{+\infty}t^{\deg P_1^k}$$
$$=\sum_{P\in F_1}t^{\deg P}.$$

– Hérédité : on suppose la propriété vraie à l'ordre n.

$$\prod_{P\in\{P_1,\dots,P_{n+1}\}}\frac{1}{1-t^{\deg P}}=\frac{1}{1-t^{\deg P_{n+1}}}\sum_{P\in F_n}t^{\deg P}=\sum_{k=0}^{+\infty}t^{k\deg P_{n+1}}\times\sum_{P\in F_n}t^{\deg P}$$
$$=\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{P\in F_n}t^{(\deg P_{n+1}^kP)}$$

Or $F_{n+1}=\{P_{n+1}^kP,\ P\in F_n,\ k\in\mathbb{N}\}$ d'où $\displaystyle\prod_{P\in\{P_1,\dots,P_{n+1}\}}(1-t^{\deg P})^{-1}=\sum_{P\in F_{n+1}}t^{\deg P}$.

Ce qui achève la récurrence.

Or la suite (F_n) est croissante, de réunion $K^1[X]$ ensemble des polynômes unitaires donc

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \sum_{P\in F_n}t^{\deg P}\leqslant\prod_{P\in P_K[X]}\frac{1}{1-t^{\deg P}}.$$

La famille $(t^{\deg P},\ P\in P_K[X])$ est sommable et

$$\sum_{P\in K^1[X]}t^{\deg P}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{P\in F_n}t^{\deg P}=\lim_{n\to+\infty}\prod_{P\in\{P_1,\dots,P_n\}}\frac{1}{1-t^{\deg P}}$$
$$=\prod_{P\in P_K[X]}\frac{1}{1-t^{\deg P}}.$$

D'où, finalement

$$\sum_{P\in K^1[X]} t^{\deg P} = \sum_{d=0}^{+\infty}\Big(\underbrace{\sum_{P\in K_d^1[X]} t^{\deg P}}_{=(\operatorname{Card} K)^d t^d}\Big) = \sum_{d=0}^{+\infty}(tp)^d$$
$$= \frac{1}{1-tp}.$$

Solution 1.1.3 (Jonathan Lardy) Note :

Commentaires : *examinateur sympathique mais affamé (colle 12h-13h), s'est légèrement énervé sur la fin, sûrement parce que je rechignais à faire les calculs proprement.*

Je ne donne ici que les idées importantes. Je m'excuse d'avance pour les éventuelles erreurs et/ou manques.

(1) a) Les racines p-ièmes de l'unité conviennent : on prend $c_k = \mathrm{e}^{i2\pi k/p}$.

$$\sum_{k=1}^{p} c_k^l = \sum_{k=1}^{p} \mathrm{e}^{i2\pi kl/p} = \mathrm{e}^{i2\pi l/p}\,\frac{1-\mathrm{e}^{i2\pi pl/p}}{1-\mathrm{e}^{i2\pi l/p}} = 0$$

car $\mathrm{e}^{i2\pi l/p} \neq 1$. Ce résultat est encore vrai avec c_{-k} (ça sert à la question suivante).

b) Prendre $a_k = 2\Re(c_k) = c_k + c_{-k}$. On pose $p = 2q+1$ et $l = 2n+1$ avec $n < q$, on développe les puissances de a_k^{2n+1}, on permute les sommes et on utilise le fait que $c_{-k}^{(2n+1-m)} = c_k^{m-2n-1}$:

$$\sum_{k=1}^{p} a_k^{2n+1} = \sum_{m=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{m}\sum_{k=1}^{p} c_k^{2(m-n)-1} = 0$$

car $0 \leqslant m \leqslant 2n+1$ donc $-2n-1 \leqslant 2(m-n)-1 \leqslant 2n+1$ et $2(m-n)-1$ ne prend jamais la valeur 0.

Ensuite

$$\sum_{k=1}^{p} a_n^p = \sum_{m=0}^{p}\binom{p}{m}\sum_{k=1}^{p} c_k^{2(m-q)-1}$$
$$= \sum_{k=1}^{p} c_k^{-2q-1} + \sum_{k=1}^{p} c_k^{2(2q+1-q)-1} = 2p$$

car les sommes pour $m \in [\![1, p-1]\!]$ sont nulles en vertu du a.

(2) Chercher u_n sous la forme $u_n = a_{r_n}/j_n^{\alpha}$ avec $n = pj_n + r_n$ et α qui convient à déterminer, en commençant par étudier le cas où D est réduit à un singleton (p).

On sépare alors habilement la somme selon le quotient modulo p, et on utilise les propriétés montrées en 1) ainsi que quelques majorations triviales. On aboutit à $\alpha = 1/p$. Ensuite on extrapole au cas général. (Je ne dis pas tout sinon ce n'est pas drôle).

Solution 1.1.4 (Sylvère Gangloff) Note :

Commentaires : *Examinateur : Sympathique, mais prend un air exaspéré dès que quelque chose coince.*

Salle : W au 45 rue d'Ulm.

J'ai l'impression d'un oral raté vu la difficulté du premier exercice, sur lequel j'ai passé une bonne partie de la colle..

Solution de Victor Treinsoutrot.

(1) a) $||A||^2 = ||A^TA|| = r(A^TA)$.

b) $\lambda_k(A) \leqslant \inf_{\dim(V)=k} \phi(V, A)$ car pour tout V de dim k, V intersecte $Vect(v_k, ..., v_n)$ (où les v_i sont des vecteurs propres libres associés aux λ_i), donc $\phi(V, A) \geqslant \lambda_k(A)$. C'est égal car c'est atteint pour $\mathrm{Vect}(v_1, ..., v_k)$.

c) On utilise 2, en démontrant que l'inf du sup d'applications r-lipschitziennes est r-lipschitzienne. ($r = 1$ suffit).

(2) On trouve la fonction constante égale à 1 :
En effet, si x est dans l'image, alors pour tout n une racine n-ième est dans l'image. Pour tout rationnel différent de 1, il existe n tel qu'aucune racine n-ième est rationnelle.
On écrit $r = \displaystyle\prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}$, $r^{1/n} \displaystyle\prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i/n}$ et il suffit de prendre $n > \max|\alpha_i|$.

Solution 1.1.5 (Robin Larrieu) Note :
Commentaires : *examinateur : Sympa, te laisse chercher un peu puis t'aide si tu bloques. Il ne cherche pas vraiment à te faire finir l'exo et si tu restes trop longtemps sur une question, il te fait passer à la suite (je n'ai donc pas de corrigé complet, vu que j'avais vraiment du mal à réfléchir...)*

(1) a) On fait les encadrements brutaux des parties entières, les x se simplifient et il reste $-2 < f(x) < 3$ donc, comme f est à valeurs entières, $-1 \leqslant f(x) \leqslant 2$.
J'ai eu beau le tourner dans tous les sens, je n'ai pas réussi à montrer que -1 n'était pas atteint. Il m'a dit d'admettre ce résultat et de passer à la suite.
Commentaire de Victor Treinsoutrot :
Quand on ne sait pas, on fait un dessin.
On s'aperçoit alors que, puis on démontre que, $f(x)$ ne dépend que de la partie entière de $30x$, et est 30-périodique. Il suffit donc de vérifier la positivité pour $0/30, 1/30, ..., 29/30$.
On remarque alors que $\mathrm{Im}\, f = \{0, 1\}$.

b) Il m'a conseillé de considérer la valuation de p premier dans A_n et de montrer qu'elle était positive. On sait que l'ordre de p dans la décomposition en facteurs premiers de $n!$ est $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$ (cette somme est en fait finie).
La valuation de p dans A_n est donc

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left\lfloor \frac{30n}{p^k} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{15n}{p^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{10n}{p^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{6n}{p^k} \right\rfloor = \sum_{k=0}^{+\infty} f\left(\frac{30n}{p^k}\right).$$

Ceci est positif d'après la question 1, et ce pour tout nombre premier p, d'où A_n entier.
On donne un équivalent de A_n grâce à Stirling puis on passe par un développement asymptotique pour composer par le log (en fait, on peut composer un équivalent par le log, sauf quand la quantité tend vers 1) et on obtient un développement asymptotique de la forme $\ln(A_n) = n.\ln K - 1/2.\ln(n) + C + o(1)$.
Là, Paul Melotti intervient, il suffit de chercher l'équivalent de $A_n^{1/n}$ en utilisant $(n!)^{1/n} \sim n/\,\mathrm{e}$.

c) On décompose A_n en produit de facteurs premiers. On a $A_n = \prod_{p \in P_n} p^{v_p}$ d'où $\ln(A_n) = \sum_{p \in P_n} v_p.\ln(p)$.
Or $v_p = \sum_{k=0}^{+\infty} f\left(\frac{30n}{p^k}\right) \leqslant M.\frac{\ln(30n)}{\ln(p)}$ (la majoration découle de f bornée et de $p^k \leqslant 30n$).

Donc $\ln(A_n) \leqslant \pi(30n).M\ln(30n) \Rightarrow \pi(30n) \geqslant \frac{\ln(A_n)}{M\ln(30n)} \sim C'.\frac{n}{\ln(30n)}$. On a donc la minoration (pour passer de $30n$ à n, on utilise la croissance de $\pi(n)$, quitte à changer la constante), mais je n'ai pas de démonstration pour la majoration.
Intervention de Victor Treinsoutrot :
$A_n \leqslant K^n$, et A_n est divisible par tous les nombres premiers entre $15n+1$ et $30n$. D'où : $(15n)^{\pi(30n)-\pi(15n)} \leqslant K^n$, $\pi(30n)-\pi(15n) \leqslant \log(K)\frac{n}{\log(15n)} \leqslant \log(K)\frac{n}{\log(n)}$. En sommant pour $n=2^k$, $k=0..N$, on obtient que $\pi(30(2^N)) \leqslant \pi(15) + C\frac{2^N}{N}$.
Puis on conclut... c'est assez sordide ici.

(2) Au début, j'ai voulu passer par la décomposition du polynôme caractéristique en produit de facteurs irréductibles mais ça ne marche pas très bien (voire pas du tout). En fait il faut regarder les valeurs propres (éventuellement complexes).
Si elles sont toutes réelles, le polynôme caractéristique est scindé donc la matrice est trigonalisable dans une certaine base (e_i) et $\mathrm{Vect}(e_1,e_2)$ est stable.
Si il y a une valeur propre complexe (non réelle) λ (cas que je n'ai pas eu le temps de traiter), soit X vep associé. Les parties réelle et imaginaire de X sont libres, sinon on pourra écrire $X = zX'$ avec X' réel donc λ est réel. Alors $v_1 = X+\bar{X}$ $v_2 = \frac{X-\bar{X}}{i}$ sont réels et libres et on a

$$A(v_1) = \lambda X + \bar{\lambda X} = \lambda\frac{(X+\bar{X})+(X-\bar{X})}{2} + \bar{\lambda}\frac{(X+\bar{X})-(X-\bar{X})}{2} = \mathrm{Re}(\lambda).v_1 - \mathrm{Im}(\lambda).v_2.$$

De même, $A(v_2) = \mathrm{Im}(\lambda).v_1 + \mathrm{Re}(\lambda).v_2$.
Alors, $\mathrm{Vect}(v_1,v_2)$ est un plan vectoriel stable par A.

Solution 1.2.1 (Robin Larrieu) Note :
Commentaires : *Examinateur : (salle U/V, loin au sous sol de Ulm...) Assez sympa, donne des indications plus ou moins vagues (ne te fait pas l'exo donc), sort 5min au début "pour me laisser réfléchir". Me laisse sortir 5min avant la fin alors qu'il restait une question (bon vu la question, en 5min ça allait faire court), il devait avoir faim (il était 12h45)*

(1) 1) En utilisant le produit scalaire canonique $(X,Y) = X^T.Y$, on a $(X',X) = X^T.A^T.X = -X^TAX(\text{A antysymetrique}) = -(X,X')$. Donc $(||X||^2)' = 2(X',X) = 0$ (au début, j'avais oublié le carré, oups...) D'ou $||X||$ est constante donc X est bornée. Le caractère borné ne dépend pas de la norme car elles sont toutes équivalentes.

(2) On prend X unitaire associé à la valeur propre λ_i, $||(e^{tA}-e^{tB})X|| \leqslant |||e^{tA}-e^{tB}|||$(par definition de la norme triple) donc est bornée
$\Rightarrow e^{t\lambda_i}||X - e^{tB}e^{-t\lambda_i}X|| = ||X - e^{t(B-\lambda_i.I_n)}X||$ est bornée et on distingue des cas.
$\lambda_i > 0$alors
$\lim_{t\to+\infty} ||X - e^{t(B-\lambda_i.I_n)}X|| = 0$
On diagonalise B : $B = Q^{-1}.D.Q$ avec $D = Diag(\beta_j)$
$\Rightarrow Q^{-1}e^{t(D-\lambda_i I_n)}QX \to X$
$\Rightarrow Diag(e^{t(\beta_j-\lambda_i)}X \to QX$
Alors en notant $QX = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, on a $x_j \neq 0 \Rightarrow \beta_j = \lambda_i$ donc $D.Q.X = \lambda_i.Q.X$, i.e. $BX = \lambda_i X$.
On a donc $\forall\lambda > 0, E_\lambda(A) = E_\lambda(B)$.
$\lambda_i < 0$ idem mais t tend vers $-\infty$.
$\lambda_i = 0$ $||QX - e^{t.Diag(\beta_j)}QX||$ est bornée et en faisant tendre t vers plus ou moins l'infini, β_j ne peut pas être non nul si $x_j \neq 0$.

Alors A et B sont diagonalisables et ont les mêmes sous-espaces propres donc $A = B$ (OUF !!!).

(3) H(A) non vide : OK.
$P \in H(A) \Rightarrow |||P^{-1}e^{tA} - e^{tA}||| \leqslant |||P^{-1}|||.|||e^{tA} - P.e^{tA}|||$ car la norme subordonnée est une norme d'algèbre donc $P^{-1} \in H(A)$.
Si $P, Q \in H(A)$ alors

$$\begin{aligned}|||PQe^{tA} - e^{tA}||| &\leqslant |||PQe^{tA} - Pe^{tA}||| + |||Pe^{tA} - e^{tA}|||\\ &\leqslant |||P|||.|||PQe^{tA} - e^{tA}||| + |||Pe^{tA} - e^{tA}|||\end{aligned}$$

qui est bien borné, d'où $PQ \in H(A)$.

(4) Je vous laisse chercher...

Solution 1.2.2 (Timothée Pécatte) Note :
Commentaires : *Examinateur : Salle U/V, deux étages en dessous du sol donc encore une fois, je suis le premier dans le bâtiment parce que encore cet horaire pourri de 8h30, je rencontre donc plein de femmes de ménages et j'ai le droit d'attendre dans les couloirs. Puis vers 20, les kholleurs arrivent. Le mien est plutôt jeune, assez sympathique. Il me fait commencer légèrement en avance, me laisse chercher 10min, me donne quelques indications du genre "reprenez plutôt l'idée d'avant", "refaite un peu le même raisonnement", puis me donne le parachute pour la 2eme question et finit l'oral sur "et maintenant il faudrait vérifier que la limite marche", un peu comme l'oral de robin.*
La condition vérifié par x_n veut dire, à la Romain Ducasse, ou a la Nicolas, que en gros, x_{n+1} n'est pas trop loin de $T(x_n)$, donc ça semble logique que x_n s'exprime presque comme un T^n (quelque chose). Donc déjà, on nous demande pas de prouver un truc totalement farfelu, c'est déjà ça.

– Existence : montrons le lemme suivant

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{Z},\ \|x_n - T^k(x_{n-k})\| \leqslant \frac{\varepsilon}{1 - |||T|||}.$$

On écrit

$$\begin{aligned}\|x_n - T^k(x_{n-k})\| &\leqslant \sum_{i=0}^{k-1} \|T^i(x_{n-i}) - T^{i+1}(x_{n-i-1})\|\\ &\leqslant \sum_{i=0}^{k-1} |||T|||^i \underbrace{\|x_{n-i} - T(x_{n-i-1})\|}_{\leqslant\varepsilon} \leqslant \frac{\varepsilon}{1 - |||T|||}.\end{aligned}$$

– Soit la suite $y_n = T^n(x_{-n})$. La série $\sum(y_{n+1} - y_n)$ converge absolument car

$$\|y_{n+1} - y_n\| = \|T^{n+1}(x_{-n-1}) - T^n(x_{-n})\| = \|T^n(T(x_{-n-1}) - x_{-n})\| \leqslant |||T|||^n\varepsilon$$

en posant $p = -n - 1$ et en utilisant l'hypothèse. On en déduit que la suite (y_n) converge vers un élément que l'on note x^*.
On utilise alors le lemme : soit $n \in \mathbb{Z}$ alors, pour tout $k \geqslant n$ on a

$$\|x_n - T^k(x_{n-k})\| = \|x_n - T^n(T^{k-n}(x_{n-k})\| = \|x_n - T^n(y_{k-n})\| \leqslant \frac{\varepsilon}{1 - |||T|||}$$

et on prend la limite quand $k \to +\infty$ ce qui donne $\|x_n - T^n(x^*)\| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{1 - |||T|||}$.

– Unicité : soit x^* et y^* deux solutions.
On a $\|x_n - T^n(x^*)\| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{1 - |||T|||}$ et $\|x_n - T^n(y^*)\| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{1 - |||T|||}$ d'où, par inégalité triangulaire,

$\|T^n(x^*) - T^n(y^*)\| \leqslant \dfrac{2\varepsilon}{1-|||T|||}$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

Or, pour $n \in -\mathbb{N}$, $x^*-y^* = T^{-n}(T^n(x^*-y^*))$, $\|x^*-y^*\| \leqslant |||T|||^{-n}.\|T^n(x^*-y^*)\| \leqslant \dfrac{2\varepsilon|||T|||^{-n}}{1-|||T|||}$ et, quand $n \to -\infty$, on en déduit l'égalité.

Solution 1.2.3 (Thomas Gaudelet) Note :
Commentaires : *Salle U/V 2ème sous sol à ulm, examinateur pas méchant. Laisse chercher un peu au début puis après discute.*
Solution de Sylvère Gangloff.

(1) Soit n le degré du polynôme minimal de A, que l'on note Π_A.
On remarque alors que $\Pi_A(\frac{1}{X})X^n$ est annulateur de A^{-1} donc est divisible par $\Pi_{A^{-1}}$.
Maintenant si Q annule A^{-1}, $Q(\frac{1}{X})X^p$ annule A, où p est le degré de Q, donc $Q(\frac{1}{X})X^p$ est divisible par Π_A donc $p \geqslant n$.
Or $\Pi_{A^{-1}}$ est de degré inférieur à n d'après la première remarque. Donc $\Pi_{A^{-1}}$ est de degré n. $\Pi_{A^{-1}}$ et $\Pi_A(\frac{1}{X})X^n$ sont donc de même degré, et ce dernier est divisible par $\Pi_{A^{-1}}$. On a donc $\Pi_A(\frac{1}{X})X^n = \lambda\Pi_{A^{-1}}$ où λ est un réel. En fait λ est le coefficient de degré 0 de A (VANNE il suffit d'essayer avec $2I_n$), donc $\lambda = \det A$.
Finalement $\Pi_A(\frac{1}{X})X^n = \deg A\Pi_{A^{-1}}$.

(2) On diagonalise dans le groupe unitaire (cf compléments du cours, diagonalisation des matrices normales). On appelle D la matrice de diagonalisation choisie. $D\overline{D} = I_n$, donc les valeurs propres de A sont sur le cercle unité, différente de 1 et -1. Le polynôme minimal de A est égal à celui de D.
De plus si $e^{i\theta}$ est valeur propre de M, $e^{-i\theta}$ l'est aussi et est distincte de $e^{i\theta}$. Le polynôme en question est donc de la forme : $\prod_{j=1}^{p}(X-e^{i\theta_j})(X-e^{-i\theta_j})$. Comme on a choisit -1 non valeur propre, le déterminant de A est égal à 1. On déduit de la formule précédente le résultat. La forme du polynôme implique que le degré est pair. (C'est ici que sert l'hypothèse 1 non valeur propre.)

Solution 1.2.4 (Chloé Pasin) Note :
Commentaires :

(1) L'inégalité triangulaire et l'homogénéité ne posent pas de problème, c'est la séparabilité qui est intéressante. On suppose que N_a est une norme.
(Analyse) : Toute solution de $f'' + af = 0$, $f \in E$ est donc nulle. Or on sait résoudre cette équation en distinguant les cas $a < 0$ et $a \geqslant 0$. On trouve a différent de $(n\pi)^2$ pour tout $n > 0$.
Réciproquement (Synthèse) pour ces a, N_a est une norme sur E.
Pour la seconde partie : On remarque que φ est linéaire, il suffit de majorer $\frac{|\varphi(f)|}{N_a(f)}$.
Pour commencer, lorsque $a = 0$: On fait une intégration par partie : $\varphi(f) = -\frac{1}{2}f'(1) - \int_0^1 \frac{t^2}{2}f''(t)dt$. On peut majorer facilement le deuxième terme par $K||f''||_\infty$ où K est une constante. On s'intéresse alors au premier terme. Le théorème de Rolle s'accommode bien de $f(0) = f(1) = 0$:
On prend x tel que $f'(x) = 0$. On a alors $f'(1) = \int_x^1 f''(t)dt$, qui se majore bien. On montre alors que φ est continue pour N_a lorsque $a = 0$.
Maintenant pour a non nul.. J'ai une solution sympa, mais qui n'utilise pas l'indication : On pose $h(t) = f''(t) + af(t)$, et on résout l'équation différentielle en prenant en compte $f \in E$. On obtient une expression assez moche de f en fonction de h, mais c'est pas grave. On peut quand même trouver de cette manière un majorant de $|\varphi(f)|$ de la

forme : $K||h||_\infty = KN_a(f)$, ce qui donne le résultat.
Bon allez.. comme je suis généreux, je donne l'expression de f que j'ai obtenu pour $a > 0$:

$$f(x) = \left[\int_0^x \frac{\cos(\omega t)h(t)}{\omega}\,\mathrm{d}t - \left(\operatorname{cotan}(\omega)\int_0^1 \frac{\sin(\omega t)h(t)}{\omega}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{\cos(\omega t)h(t)}{\omega}\,\mathrm{d}t\right)\right]\sin(\omega x) + \left(\int_0^x \frac{\sin(\omega t)h(t)}{\omega}\,\mathrm{d}t\right)\cos(\omega x)$$

où $\omega = \sqrt{a}$.

(2) $X^3 + X - 1$ est annulateur de M. Ce polynôme n'admet aucune racine négative. Donc M admet une valeur propre réelle strictement positive et deux complexes conjuguées, ou alors trois racines strictement positives (Flemme de vérifier dans quel cas on est), donc M est de déterminant strictement positif.

Solution 1.2.5 (Xavier Bonnetain) Note :
Commentaires : *examinateur un peu froid, laisse chercher au début, et donne peu d'aide.*

(1)

(2) On montre que λ est de module 1, puis que c'est une racine n-ième de l'unité.
Ensuite, on utilise $|\lambda^k - 1| \geqslant 1$ (car Γ discret) pour imposer $n \leqslant 6$, puis $|\lambda^k + 1| \geqslant 1$ pour éliminer le cas $n = 5$. (FAIRE UN DESSIN)

(3) On constate que $\left\{ u \in \mathbb{C} \;\middle|\; \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma \right\}$ est un sous-groupe stable par λ^2.

Solution 1.2.6 (Jonathan Lardy) Note :
Commentaires : *examinateur sympathique. Discute pour faire avancer.*
Reconnaitre une somme de Riemann ! (remplacer k par k/n en factorisant). Du coup on le met sous la forme d'une intégrale, ce qui nous donne un équivalent simple de la suite. Attention tout de même à bien justifier l'intégration en 0, car la fonction qu'on " intègre " n'est pas, à priori, intégrable en 0. Néanmoins l'intégrale converge... Un peu de bidouille avec quelque majorations amène alors au résultat.
Remarque : question posée aussi à l'oral de l'ENS Lyon (cf. 1.3.2).

Solution 1.2.7 (Jiawei Hu) Note :
Commentaires :

Solution 1.2.8 (Frédéric Combes) Note :
Commentaires :

Solution 1.3.1 (Thomas Gaudelet) Note :
Commentaires : *?*

Solution 1.3.2 (Chloé Pasin) Note :
Commentaires : *?*

(1) a) L'image d'un connexe par arcs compact par une application continue est un connexe par arcs compact.

b) Solution de Robin Larrieu :
L'image d'une surface fermée S par une application l de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ est la même que celle du volume V qu'elle délimite (principe des ombres..., bon d'accord il faudrait le formaliser un peu mieux mais à la Nicolas,c'est bon).
En effet, soit $v \in V$. Comme S est fermée (donc bornée) et que $\operatorname{Ker} l$ est de dimension au moins 1, $S \cap (v + \operatorname{Ker} l) \neq \emptyset$ donc $\exists s \in S,\ l(s) = l(v)$ donc $l(V) \subset l(S)$ et l'autre inclusion est immédiate.
L'image de la boule B délimitée par la sphère S est un convexe car B est convexe donc $l(S)(= l(B)$ d'après le lemme) est convexe, CQFD.
Solution de Frédéric Combes :
On voit notre application comme la composée d'une projection de $\mathbb{R}^3$ dans lui même (la sphère est projetée sur un point (rang $= 0$), segment (rang $= 1$) ou un disque (rang $= 2$), mais c'est convexe), puis y a la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (hop on a un point, segment ou un disque, mais dans $\mathbb{R}^2$), puis y a une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans lui même, qui transforme un disque en ellipse (ou en segment ou point mais non), un segment en segment (ou point, mais encore non), un point en.
Résumé : dans une bonne base au départ (orthogonale quand même), la matrice de l'application est

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(ça c'est si son image est de dimension 2).
Du coup, ben c'est convexe

(2) on écrit $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f(k) = n^{il}.\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n}) \sim n^{il}.\int_0^1 f(t)dt$.

Solution 1.3.3 (Sylvère Gangloff) Note :
Commentaires : *examinateur : Sympathique, mais laisse réfléchir (galérer) un peu plus longtemps.. Salle : Amphi Ratau, au 45 rue d'Ulm. Je pense que j'ai fait un oral correct, mais qui ne casse pas des briques..*

(1) On peut commencer par prendre $g_1, ..g_{n^2}$ une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contenue dans G. On décompose alors a dans cette base : $a = a_1 g_1 + ... + a_{n^2} g_{n^2}$. On a alors $\operatorname{Tr}(ag) = a_1 \operatorname{Tr}(gg_1) + ... + a_{n^2} \operatorname{Tr}(gg_{n^2})$. Or G est stable par produit donc gg_i est un élément de G.
Or tout élément h de G vérifie $|\operatorname{Tr}(h)| \leqslant n$ donc —$\operatorname{Tr}(ag)| \leqslant n|a_1| + ... + |a_{n^2}| \leqslant nK|||a|||$ par le théorème des normes équivalentes (K est une constante). On peut donc conclure. (Moi j'étais parti sur du Cauchy-Schwartz au début en utilisant le produit scalaire $(a, b) = \operatorname{Tr}(a^T b)$, mais ça ne marchait pas très bien, car la trace de $g^T g$ pour g élément de G ne se majore pas bien, j'ai donc perdu pas mal de temps là dessus..).

(2) On va utiliser de façon judicieuse la première question en prenant pour a les matrices de la base canonique, ce qui donne $|g_{i,j}| \leqslant nK \sup_{k,l} |||E_{k,l}|||$ donc $||g||_\infty \leqslant nK \sup_{k,l} |||E_{k,l}|||$ donc G est borné.

(3) On sait déjà que $\overline{G}$ est un compact de $M_n(\mathbb{R})$ car c'est un fermé borné. Il est de plus stable par produit par continuité du produit matriciel. Il faut alors montrer que tout élément de $\overline{G}$ est inversible et que cet inverse est dans $\overline{G}$.
D'abord, si on admet que tout élément de g est inversible : On considère alors la suite $(g^n)_{n\in\mathbb{N}}$. C'est une suite à valeurs dans $\overline{G}$ qui est compact, donc on peut extraire une suite convergente. Soit φ une fonction extractrice.

On considère alors $h_n = g^{\varphi(n+1)-\varphi(n)-1}$. h_n est à valeurs dans $\overline{G}$ et converge vers g^{-1}, qui est donc dans l'adhérence de $\overline{G}$ donc dans $\overline{G}$. Il faut donc montrer que tout élément de $\overline{G}$ est inversible.
Et je viens de me rendre compte que j'ai fait une grosse arnaque à l'oral pour finir. Mais je vais y réfléchir à nouveau.
Mais ce qui me gêne c'est qu'il suffit qu'il y ait un élément de G qui ait une valeur propre de module < 1 pour que le résultat soit faux.
Après un footing matinal, voici la solution revue par Sylvère :
Bon en y réfléchissant, pendant mon footing matinal, il me semble que l'énoncé que l'examinateur m'a donné pour la dernière question est faux :
En effet, si on note $D = \frac{1}{2}I_n$, et H le plus petit sous ensemble de $M_n(\mathbb{R})$ stable par $\times$ qui contient G et D. Il vérifie alors les mêmes hypothèses de départ, mais il se trouve que la matrice nulle est dans $\overline{H}$, qui n'est donc pas inclus dans $GL_n(\mathbb{R})$.
Il me semble qu'il faudrait dire : $(\overline{G} \cap GL_n(\mathbb{R}), \times)$ est un sous groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$, c'est à dire que l'adhérence est prise pour la topologie de $GL_n(\mathbb{R})$. Dans ce cas la démonstration est terminée !
"Corrigé" par Than Dung Nguyen. Il y a des incohérences dans cet énoncé...

Solution 1.3.4 (Jonathan Lardy) Note :
Commentaires : *examinateur muet ! Le message est clair : débrouille-toi tout seul !*

(1) Discuter selon le polynôme caractéristique : racines réelles ou complexes ? Distinctes ou confondues ? Et en déduire des propriétés telles que " la matrice est diagonalisable ", qui facilitent grandement la discussion. Les points fixes recherchés seront alors issus des vecteurs propres de la matrice (et de leurs opposés).

(2) En multipliant l'inégalité par -1, on se ramène au cas précédent. Puis, en supposant par l'absurde que la matrice admet un point fixe, et en écrivant ce vecteur comme combinaison linéaire des deux vecteurs propres indépendants déterminés en 1), on aboutit à une contradiction.

Solution 1.3.5 (Jiawei Hu) Note :
Commentaires : *?*

(1) $m_f(x,t) \leqslant \dfrac{1}{2t}\displaystyle\int_{x-t}^{x+t} \sup f.\,\mathrm{d}t = \sup f.$
Soit x_n le point où f atteint son minimum sur $[x-1/n, x+1/n]$ alors
$$M_f(x) \geqslant m_f(x,1/n) \geqslant \frac{n}{2}\int_{x-1/n}^{x+1/n} f(x_n)\,\mathrm{d}t = f(x_n).$$
Comme $x_n - x \to 0$, en prenant la limite quand $n \to +\infty$, on obtient $M_f(x) \geqslant f(x)$.

(2) Soit $\varepsilon > 0$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on suppose que $M_f(x) - M_f(y) \geqslant 0$.
Il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $m_f(x,t_0) + \varepsilon \geqslant M_f(x)$. On sait en outre que $m_f(y,t_0) \leqslant M_f(y)$ d'où
$$\begin{aligned} M_f(x) - M_f(y) &\leqslant \varepsilon + m_f(x,t_0) - m_f(y,t_0) \\ &\leqslant \varepsilon + \frac{1}{2t_0}\int_{x-t_0}^{x+t_0} (f(u) - f(u+y-x))\,\mathrm{d}u \end{aligned}$$
en faisant un changement de variable. f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ donc, pour cet ε, il existe $\eta > 0$ tel que $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $|a-b| \leqslant \eta \Rightarrow |f(a) - f(b)| \leqslant \varepsilon$. On utilise cette

inégalité avec $a = u$, $b = u + y - x$ donc, pour $|y - x| \leqslant \eta$ on a $0 \leqslant M_f(x) - M_f(y) \leqslant \varepsilon$ i.e. M_f est bien uniformément continue.

(3) On reprend la démonstration précédente et on se place sur un segment $[\alpha, \beta]$. f y est uniformément continue, on peut alors terminer la démonstration.

Solution 1.3.6 (Frédéric Combes) Note :
Commentaires :
UC : pas dur, C, faire une disjonction de cas (sup atteint ou sup pas atteint), et il faut utiliser que C sur un segment implique UC sur ce segment...

Solution 1.4.1 (Thomas Gaudelet) Note :
Commentaires : *?*
Solution de Sylvère Gangloff

(1) On utilise les formules d'Euler, et on développe. Pour $n \geqslant 1$, on trouve alors $b_n = \frac{a_n}{2^{n-1}}$.

(2) On cherche à montrer que pour tout polynôme P de degré $n \geqslant 1$, $\|P\|_{[0,1]} \geqslant \frac{|a_n|}{2^{n-1}}$ où $|a_n|$ est son coefficient dominant. C'est à dire que pour tout polynôme P unitaire de degré $\geqslant 1$, $\sup\limits_{x\in[-1,1]} |P(2x)| = \sup\limits_{x\in[-2,2]} |P(x)| \geqslant 2$.
On fait alors ça par récurrence :
On vérifie le résultat pour $n = 1$ et on suppose vrai pour $k \leqslant n - 1$, $n \geqslant 2$ que pour tout polynôme Q de degré inférieur ou égal à k, $\sup\limits_{x\in[-2,2]} |Q(x)| \geqslant 2$ et $\sup_{x\in[0,2]} |Q(x)| \geqslant 2$ (Ouais je sais, c'est un peu tordu..) :
Si P est de degré n : $2 \sup\limits_{x\in[-2,2]} |P(x)| \geqslant \sup\limits_{x\in[-2,2]} |P(x) + (-1)^n P(-x)|$ (inégalité triangulaire).
Or, si n est pair il existe Q de degré$\leqslant n-1$ unitaire tel que $P(x)+(-1)^n P(-x) = 2Q(x^2)$.
$\sup\limits_{x\in[-2,2]} |P(x) + (-1)^n P(-x)| = \sup\limits_{x\in[0,4]} |2Q(x)| \geqslant \sup\limits_{x\in[0,2]} |2Q(x)| \geqslant 4$ par hypothèse, et on fini la récurrence.
Si n est impair ça se bidouille pareil normalement.
Compléments de Thomas Gaudelet :
on se ramène à $b_n = 1$, puis l'idée c'était de procéder par l'absurde et de tracer la courbe $P(\theta)$ et $\cos(n\theta)$ sur $[0, \pi]$ pour voir ce que sa donne sous cette hypothèse et on voit avec les changements de signes que $Q(\theta) = P(\theta) - \cos(n\theta)$ à n racines, comme il est de degré $n - 1$ il est nul d'où la contradiction.

(3) Même chose que 2).

(4) On se ramène par changement de variable affine aux questions précédentes :
On considère le polynôme $Q(x) = P(\frac{b-a}{2}x + \frac{a+b}{2})$.
Pour tout $x \in [-1, 1]$, $|Q(x)| \leqslant 2$. On utilise alors la question 2), qui donne le résultat.

Solution 1.4.2 (Sylvère Gangloff) Note :
Commentaires : *examinateur : Très sympathique. Vraiment agréable d'avoir un examinateur comme ça au concours ! On va directement à l'essentiel.. Salle : 218 Bâtiment Cournot, ENS Cachan.*
La première partie a été laborieuse, puisque j'ai fait deux trois erreurs de calculs, et comme c'était pas très intéressant, il m'a donné le résultat et on est passés à la suite. L'oral n'a pas duré longtemps mais j'ai l'impression que c'était satisfaisant. Il m'a posé deux trois questions à

la fin : Ce que je voulais faire après, quelle école je voulais (J'ai répondu que je voulais intégrer une ENS et faire des maths..). Il m'a demandé si je me voyais ingénieur, j'ai répondu non sans hésitation.. Après à quelles écoles j'étais admissible.. Il a commencé par me donner l'énoncé brut, qui n'est pas évident sans questions intermédiaires.. Et ensuite il m'a donné petit à petit des questions intermédiaires..

(1) Calcul fait à peu près dans l'exo 2.3.1 sur les séries de Fourier.
Par imparité, on a $2\pi c_n(\varphi) = -2i\displaystyle\int_0^\pi f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t$,
par symétrie par rapport à la droite $x = \dfrac{\pi}{2}$ on en déduit que $c_{2p}(\varphi) = 0$ puis, si $n = 2p+1$ alors

$$2\pi c_{2p+1}(\varphi) = -4i\int_0^{\pi/2} t\sin nt\,\mathrm{d}t \Rightarrow c_{2p+1}(\varphi) = \frac{(-1)^{p+1}2i}{\pi(2p+1)^2}.$$

(2) $P'(t) = a_1\lambda_1 e^{i\lambda_1 t} + ... + a_n\lambda_n e^{i\lambda_n t}$. On sait que $\varphi(\lambda_k) = \lambda_k$ pour tout k. On développe φ en série de Fourier : $\varphi(t) = \sum_{p\in\mathbb{Z}}(c_p(\varphi)e^{ipt})$. On a alors $\varphi(\lambda_k) = \sum_{p\in\mathbb{Z}} c_p(\varphi)e^{ip\lambda_k} = \lambda_k$. On peut donc écrire

$$P'(t) = \sum_{j=1}^n a_j \sum_{p\in\mathbb{Z}} c_p(\varphi)e^{ip\lambda_j}e^{i\lambda_j t} = \sum_{p\in\mathbb{Z}} c_p(\varphi)(\sum_{j=1}^n a_j e^{ip\lambda_j}e^{i\lambda_j t}).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} |P'(t)| &\leqslant \sum_{p\in\mathbb{Z}} |c_p(\varphi)| \left|\left(\sum_{j=1}^n a_j e^{ip\lambda_j}e^{i\lambda_j t}\right)\right| \\ &= \sum_{p\in\mathbb{Z}} |c_p(\varphi)||P(p+t)| \leqslant \sum_{p\in\mathbb{Z}} |c_p(\varphi)|||P||_\infty \\ &\leqslant \frac{\pi}{2}||P||_\infty \end{aligned}$$

(Grâce à la première question). Donc $||P'||_\infty \leqslant \frac{\pi}{2}||P||_\infty$.

(3) On peut par exemple écrire $Q(t) = a_1 e^{i\frac{\pi}{2M}\lambda_1 t} + ... + a_n e^{i\frac{\pi}{2M}\lambda_n t}$. Q vérifie les hypothèses de la seconde question, donc $||Q'||_\infty \leqslant \frac{\pi}{2}||Q||_\infty$. Or $||Q||_\infty = ||P||_\infty$ et $||Q'||_\infty = \frac{\pi}{2M}||P'||_\infty$, ce qui donne le résultat.

Solution 1.4.3 (Jonathan Lardy) Note :
Commentaires : *examinateur pipelette ! Il parle tout le temps et aide alors que son exercice est simple !*
Euh... trivial ? J'ai été surpris par la simplicité de cet exercice. En plus l'examinateur voulait tout le temps discuter/aider.

(1) $\forall x \geqslant t$, $x^k f(x) \geqslant t^k f(x)$ et on intègre selon x de t à $+\infty$.

(2) Même raisonnement que ci-dessus. Pour la deuxième question,utiliser le DSE de l'exponentielle.

(3) Encore le DSE de l'exponentielle, et on intervertit somme et intégrale (en le justifiant c'est encore mieux). On conclut avec des arguments de borne inf classiques.

Solution 1.4.4 (Frédéric Combes) Note :
Commentaires :

Solution 2.1.1 (Chloé PASIN) Note :
Commentaires : *Maths 2, exo d'une étudiante de Bellevue, solution de Robin Larrieu.*
On se place sur L compact de K^p. K et L sont compacts donc fermés bornés. Alors $\exists a, b > 0$ tels que $\forall x \in L, \forall n \in \mathbb{N}, a \leqslant ||x - y_n|| \leqslant b$.
Par continuité de g sur $[a, b]$, $|g(||x - y_n||)| \leqslant M$.
L'absolue convergence de la série des a_n donne alors la convergence normale de $f(x)$ par rapport à x sur L (la convergence simple aurait suffit).
Reste à faire la même chose pour la série des dérivées.
J'imagine que ici $||.||$ désigne la norme euclidienne pour un certain produit scalaire. $||u|| = \sqrt{(u, u)}$.
Dans une base orthonormée, $(u, u) = u_1^2 + \cdots + u_p^2$ donc $\mathrm{grad}(u, u) = 2u_1.e_1 + \cdots + 2u_n.e_n = 2u$. Alors $(||.||^2)'(u)(v) = 2(u, v)$ donc $||.||'(u)(v) = \frac{(u,v)}{||u||}$ puis $||. - y_n||'(x)(v) = \frac{(x-y_n,v)}{||x-y_n||}$ (la différentielle de $x - y_n$ est Id car c'est une application affine de partie linéaire Id).
Et donc $g(||.-y_n||)'(x)(v) = \frac{(x-y_n,v)}{||x-y_n||}.g'(||x-y_n||)$. Ceci est bien borné pour x, v dans L (Cauchy-Schwartz pour le p.s , $a \leqslant ||x - y_n|| \leqslant b$, $||v||$ bornée et continuité de g' sur $[a, b]$), d'où la convergence normale de $f'(x)(v)$ par rapport à x et v sur L donc f est $\mathcal{C}^1$ sur L.
Ceci étant vrai pour tout compact de K^p, f est bien $\mathcal{C}^1$ sur K^p.

Solution 2.1.2 (Candidat inconnu) Note : ?
Commentaires : *?*
Solution par Sylvère Gangloff.

(1) Pas intéressant.

(2) On suppose vérifié que g est de classe C^2.
(Analyse) : On dérive deux fois par rapport à x et on évalue en 0 : On obtient :
$$2P(t) = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0,0)(\cos(t))^2 + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(0,0)(\sin(t))^2 + 2\sin(t)\cos(t)\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x(0,0)}.$$
On en déduit que P est de la forme : $P(t) = a(\cos(t))^2 + b(\sin(t))^2 + c\cos(t)\sin(t)$.
Réciproquement (Synthèse), si P est de cette forme, g est C^2, car dans ce cas, $g(r, s) = ar^2 + bs^2 + crs$.

Solution 2.1.3 (Recueilli par Sylvère Gangloff) Note :
Commentaires : *?*

(1) a) Soit $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ les formes linéaires définies sur $\mathbb{R}[X]$ par $\varphi_1(P) = P(-2)$, $\varphi_2(P) = P'(-2)$, $\varphi_3(P) = P(-1)$. Montrons que la famille $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est libre :
soit $\varphi = \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \lambda_3\varphi_3 = 0$. On évalue φ en $P = X + 1$ et en $P = (X + 1)^2$ ce qui donne $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. On en déduit immédiatement $\lambda_3 = 0$.
Si $E = \mathrm{Vect}(\varphi_i)$ alors $\dim E = 3$ et si on prend la restriction de ces formes à $\mathbb{R}_2[X]$ alors elles forment une base de $\mathbb{R}_2[X]^*$. Soit (P_1, P_2, P_3) la base antéduale alors, avec $Q = (X + 2)^2(X + 1)$, (P_1, P_2, P_3, Q) est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
Pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$, on a $P = aP_1 + bP_2 + cP_3 + \lambda Q$ avec $c = P(-1)$, $a = P(-2)$, $b = P'(-2)$.
$$P'(X) = P(-2)P_1'(X) + P'(-2)P_2'(X) + P(-1)P_3'(X) + \lambda(X + 2)(3X + 4).$$
On remarque alors que, avec $m = 3/4$, $P'(m) = aP(-2) + bP'(-2) + cP(-1)$ avec $a = P_1'(m)$, $b = P_2'(m)$, $c = P_3'(m)$ c.q.f.d.

b) Il doit falloir faire un peu pareil...

(2) Contribution de Nicolas Martin et de Robin Larrieu.

a) Immédiat : a est son propre inverse.

b) Robin Larrieu : on utilise tout simplement que $(2a)^3 = 2a \Rightarrow 8a^3 = 2a \Rightarrow 6a = 0$..

c) Nicolas Martin : si $a^2 = 0$ alors $a = a^3 = a^2a = 0$. Si on considère un élément b tel que $b^2 = b$ et $a \in A$, alors on pose $c = ba(1-b)$ et $d = (1-b)ab$. On a $c^2 = ba(b-b^2)a(1-b) = 0$ et de même $d^2 = 0$. Donc $c = d = 0$ et ainsi $ba = bab$ et $ab = bab$.
D'où $ab = ba$. Donc $b \in Z(A)$.
Maintenant, $(a^2)^2 = a^4 = a^2$ donc $a^2 \in Z(A)$.
Conclusion partielle : $\{a^2 | a \in A\} \subset Z(A)$.
Si on prend $x \in A$, $2x = (x+1)^2 - x^2 - 1$ donc $2x \in Z(A)$ ($Z(A)$ est un sous-groupe).
En outre $x + 1 = (x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 3x^2 + 4x + 1$ d'où $3x = -3x^2$, donc $3x \in Z(A)$. Et donc $x = 3x - 2x \in Z(A)$.
Conclusion : A est commutative.
Robin Larrieu : sinon je précise un peu la démo de Nicolas parce que j'ai eu un peu de mal à comprendre : $Z(A)$ est le centre de A, donc l'ensemble des éléments qui commutent avec tout le monde.
Ensuite "$3x = -3x^2$ donc $3x \in Z(A)$" aurait pu être détaillé un peu : $-3x^2 = -9x^2 = -(3x)^2$ car $6x^2 = 0$.

Solution 2.1.4 (Cécile Defforge) Note : 8
Commentaires : *Math 1*
Solution par Sylvère Gangloff.
f est C^2 sur $\mathbb{R}^n - (0,0)$, et c'est assez simple à vérifier..
Ensuite on note $a_{i,j}$ les coefficients de la matrice Hessienne.
Si $i \neq j$, alors $a_{i,j} = -\frac{x_i x_j}{f(x)^3}$ et $a_{i,i} = \frac{\sum_{k \neq i}(x_k)^2}{f(x)^3}$.
Il s'agit donc de montrer, comme f est positive, que la matrice des $(f(x))^3 a_{i,j}$ est positive.
On écrit alors pour Y quelconque :

$$Y^{\mathrm{T}}AY = \sum_{i=1}^{n}(y_i)^2(\sum_{j \neq i}(x_j)^2) - \sum_{k \neq l} x_k x_l y_k y_l.$$

Ceci se réécrit : $Y^{\mathrm{T}}AY = \sum\limits_{i<j}(x_i y_j)^2 + (y_i x_j)^2 - 2\sum_{i<j} x_i x_j y_i y_j$ et ensuite on factorise : $Y^T AY = \sum\limits_{i<j}(x_i y_j - y_i x_j)^2$, c'est bien positif, on a gagné !

Solution 2.1.5 (Cécile Defforge) Note : 13
Commentaires : *Maths 2. J'ai eu le même examinateur que Jonathan qui laisse chercher en précisant quand on est dans la bonne direction et puis apporte son aide quand cela devient vraiment nécessaire.*
Solution de Sylvère Gangloff.

(1) f est immédiatement injective. On cherche à montrer la surjectivité :
Soit y un élément de E. On considère la suite $u_n = f^n(y)$. E est compact donc (u_n) admet une valeur d'adhérence dans E. On appelle φ la fonction d'extraction. On considère maintenant $z_n = f^{\varphi(n+1)-\varphi(n)-1}(y)$. Par définition de f, $d(f(z_n), y) = d(f^{\varphi(n+1)}(y), f^{\varphi(n)}(y))$ qui tend vers 0. Donc $f(z_n)$ tend vers y. Or z_n admet une valeur d'adhérence et f continue car isométrie. Quand on passe a la limite, on obtient la surjectivité de f.

(2) Pour la deuxième partie de l'exercice, ben on fait pareil, où alors on se sert de façon astucieuse du premier résultat.

Solution 2.1.6 (Xavier Bonnetain.) Note : 16

Commentaires : *Maths 2, examinateur sympa, laisse chercher, aide quand il le faut.*

(1)

Proposition de correction par Tanguy Marchand pour l'exercice sur l'extremum :
Si f est majorée alors notons M sa borne supérieure. L'image réciproque de $[M-1, M]$ est un borné de $\mathbb{R}^2$. C'est de plus un fermé car f est continue. Donc c'est un compact.f atteint donc un maximum sur ce compact qui est donc un maximum global.
Supposons que f n'est pas majorée. Montrons alors par l'absurde qu'elle est minorée, pour appliquer le raisonnement précédent à $-f$.
Notons $E = f^{-1}(\{0\})$ qui est bornée par hypothèse. Soit $r \in \mathbb{R}^+$ tel que E soit strictement inclus dans $B(0, r)$. Enfin posons A le complémentaire de $B(0, r)$. Si f garde un signe constant sur A alors f est soit majorée soit minorée sur $\mathbb{R}^2$. Sinon si f prend des valeurs de signes opposées. Or A est connexe par arcs. Donc f va s'annuler sur A ce qui est contradictoire avec la définition de A.

Solution 2.1.7 (Robin Larrieu) Note : 15

Commentaires : *Maths 2, examinateur : assez agé, parle très peu au début, sauf pour préciser un peu mieux ce qu'il attend, puis donne quelques indications et te donne le résultats de certains calculs un peu parachutés (faut dire que sans ça, ça peut vite devenir TRES bourrin, vous comprendrez rapidement pourquoi).*

(1) C'est pas très méchant : $A = A^{\mathrm{T}}$ (A symétrique) et $A.A^{\mathrm{T}} = I_n$ (A orthogonale) donc $A^2 = I_n$.
Comme A est symétrique réelle, A est orthodiagonalisable : $A = P^{\mathrm{T}}.D.P$ où $D = \mathrm{Diag}(\lambda_i)$ avec $D^2 = I_n$ donc $\lambda_i = \pm 1$ (le signe dépend de i hein !). Ainsi, $A = P^{\mathrm{T}}.\mathrm{Diag}(\pm 1, \dots, \pm 1).P$ avec P orthogonale.
En fait, A est la matrice d'une symétrie orthogonale.
Cas $n = 2$: A orthogonale donc $A = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$ (A est une rotation) ou $A = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ \sin(t) & -\cos(t) \end{pmatrix}$ (A est une réflexion).
A symétrique impose dans le premier cas que $\sin(t) = 0$ donc $A = \pm I_n$ et on n'a aucune condition dans le second cas (A est déjà symétrique). Les solutions sont donc $A = \pm I_n$ et $A = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ \sin(t) & -\cos(t) \end{pmatrix}$ avec $t \in [0; 2\pi]$.

(2) Première idée : élever au carré et identifier des coefficients (outch !).
Deuxième idée : calculer le polynôme caractéristique et chercher a et b pour que ces racines soient plus ou moins 1 (encore pire ! !).
En fait, on remarque qu'il y a 4 a et 3 b sur chaque ligne donc (1,1,1,1,1,1,1) est v.e.p associé à $4a+3b$ d'où $4a+3b = \pm 1$. Ensuite dans la base $(e_1, \dots, e_6)$ de $(1,1,1,1,1,1,1)^{\perp}$ où $e_1 = (1, -1, 0, \dots), e_2 = (1, 0, -1, \dots), \dots$, on cherche à exprimer la restriction de A, on trouve une matrice $A' = (a-b).B$ (les coefficients de B sont 1,0 ou -1) et il me dit : "on peut voir que $B^2 = 2I_6$". On en déduit une deuxième équation $2(a-b)^2 = 1$ (car on doit avoir $(A')^2 = I_6$).
On résout et on trouve 4 solutions pour (a, b) suivant le signe de $4a + 3b$ et de $a - b$.

(3) $4a + 3b$ est v.a.p de A donc $(X - 4a - 3b)|\Pi_A$ et on a $(A')^2 = 2(a-b)^2.I_n$ donc $X^2 - 2(a-b)^2 = \Pi_{A'}|\Pi_A$.
Dans le cas général, ces polynômes sont premiers entre eux (petite arnaque, mais il avait

l'air d'être d'accord) donc $(X-4a-3b)(X^2-2(a-b)^2)|\Pi_A$ et est unitaire et annulateur d'où $\Pi_A = (X-4a-3b)(X^2-2(a-b)^2)$.

Solution 2.1.8 (Robin Larrieu) Note : 14

Commentaires : *Maths 1, examinateur : Vieux, des lunettes, un énorme pansement sur le front. Ses énoncés ne sont pas toujours très clairs (voire faux si on chipote sur des détails du style linéaire au lieu de affine), d'autant plus qu'il les dicte vite. Donne quelques indications de temps en temps, parfois débiles si tu ne le dis pas tout de suite (ex : "je cherche un contre exemple en dimension infinie, je me place sur les polynomes"...).*

(1) a) En dimension finie ($\dim E = n$) : Supposons par exemple $\mathrm{Rg}(p) > \mathrm{Rg}(q)$. Alors d'après le théorème du rang, $\dim \mathrm{Ker}(q) = n - \mathrm{Rg}(q) > n - \dim \mathrm{Rg}(p)$ donc $\dim \mathrm{Ker}(q) + \mathrm{Rg}(p) > n$. Or $\dim(\mathrm{Ker}(q) + \mathrm{Im}(p)) = \dim(\mathrm{Ker}(q)) + \mathrm{Rg}(p) - \dim(\mathrm{Ker}(q) \cap \mathrm{Im}(p))$. Donc $\dim(\mathrm{Ker}(q) \cap \mathrm{Im}(p)) \geqslant 1$, i.e. $\mathrm{Ker}(q) \cap \mathrm{Im}(p)$ contient un vecteur non nul x. Alors $(p-q)(x) = p(x) = x$ car p projecteur, d'où $\|p-q\| \geqslant 1$.
Cas général : un des deux projecteurs est de rang fini. On peut alors se restreindre à un s.e.v de dimension finie dans lequel $\mathrm{Rg}(p)$ et $\mathrm{Rg}(q)$ sont différents et appliquer le résultat précédent.

b) Pendant l'oral, j'avais introduit des ensembles et la démonstration ne lui a pas posé de problème, sauf que je me rends compte maintenant que j'ai oublié de distinguer le cas où ils sont vides (et montrer qu'ils ne le sont pas risque d'être très lourd) donc je ne vais pas la faire au cas où Victor traîne sur le forum...
En plus elle était un peu compliquée et j'ai trouvé (un peu) plus simple.
Je pose $R = \{t \in [0;1],\ \mathrm{Rg}(p(t)) = \mathrm{Rg}(p(t_0))\}$ où t_0 est fixé (fixé quelconque pour les amateurs). Montrons que R est à la fois ouvert et fermé.
Ouvert : Soit $t \in R$. Par l'absurde, si $\forall \epsilon > 0, \exists x \notin R, |x-t| < \epsilon$, alors il existe une suite t_n qui tend vers t et telle que $\forall n,\ \mathrm{Rg}(p(t_n)) \neq \mathrm{Rg}(p(t))$ donc d'après le (a), $\forall n,\ \|p(t_n) - p(t)\| \geqslant 1$ et par continuité de p et de la norme, on a une contradiction.
Fermé : Par caractérisation séquentielle. Soit t_n (dans R) tendant vers t. t appartient à R par l'absurde (la démo est la même que la précédente).
Comme R est ouvert, fermé et non vide (t_0 est dans R), on en déduit que $R = [0;1]$, d'où $\mathrm{Rg}(p(t))$ est constant.

c) Bon évidemment on se place sur les polynômes (le lui dire tout de suite avant de réfléchir au contre exemple...) muni de la norme $\int_0^1 |P(t)|\,dt$ et on prend $p(P)$ =(polynôme constant égal à $P(0)$) (c'est bien un projecteur). Avec $P_n = (1-X)^n$, on obtient $\|P_n\| \to 0$ mais $\|p(P_n)\| = 1$, donc p n'est pas continu.

(2) Là, je suis un peu inquiet parce que c'est débile, ce qui veut en général dire que j'ai raté le premier exercice (pourtant, je n'en avais pas l'impression ; même si c'est vrai je faisais des trucs un peu compliqués, au 2, il ne m'a pas aidé du tout vu qu'ilamis du temps à comprendre ma démo).
Alors on a $a = (a_1, a_2)$ et $b = (b_1, b_2)$ avec par exemple a_1 irrationnel.
1er cas : b_2 irrationnel. On fait $(a_1, a_2) \to (a_1, b_2) \to (b_1, b_2)$ par des segments de droite (clairement dans E).
2ème cas : b_2 rationnel. Alors b_1 irrationnel et on fait $(a_1, a_2) \to (a_1, x) \to (b_1, x) \to (b_1, b_2)$ avec x irrationnel.

Solution 2.1.9 (Timothée Pécatte) Note : 9

Commentaires : *Maths 1, examinateur : Salle PC 15.*
Premier à passer de la journée, le samedi à 10h (faut croire que l'examinateur est un flemmard).

Assez sympathique, ne donne pas trop d'indications (mais j'en avais pas trop besoin), indique quelle idée est la bonne, corrige les erreurs.
On fait un dessin ! Et puis on voit que ca a des bonnes têtes de courbes pas trop moches, genre hyperboles...
On se dit ya peut être une résolution géométrique, on cherche, et on trouve pas.
Donc la, on sort les bras, et c'est parti :
La courbe $C = f(t)$ s'écrit $(g(t), h(t))$. La tangente en un point $M = f(t)$ s'écrit : $N(u) = (g(t), h(t)) + u(g'(t), h'(t))$.
L'intersection avec l'axe des ordonnées de la tangente se fait pour : $u = -g(t)/g'(t)$.
Soit le point T : $T(0, h(t) - h'(t)g(t)/g'(t))$. Puis maintenant, les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AT}$:

$$\overrightarrow{AM} = (g(t) - 1, h(t)),\ \overrightarrow{AT} = (-1, h(t) - h'(t)g(t)/g'(t))$$

Et la condition d'orthogonalité :

$$\overrightarrow{AT}.\overrightarrow{AM} = 0 \Leftrightarrow 1 - g(t) + h(t)^2 - h(t)h'(t) * g(t)/g'(t) = 0.$$

Bon là, on suppose que les courbes sont pas trop laides et qu'on peut exprimer g en fonction de h, donc on pose $g(t) = t$. On obtient la magnifique équation différentielle :

$$1 - t + h(t)^2 - th(t) * h'(t) = 0$$

Et là on galère pas autant que moi (j'avais senti le h^2, mais j'étais parti sur $(th^2(t))'$ ce qui n'était pas bon...) et on pose $y = h^2$. D'ou l'équa diff vérifiée par y : $1-t+y(t)-(t/2)y'(t) = 0$.
Là, on sait (par coeur !) que les solutions sont ... on bidouille....pour obtenir finalement : $h^2(t) = Bt^2 + 2*t - 1$ avec B une constante. On se souvient bien que $t = g(t)$, donc on va réécrire avec des x et y pour y voir plus clair, on a en fait :

$$y^2 = Bx^2 + 2x - 1.$$

Et donc là, on différencie les cas :
- $B > 0$, on factorise pour faire apparaître un carré pour obtenir l'équation d'une hyperbole (d'où le fait que pour certains x trop faibles, c'est pas défini).
- $B = 0$, on obtient une parabole.
- $B < 0$, on obtient une ellipse.

On remarque les propriétés suivantes :
Le point O n'est jamais atteint (une perpendiculaire à (AO) qui coupe l'axe des ordonnées...).
La famille d'hyperbole coupe l'axe des ordonnées entre 0 et 1/2 (et aussi proche qu'on veut de 0 et 1/2).
Puis le cas critique lorsque la courbe coupe l'axe des abscisses en 1/2, on obtient une parabole.
Et puis lorsque ca coupe entre A et 1/2, on tombe sur des ellipses et on peut montrer que A est un des foyers de ces ellipses (calcul non demandé, il m'a juste demander quelle serait la méthode si je voulais montrer ça).

Solution 2.1.10 (Timothée Pécatte) Note : 12,5
Commentaires : *Maths 2 ; examinateur : plutôt sympa, presque pas muet, m'a fait rentrer 10 min en avance parce que le candidat précédent n'était pas là (et pourquoi il m'a pas fait rentrer plus tôt ? J'en sais rien !...)*

(1) L'unicité est immédiate, vu que (a_n) et (b_n) ont le même premier terme, car a_0 fixé, puis on égalise les intégrales entre a_0, a_1 d'une part, b_0, b_1 d'autre part (puisque qu'elles sont égales à $1/r$) et comme la fonction à l'intérieur est positive, on a $a_1 = b_1$ et puis le reste par récurrence.
Existence : on pose $f(x) = \displaystyle\int_{a_0}^{x} \frac{1+\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$, on montre que l'intégrale diverge (minorer sur des intervalles de largeur 2π, ou autre, pour faire apparaître la série harmonique)

donc comme $f(x) > 0$, on applique le TVI. Et on peut faire de même puisque l'intégrale continue à diverger tant qu'on enlève que des segments (ie, $g(x) = \displaystyle\int_{a_n}^{x} \frac{1+\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge toujours en + infini).

(2) On somme l'égalité pour obtenir que l'intégrale entre a_0 et a_n est égale à la somme d'une série pseudo harmonique. Comme a_n est positive, soit elle diverge, et c'est bon (parce que intuitivement, on pense qu'elle va diverger).
Si a_n ne diverge pas, elle converge. Donc $f(a_n)$ devrait tendre vers $f(\lim a_n)$ car f est continue. Or on a $f(a_n) =$ série pseudo harmonique qui diverge.
Donc contradiction, d'où a_n tend vers l'infini.

(3) On repart de cette égalité.
La somme de la série pseudo harmonique est équivalente à du $\ln n+$ des constantes $+o(1)$.
On casse la fonction à intégrer en 2 : on obtient $\ln a_n - \ln a_0 +$intégrale. Puis on reconnaît l'intégrale de $\cos t/t$, on sait qu'elle converge (fameux contre exemple d'intégrale convergente alors que non intégrable).
Donc on a $\ln n$ équivalent à $\ln a_n$ mais on a pas le droit d'appliquer l'exponentielle sans $o(1)$. On coupe la nouvelle intégrale à π par exemple, on obtient l'intégrale entre π et a_n, on sait qu'elle converge, c'est donc une constante $+o(1)$.
Au final, on veut que : $\ln(a_0) - \displaystyle\int_{a_0}^{\pi} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t +$ constantes $= 0$ (ici constante signifie indépendant de a_0).
On étudie la fonction $h(a_0) = \ln(a_0) +$ l'intégrale. On sait que quand $a_0 \to 0$, on a $h(a_0) \to -\infty$.
Quand $a_0 \to +\infty$, $h(a_0) \to +\infty$, car l'intégrale converge et le logarithme assure la divergence. Donc le TVI nous donne un a_0 qui convient.
Pour montrer qu'il est unique, on dérive h, on tombe sur :
$$h'(a_0) = \frac{1}{a_0} + \frac{\cos(a_0)}{a_0} = \frac{1+\cos(a_0)}{a_0}$$
qui est positive mais s'annule parfois.
Mais on voit bien que les points d'annulations ne peuvent pas faire des plateaux, et comme je commence à être usé, je sors l'argument :
"h' est strictement positive sauf en un nombre dénombrable de point, donc a_0 est unique" ce qui a convenu à l'examinateur !

Solution 2.1.11 (Odile Maliet) Note : 10
Commentaires : *Maths 2*

Solution 2.1.12 (Odile Maliet & Jiawei Hu) Note : 14 & 6
Commentaires : *Maths 1, solution de Sylvère Gangloff*

(1) On peut se placer dans une clôture algébrique $\mathbb{L}$ de $\mathbb{K}$. On peut alors trigonaliser toutes les matrices A de S dans une même base de $\mathbb{L}^n$ donc il existe x dans $\mathbb{L}^n$ tel que $Ax = 0$ pour toute matrice A de S. On considère alors une famille libre de S de cardinal maximal $A_1, ..A_p$. Toute matrice de S peut alors s'exprimer comme une $\mathbb{K}$-combinaison linéaire de $A_1, ..A_p$.
On considère alors la matrice : $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ . \\ . \\ A_p \end{pmatrix}$.

Elle a alors, en tant que matrice à coefficient dans $\mathbb{L}$, un rang inférieur ou égal à $n-1$, donc toute matrice extraite de taille n est non inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{L})$, donc dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (en passant par le déterminant), donc il existe un vecteur v dans $\mathbb{K}^n$ tel que $Av=0$, ce qui fini la démonstration.

(2) Ici l'énoncé est faux si on considère λ_A dans $\mathbb{K}$ a priori. (Prendre $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, S la matrice de permutation $(2,...,n,1)$ qui n'a aucune valeur propre réelle et l'identité, par exemple). Sinon alors on se place dans une clôture algébrique et on trigonalise, ce qui donne directement le résultat. Peut être que l'énoncé exact était avec $\mathbb{K}$ algébriquement clos ?

Solution 2.1.13 (Paul-Guillaume Fournié) Note : 8

Commentaires : *Maths 1, petite salle 10.*

Mise en situation :

Etant convoqué 50 minutes avant l'heure de passage, j'ai le plaisir de voir Laurent sortir d'une salle voisine de la mienne à 17h10. Celui-ci me parle de son exercice (sur des matrices). C'est alors qu'un homme d'une quarantaine d'année qui avait assisté à un oral dans ma salle à la même heure que Laurent et qui avait écouté notre conversation nous apprend que mon futur examinateur, décrit comme gentil, avait posé le même exercice. On en déduit donc que tous les candidats convoqués à la même heure planchent sur les mêmes sujets. Je suis donc rassuré à l'idée d'avoir quelque chose de plus ou moins classique, et surtout d'échapper à toutes les fantaisies d'un examinateur, en particulier celles M. Géométrie.

Sauf qu'à 18h, heures de mon passage, je suis le seul encore présent à subir l'épreuve de Maths 1. Je suis donc à la merci de ce vieux monsieur aux cheveux très blancs, portant des lunettes et arborant un assez gros pansement sur la tempe... Il ne se prive d'ailleurs pas de m'annoncer immédiatement de la géométrie plane...

On montre d'abord par des arguments de symétrie que le centre du plus grand cercle se trouve en O centre du losange (avec les mains : on prend un cercle contenu dedans, s'il n'est tangent à aucun côté, on peut lui agrandir son rayon, puis s'il n'est pas sur un axe de symétrie, son symétrique est aussi dans le losange et tous les cercles de même rayon et de centre entre les deux initiaux aussi par convexité, on a donc que le plus grand cercle est le cercle de centre O tangent aux quatre côtés).

Une fois qu'on a ça, on calcule son rayon, qui se trouve être la hauteur issue de O de OAB rectangle en O. On a finalement un cercle d'aire $A=\pi a^2b^2/(a^2+b^2)$ ou quelque chose d'approchant...

On se souvient alors de la question qui est de trouver une ellipse d'aire supérieure (et non pas la plus grande ellipse ou de déterminer oui ou non l'existence d'une telle ellipse). On part donc du principe qu'aux moins une telle ellipse existe et on va essayer d'en exhiber une.

L'idée est alors d'en chercher une dont les axes seront (Ox) et (Oy), axes du losange, et de centre O, d'une part parce qu'à vue d'oeil ça a l'air de marcher et qu'on se dit que de toute façon pour des raisons de symétrie, sans doute on peut montrer que c'est optimal, et d'autre part parce que ça va bien simplifier nos calculs tout ça...

On dit alors que les ellipses de cette forme qui sont d'aire maximale sont nécessairement tangentes aux quatre côtés car sinon on peut dilater selon x ou selon y notre ellipse jusqu'à la tangence, augmentant ainsi son aire. On a alors l'intersection de l'ellipse $(x/c)^2+(y/d)^2=1$ et de la droite $(y=b-(b/a)x)$ (et non $y=b-(b-a)x$ comme je l'ai écrite au début, pour ne m'en rendre compte qu'à la fin, l'examinateur n'aillant pas prêté attention aux calculs) réduite à un point.

On remplace y par son expression en fonction de x dans l'équation de l'ellipse et on obtient un trinôme en x. On a une seule valeur de x possible (tangence) donc on a nécessairement $\Delta=0$, ce qui nous donne une condition entre c et d (qui doivent être positifs tous les deux), et donc l'expression de l'un en fonction de l'autre.

On considère alors $f(c) = \pi cd$, qui donne l'aire de l'ellipse associée à c qui est tangente comme précisée. C'est une banale fonction en c dérivable sur tout l'intervalle $]a, b[$, on ne se prive pas de dériver et de résoudre $f'(c) = 0$.
On obtient une valeur c_0 (que je n'ai pas compte tenu de l'erreur de calcul détectée à la toute fin...). Pas la peine de vérifier le signe de f', parce que de doute façon ce c_0 va marcher, ou sinon, en disant que $f(a) = f(b) = 0$ (ellipse réduite à un segment) et que $f > 0$.
Reste à calculer $f(c_0) - A$ et à montrer que c'est strictement positif pour $a \neq b$. Ca doit se faire assez simplement avec les bonnes expressions. Sinon on tente d'étudier $g(a, b) = f(c_0) - A$, qui dépend bien exclusivement de a et b, sur $(\mathbb{R}_+)^2$.
Intervention de Moïse Gaye :
En fait en utilisant une paramétrisation de la forme $\begin{cases} x(t) & = \alpha \cos(t) \\ y(t) & = \beta \sin(t) \end{cases}$ on a l' aire de l'ellipse qui s'écrit $\alpha\beta\pi$.
Or le fait que l'ellipse soit d'aire maximale est tangente au cercle implique que $\forall t \in [0, \pi/2],\ \beta \sin(t) = y(t) \leqslant y = -\frac{bx(t)}{a} + b = -\frac{b\alpha\cos(t)}{a} + b$.
Ainsi on trouve $a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 = a^2b^2 \rightarrow \beta = b\sqrt{1 - (\frac{\alpha}{a})^2}$. Par conséquent l'aire ne dépend que d'une variable α une étude de fonction donne $A_{max} = \frac{\pi ba}{2}$. Ainsi on a bien le résultat.
Réponse de Paul-Guillaume Fournié :
Au final tu fais la même chose que moi, car avec ta paramétrisation, tu prends une ellipse de centre O et d'axe (Ox) et (Oy) ; tu n'obtiens pas ainsi toutes les ellipses possibles. Et exprimer la tangence ou réinjecter dans l'équation revient exactement au même.
Sinon, on aurait pu obtenir un résultat en partant d'un carré $A(a, 0)B(0, a)C(-a, 0)D(0, -a)$, en considérant son cercle inscrit dont on calcule facilement le rayon puis en envoyant tout ça sur le losange par une affinité d'axe (Ox) et de rapport b/a. Notre cercle deviendrait une ellipse. Et il me semble qu'on avait mentionné le fait que les affinités conservaient la propriété de maximisation d'aire des triangles inscrits. On pourrait penser que ça marcherait avec les ellipse inscrite, le cercle en étant un cas particulier. Mais bon, ne sachant pas démontrer ce résultat, qui est d'ailleurs peut être faux, et qui n'aurait conduit qu'à la mise en évidence d'une seule ellipse, la méthode exposée est peut être plus prudente (d'autant qu'au début j'avais commencé à parler d'affinité et l'examinateur ne m'a pas eu l'air très emballé par ça...).
Commentaire personnel :
C'est assez injuste. A une heure près, mon examinateur m'aurait posé le même exercice qu'à mes voisins, et ce n'aurait certainement pas été de la géométrie plane (j'ose en effet espérer qu'il n'existe pas deux géomètres dans ce jury...). Juger deux ans de prépa au cours desquels on a vu des résultats intéressants aussi bien en algèbre générale ou linéaire qu'en analyse sur de la géométrie de bas étage comme celle-là, que nous n'abordons que très succinctement en première année, et qui plus est dans un concours comme celui-là, est assez révoltant.
Sinon, après quelques hésitations, je me suis lancé sans indication sur la méthode que j'ai exposée. Me rendre compte de l'erreur de calcul à la fin, sur l'équation d'une droite écrite à la va-vite qui plus est, m'a assez démoralisé. Mais bon, quand je me suis excusé d'avoir fait cette erreur et que j'ai commencé très rapidement à tout reprendre, le géomètre m'a arrêté en me disant que ma méthode était bonne et que des erreurs de calcul arrivait tout le temps... J'espère qu'il sera indulgent et qu'aucun de ceux qui ne sont pas encore passés ne tombe sur ce genre d'exercice...

Solution 2.1.14 (Xavier Bonnetain) Note : 17
Commentaires : *Maths 1, examinateur sympathique, peu bavard[*

(1) On part du fait que f est monotone (résultat classique pour une fonction continue et bijective sur un intervalle).
On distingue les cas :
   – f croissante : comme le groupe est fini alors, par le théorème de Lagrange, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^n = \mathrm{Id}$.
   S'il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) < x$ alors $f^2(x) < f(x) < x$ et, par une récurrence immédiate, $f^n(x) < x$ ce qui est contradictoire.
   On procède de même si $f(x) > x$.
   Conclusion : dans ce cas $f = \mathrm{Id}$.
   – f décroissante : si g est un autre élément du groupe et si g est décroissante alors $f \circ g$ est croissante, de même que f^2 donc $f \circ g = f \circ f = \mathrm{Id}$ donc $f = g$.
Conclusion : soit G ne contient que l'identité soit $G = \{\mathrm{Id}, f\}$ où f est décroissante.

(2) Cf. exo 2.4.5 de l'oral de l'X 2008...
Solution par Sylvère Gangloff.
   – Sens direct par contraposée :
   Supposons que le polynôme caractéristique de A est différent de son polynôme minimal :
   Dans ce cas, $(I_n, ..., A^{n-1})$ est liée : on prend $(\lambda_1, .., \lambda_n)$ une CL non triviale nulle :
   Dans ce cas $\lambda_1 f(x,y)_1 + ... + \lambda_n f(x,y)_n = 0$ pour tout (x,y), où $f(x,y)_i$ désigne la ième coordonnée de $f(x,y)$. On en déduit que $\mathrm{Im}(f)$ est incluse dans un hyperplan fixe de $\mathbb{R}^n$, donc f n'est pas surjective, et on a gagné !
   – Sens réciproque :
   Le polynôme caractéristique de A est égal à son polynôme minimal si et seulement si A est cyclique, c'est à dire qu'il existe un vecteur x de $\mathbb{R}^n$ tel que $(x, .., A^{n-1}x)$ base de $\mathbb{R}^n$ (On peut trouver la démonstration partout).
   Bon aller une petite démonstration (je suis trop généreux) :
   S'il existe x vérifiant $(x, .., A^{n-1}x)$ base de $\mathbb{R}^n$, alors le polynôme minimal de A est de degré $\geqslant n$ donc exactement de degré n car il divise le polynôme caractéristique et ces deux polynômes sont unitaires, ils sont donc égaux.
   Bon. Réciproquement, si ces deux polynômes sont égaux :
   On considère $I_x = \{P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(A)x = 0\ \}$. C'est un idéal, dont on note Π_x l'unique générateur unitaire.
   Montrons qu'il existe y tel que Π_y est égal au polynôme minimal de A (Ceci fournira $(y, .., A^{n-1}y)$ libre, donc base, ce qui achèvera la démonstration..).
   On décompose Π_A (polynôme minimal de A) en éléments irréductibles)
$$\Pi_A = {\Pi_1}^{\alpha_1} \times ... \times {\Pi_p}^{\alpha_p}.$$
   Théorème des noyaux : $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{j=1..p} \mathrm{Ker}({\Pi_j}^{\alpha_j}(A))$. On suppose ad absurdo qu'il n'y a aucun x dans $\mathrm{Ker}({\Pi_j}^{\alpha_j}(A))$ tel que Π_x est égal à ${\Pi_j}^{\alpha_j}$. Celui ci divise cependant ce dernier, donc tout x élément de $\mathrm{Ker}({\Pi_j}^{\alpha_j}(A))$, Π_x divise ${\Pi_j}^{\alpha_j - 1}$, donc ce dernier annule A sur $\mathrm{Ker}({\Pi_j}^{\alpha_j}(A))$, donc $\frac{\Pi_A}{\Pi_j}$ annule A, ce qui est impossible.
   On peut donc trouver des vecteurs x_j tels que $\Pi_{x_j} = {\Pi_j}^{\alpha_j}$.
   On prend alors $x = x_1 + .. + x_p$, dont le polynôme minimal ponctuel est égal à Π_A, ce qui termine la démonstration.
   Si on suppose alors cette condition vérifiée :
   On considère y un vecteur vérifiant cette condition et l'application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ qui à x associe $(x^T y, .., x^T A^{n-1} y)$.
   On montre qu'elle est injective : si $(x^T y, .., x^T A^{n-1} y) = 0$, alors comme $(y, .., A^{n-1}y)$ est une base, par combinaisons linéaires, $x^T x = 0$, donc $x = 0$. Cette application est donc surjective (dimensions). f est donc surjective par extension.

Solution 2.1.15 (Moïse Gaye) Note : 7 ou 8

Commentaires : *examinateur très sympathique, laisse chercher mais fini par aider quand même.* Sujet assez troublant au premier abord, on ne sais pas trop ce que l'on doit chercher alors on dit des banalités. Puis on essaye de trouver des exemples et là on voit que $\Phi : M \mapsto P^{-1}MP$ est bien un automorphisme d'algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Et là on se rappelle avoir vu une propriété qui disait que tout automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ s'écrit de cette forme.

Commentaire de Sylvère Gangloff : voir l'exercice de Maths ULC de Martin Clochard l'an dernier. J'ai l'impression qu'ils aiment bien ce théorème..

J'ai donc montré que $\mathrm{Sp}(M) = \mathrm{Sp}(\Phi(M)$ puis il m'a dit de prendre M diagonale avec les éléments diagonaux $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ différent 2 à 2. On a donc M et $\Phi(M)$ semblable et on note P la matrice de passage et on pose $\Psi : M \mapsto P\Phi(M)P^{-1}$, on a donc $\Psi(M) = M$.

Ensuite il faut prendre les fameux $E_{i,j}$, on a

$$\Psi(ME_{i,j}) = \Psi(\lambda_i E_{i,j}) = \lambda_i \Psi(E_{i,j}) = M\Psi(E_{i,j}).$$

Ainsi seul la i-ème ligne de $\Psi(E_{i,j})$ est non nul et en faisant de même avec $E_{i,j}M$ on a seulement la j-ème colonne qui est non nulle.

On en déduit que $\Psi(E_{i,j}) = \alpha_{i,j}E_{i,j}$.

On utilise ensuite le fait que $E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{k,j}E_{i,l}$ pour conclure que $\delta_{k,j}\alpha_{i,l} = \alpha_{i,k}\alpha_{k,l}$.

On en déduit donc, avec $i = j = k = l$, que $\alpha_{i,i} = \alpha_{i,i}^2 \Rightarrow \alpha_{i,i} = 1$.

Puis pour $i \neq j$, $k = i$, $l = j$, on a $\alpha_{i,j}^2 = 0$ d'où $\alpha_{i,j} = 0$ Moi je me suis arrêté là mais apparemment en continuant à bidouiller on a le résultat.

Solution 2.1.16 (Jonathan Lardy) Note : 15

Commentaires : *Maths 1 : examinateur sympathique, souriant, mais totalement muet.*

(1) On commence bien sûr par étudier l'équation homogène associée à (E). On montre alors par l'absurde qu'aucune de ses solutions non nulle n'est périodique. Puis, on suppose par l'absurde qu'il existe 2 solutions indépendantes périodiques de (E). On a alors que f est périodique, et puisque f non constante (et continue), le groupe de ses périodes est de la forme $a\mathbb{Z}$, avec a réel. D'où on tire que le rapport des périodes des deux fonctions solutions est rationnel. On trouve alors une période commune aux deux, la différence est donc aussi périodique, donc nulle d'après l'étude préliminaire. Contradiction.

Soit y_1 une solution T_1-périodique, y_2, T_2-périodique. On en déduit que f est admet T_1 et T_2 comme périodes. Si on pose $P(f) = \{T \in \mathbb{R} \mid f(x+T)f(x)\}$, on sait que $P(f)$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}$. On a 2 possibilités :
- $P(f)$ est dense dans $\mathbb{R}$ et comme f est continue, f est constante ce qui est écarté.
- $P(f) = T_0\mathbb{Z}$ dans ce cas il existe n et m entiers positifs tels que $T_1 = nT_0$ et $T_2 = mT_0$. Soit $T_3 = mT_1 = nT_2$, y_1 et y_2 sont T_3-périodiques. Si $y = y_1 - y_2$ alors y est une solution de l'équation homogène T_3-périodique. Or, on sait qu'il existe a et b tels que $y(x) = a\,\mathrm{e}^{-x}\cos x + b\,\mathrm{e}^{-x}\sin x$. $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = 0$ donc, si y est périodique alors $y = 0$. Y_1 et y_2 ne sont pas linéairement indépendantes.

(2) Si $\lambda = 0$, c'est immédiat. On suppose maintenant $\lambda \neq 0$.

Si x est un vecteur propre de u alors $u(x) = \lambda x$. $x = \sum\limits_{i=1}^{n} w_i$ étant la décomposition de x dans la somme directe, on a $u(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} u(w_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda w_i$. D'après l'unicité de la décomposition, on en déduit que $u(w_i) = \lambda w_{i+1}$ (les indices étant congrus à n dans $[\![1, n]\!]$). Comme $x \neq 0$, il existe $w_{i_0} \neq 0$.

Soit maintenant $y = \sum_{i=1}^{n} \xi^{-i} w_i$ alors

$$u(y) = \sum_{i=1}^{n} \xi^{-i} u(w_i) = \lambda\xi \sum_{i=1}^{n} w_{i+1}\xi^{-(i+1)} = \lambda\xi y$$

avec $y \neq 0$ car $w_{i_0} \neq 0$.

Solution 2.1.17 (Jonathan Lardy) Note : 18

Commentaires : *Maths 2. Examinateur sympathique, mais quasi-muet. Il m'a juste aidé une fois tout à la fin, sinon pour le reste silence radio.*

(1) Hyperclassique, poser $\Sigma = \sum_{i=1}^{k} A_i$, $\Sigma^2 = k\Sigma$, donc Σ diagonalisable et $\mathrm{Sp}(\Sigma)$ est inclus dans $\{0, k\}$, d'où $\mathrm{Tr}(\Sigma)$ est un multiple de k, et le résultat par linéarité de la trace.

(2) On obtient immédiatement que 0 est la seule valeur propre de Σ, donc comme Σ est diagonalisable, $\Sigma = 0$.

(3) LCI associative est trivial. En utilisant le caractère fini du groupe, on trouve un inverse à chaque élément, et du même coup l'élément neutre (Id).
(Poser $J = \{A, A^2, ..., A^k, A^{k+1}, \ldots\}$ qui est inclus dans S fini, d'où... et je vous laisse finir sans difficulté).

(4) On choisit $n = 2$ (pourquoi faire compliqué quand on peut faire simple ?), et on pense au invariances du carré dans le plan... Gagné !

(5) On écrit que $u_(n+1)^2 = S_(n+1) - S_n$, puis que $u_(n+1)^2 S_(n+1)^2 \to 1$, donc que $S_(n+1)^2(S_(n+1) - S_n) \to 1$. Ensuite il faut remarquer que (S_n) est une suite positive croissante, donc soit elle est majorée et converge, soit elle n'est pas majorée et diverge vers $+\infty$. Or si elle est majorée et converge vers $l > 0$ (le cas de la suite nulle est absurde par hypothèse), alors u_n tend à la fois vers 0 et vers $1/l$, ce qui est absurde. Donc $S_n \to +\infty$, et $u_n \to 0$.
On remarque alors que $S_(n+1)/S_n = 1 + (u_(n+1)^2)/S_n \to 1$, et que

$$S_(n+1)^3 - S_n^3 = (S_{n+1} - S_n)(S_{n+1}^2 + S_{n+1}S_n + S_n^2) \sim 1 + S_n/S_{n+1} + (S_n^2)/(S_{n+1}^2) \sim 3.$$

D' où en sommant, la somme se télescope et on obtient $S_n^3 \sim 3n$, et donc $u_n \sim (3n)^{-1/3}$.

Solution 2.1.18 (Laurent Anadon) Note : 14

Commentaires : *Maths 1 : j'ai raisonné principalement sur les valeurs propres et les endomorphismes plutôt que les matrices alors qu'il "semblerait" que l'examinateur ait fait ça différemment mais il m'a laissé choisir ma méthode même s'il lui a fallu parfois quelques instants pour comprendre ce que je faisais.*

(1) Il suffit de trouver une vap commune à u et à v. u est trigonalisable sur $\mathbb{C}$ dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$.
On considère $i = min\{j \mid f(e_j) \neq 0\}$ (ce n'est pas un aussi gros parachute qu'il y paraît quand on regarde le calcul qui suit) :

$$f \circ u(e_i) = f(\sum_{j=1}^{i} a_{j,i} e_j) = a_{i,i} f(e_i) = \lambda_i f(e_i) = v \circ f(e_i)$$

donc $X - \lambda_i$ divise P_u et P_v.

(2)

Solution 2.1.19 (Laurent Anadon) Note : 11
Commentaires : *Maths 2 : examinateur : Sympathique, ne dit pas grand chose au début puis finit par indiquer quelle est la meilleure piste et donne des conseils.*

– $(ii) \Rightarrow (i)$: on remarque d'abord que $A = C_x L_x$ avec $L_x = (x_1, ..., x_n)$. Puis on calcule $(AY|Y) = (C_x L_x Y|Y) = L_x Y(C_x|Y) = (\sum x_i y_i)^2 \geqslant 0$ idem pour $\tilde{A}$.
– $(ii) \Rightarrow (i)$: On s'intéresse d'abord au cas $n = 2$.
Puis on fait une démonstration par récurrence, on vérifie que la matrice d'ordre $n-1$ extraite de A est positive en considérant la forme quadratique associée.
On a alors $\forall i \in [|1, n-1|], x_i = \sqrt{(a_{i,i})}$ puis on considère la restriction du problème aux espaces $F_i = \mathrm{Vect}(e_i, e_n)$ ce qui nous donne $a_{n,i} = x_i x_n$ avec $x_n = \sqrt{(a_{n,n})}$ d'où le résultat.
Il y a un petit problème ici avec le signe de $a_{i,j}$.
Corrigé version exo ENS :
On sait que A, matrice symétrique, est diagonalisable dans une base orthonormée soit $A = P^{\mathrm{T}} DP$ où $D = \mathrm{Diag}(\lambda_i)$, $\lambda_i \geqslant 0$. On prend $R = \sqrt{D}P$ d'où $A = R^{\mathrm{T}} R$.
comme $A = R^{\mathrm{T}} R$ est positive, on peut appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}(Y^{\mathrm{T}} AX)^2 &= (Y^{\mathrm{T}} R^{\mathrm{T}} RX)^2 \\ &\leqslant (X^{\mathrm{T}} AX)(Y^{\mathrm{T}} AY) \\ &\leqslant [(RX)^{\mathrm{T}} RX][(RY)^{\mathrm{T}} RY]\end{aligned}$$

et on a vu que l'on avait égalité pour $X = E_i$, $Y = E_j$, ceci signifie que $\forall (i,j) \in [1,n]^2$, RE_i et RE_j sont liés et donc $\mathrm{Rg}(R) = 1$. $R = Y^{\mathrm{T}} X$ d'où $A = X^{\mathrm{T}}(YY^{\mathrm{T}})X = \lambda^2 X^{\mathrm{T}} X$ ce qui permet de conclure.

Solution 2.1.20 () Note :
Commentaires :

Solution 2.1.21 (Tanguy Marchand) Note : 14
Commentaires : *voici mon sujet de math1.*

Solution 2.1.22 (Tanguy Marchand) Note : 10,5
Commentaires : *Maths 2. Il est possible que toutes les hypothèses ne soient pas utilisées (il y avait d'autres questions normalement). Un des moyens est de multiplier par y' l'équation puis d'intégrer pour enfin utiliser le lemme de Gronwall (l'examinateur s'attendait à ce que je connaisse et sache redémontrer ce résultat...)*
On multiplie l'équation différentielle par y', ce qui donne $y''y' + (1+f)yy' = 0$, puis, comme $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, il existe $a \geqslant 0$ tel que $1 + f(x) \leqslant 1/2$ pour $x \geqslant a$. On intègre alors la dernière égalité et on fait une I.P.P. :

$$\begin{aligned}&\int_a^x (y''(t)y'(t) + (1+f(t))y(t)y'(t))\,\mathrm{d}t \\ &\qquad = \frac{1}{2}[y'(x)^2 - y'(a)^2] + (1+f(x))y(x) - (1+f(a))y(a) - \int_a^x f'(t)y^2(t)\,\mathrm{d}t = 0\end{aligned}$$

d'où, en multipliant par 2, en tenant compte de l'inégalité $1 + f(x) \leqslant 1/2$ et en appelant C la constante indépendante de x (!), on obtient

$$y^2(x) \leqslant C + 2\int_a^x f'(t)y^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant C + 2\int_a^x |f'(t)|y^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

C'est là qu'intervient le lemme de Gronwall :
Soit $\beta \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, si $f \in \mathbb{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ vérifie $f(x) \leqslant K + \displaystyle\int_0^x \beta(t) f(t)\,\mathrm{d}t$ alors $\forall a \geqslant 0$, $\forall x \geqslant a$, $f(x) \leqslant K \exp\left(\displaystyle\int_a^x \beta(t)\,\mathrm{d}t\right)$.
Dém : on étudie la fonction $h(x) = \left(K + \displaystyle\int_a^x \beta(t) f(t)\,\mathrm{d}t\right) \exp\left(-\displaystyle\int_a^x \beta(t)\,\mathrm{d}t\right)$. $h'x) \leqslant 0$ et $h(a) = K$ donc $\forall x \geqslant a$, $h(x) \leqslant K$ qui fournit la majoration attendue.
On utilise ce lemme avec l'inégalité précédente d'où

$$y^2(x) \leqslant 2C \exp\left(\int_a^x 2|f'(t)|\,\mathrm{d}t\right) \leqslant 2C \exp\left(\int_a^{+\infty} 2|f'(t)|\,\mathrm{d}t\right)$$

donc y est bornée.

Solution 3.1.1 (Robin Larrieu) Note :
Commentaires : *?*

Solution 3.1.2 (Timothée Pécatte) Note :
Commentaires :

Solution 3.1.3 (Xavier Bonnetain) Note :
Commentaires :

Solution 3.2.1 (Paul-Guillaume Fournié) Note : 13
Commentaires : *?*

Solution 3.3.1 (Tanguy Marchand) Note :
Commentaires :

Solution 4.1.1 (Clémentine De Potter) Note : 14
Commentaires : *examinateur : paraît assez sympa à l'entrée dans la salle mais après, assez muet ! ! Il met surtout assez longtemps à donner une indication en cas de blocage (et l'impression ne vient pas seulement de moi, un candidat avant moi m'avait dit la même chose !).*
Pour le reconnaître : grand, barbe de trois jours, donnes ses exos sur des petites fiches cartonnées à petits carreaux (style cartons d'invitation).

(1) Il m'a fait redémontrer toutes les démos qui se rattachaient au sujet (je lui ai dit : il serait intéressant de montrer que A et B commutent pour avoir la codiagonalisation. Il me demande alors de lui démontrer ce résultat. Puis comme j'avais utilisé la diagonalisabilité d'un endomorphisme induit par restriction au sep (sachant que l'endo est lui même diagonalisable), il me demande de montrer également ce résultat ! !).
Solution : Il m'a dit de m'inspirer de la racine carrée d'un endomorphisme pour résoudre l'exo (encore une petite démo, démontrez moi l'unicité de la matrice D telle que $D^2 = A$).
En fait, A et B étaient les "racines cubiques" d'une même matrice M. Comme elles commutent avec M, elles se diagonalisent dans la même base que M et par égalité des valeurs propres (qui sont les racines cubiques des vap de M), on obtient le résultat.
Autre solution détaillée :
B se diagonalise sous la forme $B = P\,\mathrm{Diag}(\mu_i)P^{\mathrm{T}}$. Soient $\mu_1, \dots, \mu_p$ les valeurs propres

distinctes de B et Q le polynôme d'interpolation de Lagrange tel que $Q(\mu_i^3) = \mu_i$ pour tout i. On a alors $B = Q(B^3) = Q(A^3)$ donc A et B commutent et sont simultanément diagonalisables.
$\exists R \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tq $A = RD_AR^{-1}$, $B = RD_BR^{-1}$. Or $A^3 = B^3$ entraîne que $D_A^3 = D_B^3$ et, en vertu de l'unicité de la racine cubique, on en déduit que $D_A = D_B$ et donc que $A = B$.

(2) X^2-1 est un polynôme annulateur scindé donc A est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(A) \subset \{-1, 1\}$. Comme $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$ alors $\mathrm{Sp}(A) = \{1\}$. A est diagonalisable et n'a que 1 comme vap donc $A = I_n$.

(3) solution : très moche!! Le but est de pouvoir se ramener à un ensemble de solutions sur lequel $\sin(y)$ ne s'annule pas. On commence par chercher les solutions constantes. Il m'a demandé celle avec condition initiale $y(t_0) = k\pi$ qu'on obtient en utilisant l'unicité de Cauchy Lip : $y(t) = y(t_0)$.
Puis on cherche les solutions non constantes qui n'annulent donc pas le sinus. Pour cela, on intègre $y'/\sin(y) = 1$ (et oui, il faut connaître la primitive classique de $u'/sin(u)$ qui vaut $\ln(\tan(u/2))$!!!) et on fait attention de ne pas se tromper quand on passe à l'arctan (domaine de définition).
Solution détaillée : soit (I, y) une solution maximale de l'équation différentielle.
- S'il existe $t_0 \in I$ tel que $y(t_0) = k\pi$ alors, par unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz, y est la fonction constante égale à $k\pi$ sur $\mathbb{R}$.
- Sinon, $\mathrm{Im}\, y \subset]k\pi, (k+1)\pi[$, $\sin y \neq 0$. On peut alors raisonner par équivalences :

$$\begin{aligned} y' = \sin y &\Leftrightarrow \frac{y'}{\sin y} = 1 \Leftrightarrow \ln|\tan(y/2)| = t - t_0 \\ &\Leftrightarrow \tan(y/2) = \varepsilon\, \mathrm{e}^{t-t_0} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \mid y = 2\varepsilon \operatorname{Arctan}(\mathrm{e}^{t-t_0}) + 2k\pi. \end{aligned}$$

On peut rassembler les résultats obtenus en un seul :

$$y' = \sin y \Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R},\ \exists k \in \mathbb{Z} \mid y = 2 \operatorname{Arctan}(C\, \mathrm{e}^t) + k\pi$$

où k est pair si $C \neq 0$.

Solution 4.1.2 (Florian Thomas-Laglayse) Note : 11
Commentaires : *?*
Solutions de Sylvère Gangloff...

(1) a) $N(A)^2 = \sum_{i,j}(a_{i,j})^2$, on prouve alors facilement que c'est une norme.

b) Inégalité de Cauchy-Schwartz.

c) $N(AB)^2 = \sum_{i,j}(\sum_{k=1}^n a_{i,k}b_{k,j})^2$. $(N(A)N(B))^2 = \sum_{i,j,k,l}(a_{i,j})^2(b_{k,l})^2$, et on bourrine.
Remarque de Florian :
Il est cependant mieux d'écrire : "inégalité de Cauchy-Schwarz" ce qui donne immédiatement le résultat puisque les indices i et j dépendent d'une somme et les indices k et l de l'autre.

d) $N(A) \leqslant ||A||_1$ avec égalité pour les vecteurs de la base canonique et les droites engendrées.
Ensuite pour l'inégalité inverse, c'est Cauchy-Schwartz pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^{n^2}$.
On obtient : $nN(A) \geqslant ||A||_1$. La constante de n est la meilleure possible car on a égalité pour certains vecteurs.

(2) $u+v$ bijectif donc $\mathrm{Rg}(u)+\mathrm{Rg}(v) \geqslant \mathrm{Rg}(u+v) = dim(E)$. Or $\mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Ker}(u)$ donc $\mathrm{Rg}(v) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(u))$ donc $\mathrm{Rg}(u)+\mathrm{Rg}(v) \leqslant \mathrm{Rg}(u)+\dim(\mathrm{Ker}(u)) = \dim(E)$ (Théorème du rang) d'où l'égalité. On a par conséquent $\mathrm{Rg}(v) = \dim(\mathrm{Ker}(u))$, d'où l'égalité : $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(v)$.

Solution 4.1.3 (Alexandre Pizzut) Note : 16

Commentaires : *D'abord l'examinateur : très sympathique, assez âgé.. Laisse chercher quand sent qu'on est sur une bonne piste, demande des précisions quand juge que c'est nécessaire pour vérifier la validité des arguments. Dis rapidement quand une piste n'aboutira pas, pour ne pas faire trop de calculs inutiles... A juste la manie de prendre du retard, apparemment. 10 minutes de préparation.*

(1) $P'(0) \neq 0$, donc 0 est au plus racine simple de P. Il y a donc deux cas à considérer :
  - 0 non racine de P. Alors, on a $P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ avec $a_0 \neq 0$ d'où on montre que u a un inverse à gauche et à droite en écrivant que P est annulateur de u : u inversible, d'où le résultat.
  - 0 racine simple de P, d'ou $P(X) = XQ(X)$ où Q est un polynôme premier avec X. Lemme des noyaux : $E = \operatorname{Ker} P(u) = \operatorname{Ker} u \bigoplus \operatorname{Ker} Q(u)$. Là on se dit que ce serait quand même pas mal que $\operatorname{Ker} Q(u) = \operatorname{Im} u$. Alors on le montre par double inclusion, en utilisant $Q(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ avec $a_0 \neq 0$, ça marche bien et ça termine l'exercice.

(2) Que ceux qui comme moi commencent par tenter de faire apparaître une relation de récurrence, appâtés par le cosinus à la puissance $2n$ s'abstiennent : on n'arrive qu'à montrer que le quotient U_{n+1}/U_n tend vers 1 et même Duhamel ne peut venir à notre secours (enfin à en croire l'examinateur, parce qu'il ne m'a pas laissé terminer les calculs). Il faut procéder à une interversion intégrale et sommation, pour montrer que ça diverge. Il y a (au moins) 2 méthodes :
  - on montre que la somme des $f_n(x)$ converge normalement sur tout segment inclus dans $]0,\pi[$ vers $f(x) = e^{-x}/\sin(x)^2$ qui n'est pas intégrable en 0, puis que la somme partielle des U_n n'est pas majorée.
  - On utilise la contraposée du théorème d'intégration terme à terme. f_n est bien intégrable sur $I =]0,\pi[$, converge vers une fonction f continue sur I , et si on suppose que la somme des U_n converge, alors f est intégrable, et donc par contraposée..

Solution 4.1.4 (Matthieu Loustaunau) Note : 13,5

Commentaires : *examinateur : presque sympa, avait l'air surtout blazé de s'être levé un dimanche matin. Passe son temps sur son ordinateur, en donnant l'impression de ne prêter aucune attention au tableau et de ne jamais vous écouter...*

(1) La blaze totale devant cela, pourquoi s'est-on levé ce matin là ? On se dit qu'avec un karma comme celui-ci, si jamais on se réincarne, ce sera sûrement en un vieil insecte tout crasseux dont l'espérance de vie n'excède pas les 3 heures.

Enfin bref, il me laisse 10 minutes de préparation, comme tout est $2-\pi$ périodique, j'essaie une analyse-synthèse avec Fourier.

Sauf que j'avais mal compris le sujet, je croyais qu'on prenait un ensemble dénombrable quelconque, donc forcément ça marchait pas, je suis donc resté en bug 1-2 minutes avant qu'il ne m'explique de manière presque amicale que je devais déterminer cet ensemble. Forcément après on pouvait aller au bout du raisonnement. Il ne m'a pas laissé le temps de finir la synthèse (on en était à 15-20 minutes là), m'a filé le deuxième exo et s'est barré.

Solution de Sylvère Gangloff.
On pose $\Gamma = \{-\frac{1}{c_n(N)}, n \in \mathbb{Z}/c_{-n}(S) \neq 0 \text{ et } c_n(N) \neq 0\}$. Cet ensemble est clairement dénombrable.
On fait une analyse : On note les $c_n(T)$ les coefficients de Fourier complexes de la fonction T. On obtient en utilisant Dirichlet (Et en justifiant les interversion de sommation bourrines) les relations :

$$c_n(G)(1 + zc_{-n}(N)) = c_n(S).$$

Pour z n'appartenant pas à Γ, cette relations sont possibles et définissent entièrement G.
On fait alors une synthèse : Il faut alors montrer que G peut être définie et qu'elle est de classe C^2 :
Pour tout n on pose : $c_n(G) = \frac{c_n(S)}{(1+zc_{-n}(N))}$. La série des $|c_n(G)|$ converge car la série des $|c_n(S)|$ converge et $c_{-n}(N)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. La série des $c_n(G)\,\mathrm{e}^{inx}$ converge donc normalement, donc on peut définir G, et elle est continue et C^1 par la même occasion. Les calculs effectués pendant l'analyse justifient alors que l'on ait la relation demandée, car comme G est C^1, on peut utiliser Dirichlet à nouveau et bourriner. Reste à montrer que G est C^2 :
Bon là on peut bidouiller quelque chose avec la formule :

$$G(x) = S(x) - z\int_0^{2\Pi} N(x-t)G(t)\,\mathrm{d}t,$$

et là on dérive en utilisant le théorème de dérivation des intégrales à paramètre. On obtient :

$$\begin{aligned} G'(x) &= S'(x) - z\int_0^{2\Pi} N'(x-t)G(t)\,\mathrm{d}t \\ &= S'(x) + z\int_0^{2\Pi} N'(t)G(x-t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

par convolution. Et là on réutilise le théorème de dérivation sous le signe intégral, parce que cette fois on dérive G que l'on sait C^1, d'où le caractère C^2 de G.

(2) Je lui inverse sa matrice de deux manières différentes et ça s'est fini comme ça.
Intervention de Sylvère Gangloff : on dispose de quatre méthodes au moins..
- 1) D'abord on peut écrire l'effet de M sur les vecteurs $e_1 ... e_n$ de la base canonique (on note u l'endo canoniquement associé)
  $u(e_1) = e_1$
  $u(e_2) = e_2 + e_1$
  ...
  $u(e_n) = e_n + e_{n-1}$.
  Ce qui donne :$u^{-1}(e_1) = e_1$, $u^{-1}(e_2) = e_2 - u^{-1}(e_1)$ (en appliquant u^{-1} à la seconde égalité) donc $u^{-1}(e_2) = e_2 - e_1$ en utilisant la première. $u^{-1}(e_3) = e_3 - e_2 + e_1$, etc..
  On obtient donc $M^{-1} = (a_{i,j})$, où $a_{i,j} = 0$ si $i > j$ et $(-1)^{i+j}$ si $i \leqslant j$.
- 2) Ou alors on utilise l'algorithme de calcul de l'inverse à l'aide des matrices de transvection (c'est un peu moins pratique..).
- 3) On utilise l'expression de l'inverse en fonction de la comatrice..
- 4) Ou alors on écrit $M = I_n + N$ (décomposition de Dunford). Dans ce cas on sait que l'inverse s'écrit : $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k N^k$, ce qui donne la même chose, on est content.

J'avoue que c'est pas folichon, mais ça aurait pu être pire!)

Solution 4.1.5 (Tanguy Marchand) Note : 16

Commentaires : *L'oral ne s'est pas très bien passé. Notamment à cause de la question 4 de l'exercice I que je n'ai pas réussi à faire. L'examinateur m'a alors donné le deuxième exercice. La première question est classique (l'examinateur a-t-il appliqué le principe de dichotomie que nous a expliqué M. Gonnord ?), je l'ai vite traité. Il m'a demandé un détail évident que je me suis empressé d'expliquer pour ne pas voir ma note trop descendre. L'oral s'est terminé à la fin de la question 2, que j'ai démontré avec un peu de mal et beaucoup de fautes lors de mes calculs...*

Solution par Sylvère Gangloff.

(1) a) $U_{n+1} \geqslant U_n$ pour tout n donc $U_n \geqslant U_0 > -1$. On en déduit, par récurrence, comme $U_{n+1} = (U_n + 1)U_n$, et que $(U_n + 1) > 0$, que $U_n < 0$ pour tout n.

b) U_n est croissante majorée donc converge, et ceci vers un point fixe de f telle que $f(x) = x + x^2$, donc vers 0.

c) $U_{n+1} - U_n = o(U_n)$ car U_n tend vers 0.

d) On utilise une méthode classique : On considère α réel :

$$\begin{aligned} {U_{n+1}}^{\alpha} &= {U_n}^{\alpha}(1 + U_n)^{\alpha} \\ &= {U_n}^{\alpha} + \alpha {U_n}^{\alpha+1} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}{U_n}^{\alpha+2} + o({U_n}^{\alpha+2}). \end{aligned}$$

On obtient pour $\alpha = -1$, ${U_{n+1}}^{\alpha} - {U_n}^{\alpha} = -1 + o(1)$. Donc en utilisant le théorème de sommation des équivalents, ou alors Césarò, ${U_n}^{-1}$ équivalent à $-n$, d'où le résultat.

Ensuite on a $\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n} + 1 = u_n + o(u_n) = \dfrac{1}{n} + o(1/n)$ et on somme à nouveau :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k}\right) + n \sim -\ln n \Rightarrow \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_0} + n = -\ln n + o(\ln n).$$

En utilisant l'équivalent $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} \sim \ln n$.

Le résultat tombe tout de suite : $u_n = -\dfrac{1}{n} + \dfrac{\ln n}{n^2} + o\left(\dfrac{\ln n}{n^2}\right)$.

Attention ici à la manipulation des équivalents !

PS : Pour la question d) de l'exercice c'est normal, elle n'est pas évidente.. moi en tout cas, j'ai mis pas mal de temps pour faire les calculs..) Ca serait pas très fair de te donner une mauvaise note pour ça !

(2) a) Soit X la matrice de Gramm : $X = M^{\mathrm{T}}M$ où M est la matrice dont les vecteurs colonnes sont les v_i. $\det X = (\det(M))^2 \geqslant 0$.

Cas d'égalité : lorsque $\det(M) = 0$ ie lorsque les vecteurs sont liés.

b) On applique l'inégalité de Hadamard sur M et on se sert de la formule du a).

Solution 4.1.6 (Loïc Tudela) Note : 8

Commentaires :

(1) a) Là il y a une astuce qui permet de faire l'exo en quelques lignes, c'est en écrivant g sous la forme d'une intégrale puis se ramener à $\mathbb{R}^2$ tout entier grâce à un changement de variable. On conclut avec le théorème de continuité sous le signe intégral. En fait f de classe $\mathcal{C}^1$ suffit pour la première question.

b) Pour la deuxième, théorème de dérivation sous le signe intégral grace a la relation obtenue à la question 1. Là, $\mathcal{C}^2$ suffit pour f. Malheureusement, je n'avais pas vu l'astuce de départ, et la question est plus embêtante sans.

Intervention de Tanguy Marchand :
Une autre astuce pour la première question (je me rappelle que Cécile D. l'a eu en colle, et M Gonnord nous en a parlé un jour) :
La continuité ne pose problème que pour $x = y$. Plaçons-nous en (a, a). Dans un voisinage de (a, a), si l'on reste toujours sur la première bissectrice du plan on n'aura pas de problème, sinon en se plaçant en (x, y) et en appliquant le théorème des accroissement finis on peut écrire g comme $f'(c)$ avec $c \in]x, y[$ ce qui permet de conclure grâce à la continuité de f'

(2) On traduit l'hypothèse avec Bézout et on écrit la relation entre le déterminant et la transposée de la comatrice et on obtient le résultat puisque la comatrice a ses coeffs dans $\mathbb{Z}$.

Solution 4.1.7 (Pauline Camus) Note : 13
Commentaires : *Examinateur pas super sympa, ne dit quasiment rien donc ne te met pas vraiment en confiance. On a l'impression qu'il n'a qu'une envie, rentrer chez lui (bon c'est peut-être aussi parce que j'étais la dernière à passer).*

(1) Elements de solution :
   a) Par l'absurde en utilisant la trace.
   b) Par récurrence, après avoir conjecturé que le résultat est nu^{n-1}.
   c) Par l'absurde en utilisant les normes subordonnées.
   1er cas : si u n'est pas nilpotente, on arrive à une absurdité du style "pour tout n, $n \leqslant C$ où C est une constante".
   2ème cas : on montre par l'absurde que u ne peut pas être nilpotente. En effet, soit p le plus petit entier tel que $u^p = 0$ alors d'après 2), $u^{p-1} = 0$.

Solution 4.1.8 (Francisco Vazquez) Note : 17
Commentaires : *Je suis arrivé 20 minutes avant l'heure, l'élève qui précédait l'élève qui me précédait est sorti environ alors, et l'examinateur en a profité pour aller chercher un café. Quand il m'a vu, il m'a dit que ce n'était pas encore mon tour, que je revienne à 10h...10. Il était un peu gros, cheveux un peu grisonnants, et il avait l'accent (russe probablement, peut-être allemand ou danois, il roulait les "r" encore plus que moi). Il était sympa, me laissait quelques minutes pour réfléchir (ou aller prendre un autre café), et donnait des indications quand je n'allait pas dans la bonne direction.*
Autre détail : je confirme ce que dit Paul Guillaume, le campus des Ponts est très mal indiqué, ce n'est pas facile de l'atteindre, et une fois là-bas, il faut encore trouver quelqu'un qui te dise où est-ce que tu passes ton oral, puis trouver la salle (pour ce qui n'y sont pas encore allés, ré-imprimez vos convocations, il devrait y avoir les salles maintenant). Si vous n'êtes pas à la résidence, arrivez-y en avance (c'est facile à retenir comme conseil, ça rime) !

(1) a) C'est le classique, mais j'ai eu un problème avec sa notation qui m'a fait perdre une grosse partie de la préparation, j'ai cru pendant un moment qu'il voulait que je le démontre pour une matrice symétrique à coefficients positifs, ce qui changeait tout. On donne B (même matrice de passage que A, de valeurs propres ses racines carrées) pour démontrer l'existence, puis on travaille sur les sous-espaces propres et les valeurs propres (B doit être positive) pour démontrer l'unicité.
   b) J'ai bidouillé un moment la définition du polynôme P sans arriver nulle part, et quand il est revenu de sa pause café, il m'a recommandé d'essayer d'abord avec A diagonal. C'est là que j'ai pensé au polynôme d'interpolation de Lagrange. Il faut prendre P tel que $P(\lambda_i) = \sqrt{(}\lambda_i)$, on obtient ainsi notre polynôme.

(2) a) J'ai reconnu les racines complexes du dénominateur ($\exp(i\theta)$ et $\exp(-i\theta)$), j'ai pris mon courage à deux mains et, en prenant $||x|| < 1$, j'ai fait le produit de Cauchy des DSE des deux termes du dénominateur, pour obtenir un résultat presque juste. Il m'a dit que ça aurait été probablement plus simple en décomposant en éléments simples, a regardé ce que j'avais écrit pour trouver l'erreur, puis en a eu logiquement marre, a barré le terme que j'avais en trop en disant que ce n'était pas important, et m'a dit de passer à la suite.

Le résultat était $1 + 2\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \cos(k\theta).x^k$.

On peut aussi procéder par analyse-synthèse :

Analyse : si $f(x) = \dfrac{1-x^2}{1-2x\cos\theta + x^2}$ est D.S.E. alors

$$\begin{aligned}1 - x^2 &= (1-2x\cos\theta + x^2)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= a_0 + (a_1 - 2a_0\cos\theta)x + \sum_{n=2}^{+\infty}(a_n - 2a_{n-1}\cos\theta + a_{n-2})x^n\end{aligned}$$

d'où, en identifiant, $a_0 = 1$, $a_1 = 2\cos\theta$, $a_2 = 4\cos^2\theta - 2 = 2\cos(2\theta)$ et, en résolvant la récurrence, $a_n = 2\cos(n\theta)$.

Synthèse : la série obtenue a un rayon de convergence $R \geqslant 1$ et vérifie bien la relation...

b) Là j'ai écrit pas mal de formules dans tous les sens, pendant que l'examinateur me répétait périodiquement "il y a marqué en déduire", fine indirecte pour m'indiquer que c'était pas ce que j'essayais de faire, et j'ai quand même fini par me dire que je pouvais peut-être trouver x pour pouvoir réutiliser la formule trouvée à la question précédente, soit $2x/(1+x^2) = 1/2$ (pour préserver les proportions des coefficients au dénominateur). On trouve deux valeurs, on prend celle qui vérifie $|x| < 1$ (soit "$2-\sqrt(3)$"), et on a donc le résultat en réutilisant le 1, et en divisant par $1-x^2$ (le numérateur).

Sauf que ma jolie égalité entre $g(x)$ et une fonction de la forme "$\sum\cos(n\theta).a_n$" n'était pas suffisante, parce que le terme de droite n'était pas nécessairement une série de Fourier, il voulait que je lui sorte la convergence uniforme de ma somme. Je dois reconnaître que je n'ai pas encore compris qu'est-ce qu'il voulait exactement.

On trouve $g(\theta) = \dfrac{4-2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-3}\left(1 + 2\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(2-\sqrt{3})^n\cos(n\theta)\right)$ et on a convergence normale de la série.

Commentaires de Sylvère Gangloff :

Quand on parle de série de Fourier, il s'agit d'une série de fonctions du type $\sum \mathrm{e}^{inx}\, a_n$ où il existe une fonction f telle que $a_n = \int_0^{2\Pi} f(t)e^{-int}dt$ pour tout n, ce qui est faux par exemple si on prend $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, la série harmonique diverge, donc cette suite ne peut pas vérifier la condition précédente (par l'absurde, via Parseval). Pourtant la série des $a_n\cos(nx), n \geqslant 1$ converge pour tout x tq x ne congrue pas à 0 modulo π : En effet, il suffit de montrer que $\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}cos((2n+1)x)$ converge, et que $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{\sqrt{2n}}\cos(2nx)$ de même. Pour la seconde par exemple,

$$\sum_{n\geqslant 1}^{N}\frac{1}{\sqrt{2n}}\cos(2nx) = \mathrm{Re}(\sum_{n\geqslant 1}^{N}\frac{1}{\sqrt{2n}}\mathrm{e}^{2inx}).$$

On fait alors une transfo d'Abel sur cette somme : On pose $A_N(x) = \sum_{n\geqslant 1}^N e^{2inx}$.
On a alors :

$$\sum_{n\geqslant 1}^{N} \frac{1}{\sqrt{2n}} e^{2inx} = \frac{A_N(x)}{2N} + \sum_{n\geqslant 1}^{N-1} \frac{A_n(x)}{2n(n+1)}.$$

Or $A_N(x)$ est bornée, on déduit la convergence.
En conclusion, le développement $\sum_{n\geqslant 1} a_n cos(nx)$ existe mais ce n'est pas un DSF. Bon ici le développement est défini sauf sur un ensemble dénombrable, peut être qu'on peut en obtenir un bon DSF défini partout en introduisant une alternance de signes supplémentaire dans chacune des deux sous suites paire et impaire. (Mais là j'ai un peu la flemme d'essayer..)
Ici, il te suffit d'intégrer $g(t)\cos(nt)$ entre 0 et 2Π. La convergence uniforme sur ce segment te permet d'intervertir les sommations bourrinement, te donnant $a_n = \displaystyle\int_0^{2\pi} g(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t$, donc ce développement est bien un DSF.

Solution 4.1.9 (Sacha Drevet) Note : 18
Commentaires : *l'examinateur n'était pas muet du tout. L'examinateur aide quand on est presque au résultat et dit lorsque l'on est sur la bonne piste. Pour l'exercice d'Algèbre, il ma demandé la démonstration du résultat : $AB = BA$ et A, B diagonalisables entraîne A et B codiagonalisables.*

(1) C'est du calcul. L'équation de la tangente D en (x_0,y_0) est $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$ avec $a > b > 0$. $F(c,0)$, $F'(-c,0)$ sont les foyers avec $c = \sqrt{a^2-b^2}$.
On utilise la formule de la distance à une droite, on note F l'un des 2 foyers.

$$\mathrm{d}(F,D) = \frac{|\varepsilon c x_0/a^2 - 1|}{\sqrt{x_0^2/a^4 + y_0^2/b^4}}$$

et donc, le produit des distances vaut $\dfrac{y_0^2/b^2 + b^2x_0^2/a^4}{x_0^2/a^4 + y_0^2/b^4} = b^2$.

(2) a) Passer par exemple en polaire : $g(r,\theta) = A(r).\,\mathrm{e}^{k\theta}$, ensuite on utilise par exemple la formule $\theta = \mathrm{Arctan}(\frac{y}{x})$ puisque l'on est sur D.
b) Là on ne peut plus poser $\theta = \mathrm{Arctan}(\frac{y}{x})$, ni $\theta = 2\,\mathrm{Arctan}(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}})$, car problème de continuité en $\theta = \pi$. S'il y a une solution, sur le plan privé de $\mathbb{R}^-$ alors elle a la forme précédente. On exprime la continuité en $\theta = \pi$ et cela nous donne la solution nulle.

(3) a) On a $A^{-1} = I_n$, A dans G.
$ABAB = I_n \Rightarrow AB = BA$ et $A^2 = I_n$ donne que toutes les matrices sont diagonalisables (annule polynôme scindé simple) et 2 à deux à deux codiagonalisables. On peut montrer qu'elles sont toutes diagonalisables dans une même base.
C'est l'exercice 2.3.15 de la feuille d'exo sur la réduction des endomorphismes. Je recopie la solution :
On procède par récurrence sur n et on raisonne sur les endomorphismes. Soit $P(n)$ la propriété :

Pour tout espace vectoriel E de dimension $\leqslant n$, pour toute partie non vide U de $\mathcal{L}(E)$ commutant 2 à 2 et diagonalisables, il existe une base de E formée de vecteurs propres communs à tous les f de U.

– $P(1)$ est immédiate car toutes les bases conviennent.
– $P(n) \Rightarrow P(n+1)$: on distingue 2 cas

(i) U ne contient que des homothéties et dans ce cas $P(n+1)$ est vraie,

(ii) il existe $f \in U$ qui n'est pas une homothétie. On sait alors que $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_p(f)$

où les $E_p(f)$ désignent les sous-espaces propres de f.
On sait alors que $\forall g \in U,\ g(E_p(f)) \subset E_p(f)$ et $\dim E_p(f) \leqslant n$. On peut appliquer alors l'hypothèse de récurrence à tous les espaces $E_p(f)$ en prenant pour U_p la restriction de toutes les applications de U à $E_p(f)$. Les applications de U_p permutent et sont toutes diagonalisables.
On prend une base dans chaque $E_p(f)$ formée de vecteurs propres communs à tous les éléments de U_p. On construit ainsi une base de E répondant à la question.

b) $A^2 = I_n$ donne des vap égales à ± 1 or du fait de (a), on a un nombre fini de matrices dans G.

c) On fait de G, ou la loi rond est notée $+$, un $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ espace vectoriel donc le cardinal de G est sous la forme 2^r.

(4) Soit $\varphi(AB) = \mathrm{Tr}(f(AB))$ alors $\varphi(AB) = \varphi(BA)$. En effet

$$\mathrm{Tr}(f(AB)) = \mathrm{Tr}(f(A)f(B)) = \mathrm{Tr}(f(B)f(A)) = \mathrm{Tr}(f(BA)).$$

Si φ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifie $\varphi(AB) = \varphi(BA)$ alors $\varphi = \lambda\,\mathrm{Tr}$:
Il suffit de remarquer que $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$ ce qui donne

– $i \neq j$: $\varphi(E_{ij}) = \varphi(E_{ij}E_{jj}) = \varphi(E_{jj}E_{ij}) = 0$.
– $i = j$: E_{ii} est semblable à E_{11} donc $\varphi(E_{ii}) = \varphi(E_{11})$ que l'on pose égal à λ.

On a donc $\mathrm{Tr} \circ f = \lambda\,\mathrm{Tr}$.
Il reste à montrer que $\lambda = 1$.

On a $f(I_n)^2 = f(I_n)$ donc $f(I_n)$ est un projecteur, de même pour $f(E_{11})^2 = f(E_{11})$. On en déduit que

$$\mathrm{Tr}(f(I_n)) = \lambda n = \mathrm{Rg}(f(I_n)) \text{ et } \mathrm{Tr}(f(E_{11})) = \lambda = \mathrm{Rg}(f(E_{11})).$$

Si $\lambda = 0$ alors $\mathrm{Rg}(f(I_n) = 0$ et $f(I_n)$ est un projecteur donc $f(I_n) = 0$. Or $f(A) = f(AI_n) = f(A)f(I_n) = 0$, f serait l'application nulle, ce qui est écarté.
On a donc $\lambda = \mathrm{Rg}(f(E_{11})) \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda n = \mathrm{Rg}(f(I_n)) \leqslant n$ donc $\lambda = 1$.

Solution 4.1.10 (Cécile Defforge) Note : 14,5
Commentaires : *examinateur : salle B203 (sur la porte un mot indique que les calculatrices sont interdites, qu'il faut préparer une pièce d'identité avant d'entrer et que l'on dispose de 10 minutes de préparation).*
J'ai donc effectivement eu 10 min de préparation. Ensuite l'examinateur laisse exposer la solution, intervient pour demander des précisions ou donner des indications.

(1) C'est une EDLH2 donc Cauchy-Lipschitz nous assure l'existence d'une solution de classe $\mathbb{C}^2$.
Soit f une solution non nulle. Supposons que f s'annule au moins 2 fois et notons x_1 et x_2 deux zéros consécutifs. f est donc de signe constant sur $[x_1, x_2]$, supposons donc qu'elle est positive sans restreindre la généralité du problème.
On a donc pour tout x : $f''(x) = -q(x)y(x) \geqslant 0$: f est de classe $\mathcal{C}^2$ et sa dérivée seconde est positive, elle est donc convexe. Par conséquent elle est majorée par ses cordes et donc par la droite d'équation $y = 0$ qui est la corde joignant x_1 et x_2. Donc f est négative : contradiction.
Comme suite à l'exercice, on peut montrer que si f est solution et bornée, alors f est nulle quand q est non nulle (d'après Sylvère Gangloff).

(2) a) C'est du cours de sup : on dit que $E = \mathrm{Vect}\, u + H$ (somme directe orthogonale), on décompose tout vecteur $x = au + p(x)$ où p est le projecteur orthogonal sur H. En calculant $< x, u >= a||u||^2$ et en faisant un joli dessin on a l'égalité attendue.

b) Notons $v = g \circ s \circ g^{-1}$ et montrons que $v^2 = \mathrm{Id}$ puis que $\mathrm{Ker}(v - Id) = [\mathrm{Ker}(v + Id)]^{\perp}$ et surtout que $\mathrm{Ker}(v - \mathrm{Id})$ est bien un hyperplan.
Pour montrer que $v^2 = \mathrm{Id}$ on écrit ce que ca vaut et puis ca marche bien car $s^2 = \mathrm{Id}$.
Ensuite le plus rapide est de déterminer $\mathrm{Ker}(v - Id)$. On a $v(x) = x$ ssi $s(g^{-1}(x)) = g^{-1}(x)$ ssi $g^{-1}(x) \in H$ ssi $x \in g(H)$. Or g est une isométrie donc conserve les dimensions : $\mathrm{Ker}(v - \mathrm{Id})$ est bien un hyperplan.
Comme v est une symétrie vectorielle elle est diagonalisable donc ses sep sont en somme directe. Il ne nous reste plus qu'à montrer que cette somme est orthogonale.
Soit $(x, y) \in \mathrm{Ker}(v - \mathrm{Id}) \times \mathrm{Ker}(v + \mathrm{Id})$ fixés quelconques. $< x, y >=< v(x), -v(y) >= - < x, y >$ car les isométries conservent le produit scalaire. D'où $< x, y >= 0$; on a bien l'orthogonalité.
Donc v est une réflexion d'hyperplan l'image de H par g.

c) Avec l'expression obtenue à la question 1, on note s et s' les réflexions d'hyperplans H et H' et u et v des vecteurs unitaires dirigeant les droites vectorielles orthogonales à H et H'. Si H et H' ne sont pas confondus il s'agit et fait de montrer que s et s' commutent ssi u et v sont orthogonaux.
Calculons $s(s'(x)) = s(x - 2 < x, v > v) = x - 2 < x, v > v - 2 < x, u > u + 4 < x, v >< v, u > u$.
En échangeant formellement u et v on a $s'(s(x)) = x - 2 < x, v > v - 2 < x, u > u + 4 < x, u >< v, u > v$. Donc $s \circ s' = s' \circ s \Leftrightarrow < u, v > (< x, v > u - < x, u > v) = 0$ on peut choisir x qui ne soit pas orthogonal à u et v simultanément et comme H et

H' sont distincts u et v ne sont pas colinéaires donc $< u, v >= 0$.
Réciproquement, si $< u, v >= 0$ on a bien $s \circ s' = s' \circ s$.

Solution 4.1.11 (Laurent Anadon) Note : 13
Commentaires : *Examinateur assez sympathique n'hésite pas à se lever pour venir discuter au tableau mais donne TROP d'indications c'est à peine si on a le temps de réfléchir par soi-même.*
Solution par Sylvère Gangloff.

(1) a) $P(f) = \sum_{q=1}^{n} P(q)p_q$ pour tout polynôme P divisible par X de degré inférieur ou égal à $n+1$. Pour $P = X(X-1)...(X-n)$, on a donc $P(f) = 0$ et P est scindé à racines simples, donc f est diagonalisable.

b) Ça, ça sent les polynômes interpolateurs !
On prend la famille des polynômes interpolateurs L_j de Lagrange associés aux réels $1, .., n$. On a alors $XL_j(f) = jp_j$. Or $L_j = \frac{\prod_{i\neq j}(X-i)}{\prod_{i\neq j}(j-i)}$ donc $p_j = \frac{1}{j}\frac{\prod_{k\neq j}(f-k\,\mathrm{Id})}{\prod_{k\neq j}(j-k)}$ On en déduit que p_j est le produit de l'homothétie de rapport $\frac{1}{j}$ et du projecteur sur $\mathrm{Ker}(f - j\,\mathrm{Id})$ parallèlement à $\bigoplus_{j\neq k} \mathrm{Ker}(f - k\,\mathrm{Id})$.

(2) On utilise la formule : $\mathrm{d}f_x(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+hx)-f(x)}{h}$. Donc $\mathrm{d}f_x(x) = g'(1)f(x)$ où $g(x) = x^\alpha$ d'après l'homogénéité de f, donc $\mathrm{d}f_x(x) = \alpha f(x)$.
Réciproquement, si $\mathrm{d}f_x(x) = \alpha f(x)$ pour tout x, on introduit la fonction qui à t associe $f(tx_1, .., tx_n)$, où on a fixé les x_j par avance. Évidemment on va dériver par rapport à t ! : $g'(t) = \alpha g(t)$, donc $g(t) = t^\alpha g(1)$, qui donne la réciproque.

Solution 4.1.12 (Xavier Bonnetain) Note : 16
Commentaires : *examinateur froid, aide peu, mais il faut dire que ça volait pas particulièrement haut*

(1) Le premier exo est une grosse blague, niveau terminale. On réécrit l'équation de (S) :

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 3^2$$

qui est l'équation d'une sphère de centre $\Omega(1, 2, 3)$ et de rayon 3.
$\mathrm{d}(\Omega, P) = 2 < 3$ donc l'intersection des un cercle de centre $\Omega'(7/3, 8/3, 5/3)$ et de rayon $\sqrt{5}$.

(2) Pour le second, on montre que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{l^k}{k} = 1$, avec l la limite (qui existe par monotonie).

a) On étudie la fonction $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$ sur $[0, 1]$, $f_n'(x) > 0$ d'où

x	0		x_k	1
$f'(x)$		$+$		
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	s_n

où $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant 1$, ce qui fournit directement l'existence et l'unicité de x_n.

b) On a $f_{n+1}(x_n) = f_n(x_n) + \frac{x_n^{n+1}}{n+1} > 0$ donc, en vertu du tableau de variation, on en déduit directement que $x_n > x_{n+1}$. La suite (x_n) est strictement décroissante, minorée par 0, elle est donc convergente.
On remarque que $x_2 < 1$ et sur $[0, x_2]$ la suite (f_n) converge uniformément donc

$f_n(x_n) \to f(l)$ avec $f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$.
Conclusion : $-\ln(1-l) = 1$ soit $l = 1 - 1/\mathrm{e}$.

Solution 4.1.13 (Louis Massonnet) Note : 11
Commentaires : *Salle B321, examinateur à l'air sympathique (décidément j'ai eu que des examinateurs sympa !) 10min de préparation 1h de passage.*
Pas passionnants ces exos mais bon. Je me suis embrouillé dans la question de cours...
je suis un peu fatigué pour rédiger les solutions, qui ne sont pas très compliquées, je donne des pistes :

(1) a) $]0,1[$.
  b) Attention à distinguer le cas $t > 1$ et $t < 1$, puis domination locale pour x dans $[a,b]$.
  c) Séparer l'intégrale sur $]0,1]$ et $[1,+\infty[$ puis chgt de var $u = 1/t$ dans la 1ere.
  d) Étude fonctionnelle avec la forme précédente.
  e) Regarder l'intégrale de 0 à 1, $1+t < 2$ donc on peut minorer l'int par une quantité qui tend vers ∞ qd x tend vers 0.
  f) Il m'a coupé pour faire l'algèbre

(2) Division euclidienne des A^p par le poly annulateur.
$\exp A = (e/4 - 1/4e)A^2 + (e/2 - 1/2e)A + (e/4 - 1/4e)I$ ou un truc du genre.

(3) Cf.cours.

(4) règle de la chaîne.

Solution 4.1.14 (Thomas Gaudelet) Note : 8
Commentaires : *examinateur sympathique bien que silencieux, donne des indications si tu bloques longtemps (sur le deuxième exo...). Il m'a proposé de commencer 40 minutes en avance, vu que j'attendais depuis la fin du français à 11h ça tombait bien.*

Solution 4.1.15 (Robin Larrieu) Note : 18
Commentaires : *examinateur : la cinquantaine, presque chauve, des lunettes. Environ 10 min de préparation. Essaie de t'aider si tu en as besoin sans te faire l'exo. L'exo n'était pas très difficile mais à un moment je me suis embrouillé. Heureusement je me suis rattrapé (enfin je pense) sur les deux autres exos.*

(1) f linéaire OK (j'aurais pu me contenter de dire par linéarité de la trace, mais j'ai voulu détailler un peu plus).
Comme je suis généreux, je vous donne deux méthodes pour la suite :
Pendant la préparation, je passe par les matrices. On se place dans la base des $E_{i,j}$, b.o.n pour le produit scalaire $\mathrm{Tr}(A^{\mathrm{T}}.B)$.
On a $f(E_{i,j}) = \delta_{i,j}.I_n + E_{i,j}$. Donc
$$\begin{array}{rcl} Tr(f) & = & \sum (E_{i,j}, f(E_{i,j})) \\ & = & \sum \mathrm{Tr}(\delta_{i,j}.E_{j,i} + E_{j,j}) \\ & = & \sum (1+\delta_{i,j}) \\ & = & n^2 + n \end{array}.$$
Ensuite, en numérotant la base intelligemment, (les $E_{i,i}$ d'abord, puis les autres), comme $I_n = E_{1,1} + E_{2,2} + \cdots + E_{n,n}$, on a

$Mat(f) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_{n^2-n} \end{pmatrix}$ où $A = \begin{pmatrix} 2 & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 2 \end{pmatrix}$ (de taille n).

Alors $\det(f) = \det(A) = (n+1).\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & & 1 \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & 1 & & 2 \end{vmatrix}$ (on somme toutes les colonnes dans la première et on factorise $n+1$).

$\det(f) = (n+1).\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \end{vmatrix}$ $(L_i \leftarrow L_i - L_1)$.

D'où $\det(f) = n+1$.
Mais pendant le passage, je me suis mélangé, je n'ai pas fait la même chose et je n'ai pas réussi à obtenir la matrice, alors il m'a conseillé de passer par les valeurs propres pour obtenir trace et déterminant en même temps. $f(M) = \lambda M$ ssi $(\lambda - 1).M = \mathrm{Tr}(M).I_n$.
1er cas : $\lambda = 1$ équivalent à $\mathrm{Tr}(M) = 0$ donc l'espace propre associé est de dimension $n^2 - 1$ (noyau d'une forme linéaire).
2ème cas : $\lambda \neq 1$. Alors $M \in Vect(I_n)$ et $\lambda = n+1$. On a donc pour valeurs propres $n+1$ de multiplicité 1 et 1 de multiplicité n^2-n d'où $\mathrm{Tr}(M) = 1\times(n^2-n)+(n+1)\times 1 = n^2+1$ et $\det(M) = n+1$.

(2) On devine que ce sont les fonctions constantes et on raisonne par l'absurde si $f(a) \neq f(b)$ (avec $a < b$).
Alors la corde (a, b) est de pente non nulle. Il suffit alors de prouver qu'à l'extérieur du segment $[a, b]$, f est au dessus de cette corde (on s'en convainc facilement avec un dessin) pour obtenir une contradiction en faisant tendre x vers plus ou moins l'infini suivant le signe de cette pente.
On veut donc montrer que si $x > b$ ou si $x < a$, on a $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a) \leqslant f(x)$. Par exemple si $x > b$, en appliquant la définition de la convexité de f entre a et x avec $b = \frac{x-b}{x-a}a + \frac{b-a}{x-a}x$, on obtient $(x-a)f(b) \leqslant (x-b)f(a) + (b-a)f(x)$ d'où $(x-a)(f(b)-f(a)) + (b-a)f(a) \leqslant (b-a)f(x)$, i.e ce qu'on voulait prouver.
Au début, il était moyennement convaincu par cette méthode, puis quand il s'est apercu qu'elle marchait, elle a eu l'air de lui plaire (il la trouvait assez élégante).

(3) Il m'avait précisé que c'était un exo d'arithmétique donc on pense à la décomposition en facteurs premiers. On cherche $a \in [|1; n-1|]$ tel qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ vérifiant n divise a^p. En écrivant $a = 2^{\alpha_1}.3^{\alpha_2}.\dots.p_k^{\alpha_k}$ et $n = 2^{\beta_1}.3^{\beta_2}.\dots.p_k^{\beta_k}$, on doit avoir $\beta_i \leqslant p.\alpha_i$ donc si $\beta_i \neq 0$, α_i doit être non nul.
Autrement dit, si $n = p_1^{\nu_1}.p_2^{\nu_2}.\dots.p_k^{\nu_k}$ avec les ν_i tous non nuls, a doit être un multiple de $p_1.p_2.\dots.p_k$. 0 est alors le seul élément nilpotent ssi $n = p_1.p_2.\dots.p_k$, i.e. aucun ν_i n'est supérieur ou égal à 2. Il me dit qu'on parle alors de quadratfrei ou quelque chose comme ça, car il n'y a pas de carré (quadratfrei en allemand = sans carré).

Solution 4.1.16 (Jonathan Lardy) Note : 17
Commentaires : *Examinateur sympathique, pas chiant sur la rédaction.*

(1) a) Théorème de Lagrange appliqué à $\mathrm{Gr}(x)$, rien à dire.
b) Encore théorème de Lagrange. Le coté fini est légèrement évident, reste monogène... Si $H = \{e\}$ c'est réglé, sinon considérer $h = \min\{k > 0 \mid a^k \in H\}$, a désignant le générateur de G, un coup de division euclidienne et le tour est joué.

c) Bon vu qu'on nous donne la forme du groupe, l'unicité est immédiate. Pour l'existence, on a bien là un groupe, le seul problème c'est son cardinal, question qu'on règle rapidement avec b) et des critères de divisibilité.

d) On réalise une partition des sous-groupes de G avec c), et l'égalité demandée est alors immédiate.

(2) Le maximum est réalisé en $\sigma = \mathrm{Id}$ et vaut donc

$$f(\mathrm{Id}) = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(c'est immédiat avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz).
Pour le minimum, on pose $\delta(k) = n + 1 - \sigma(k)$ alors

$$f(\sigma) + f(\delta) = (n+1)\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)^2}{2}.$$

donc $f(\sigma)$ est à son minimum lorsque $f(\delta)$ est à son maximum, donc lorsque $\delta = \mathrm{Id}$, soit $\sigma(k) = n + 1 - k$, et le minimum vaut donc $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

(3) Une récurrence triviale montre que les f_n sont positives, continues et croissantes sur $[0, 1]$. On montre ensuite par récurrence (encore) que (par exemple) $f_n(x) \leqslant x^n/n!$. En effet c'est vrai pour $n = 0$ (sans blague), et si on le suppose vrai pour $n > 0$, $f_{n+1}(x) \leqslant \int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$ car (f_n croissante) et $t - t^2 < t$ sur $[0, 1]$. Donc $f_{n+1}(x) \leqslant x^(n + 1)/(n + 1)!$ et le tour est joué, car alors $\|f_n\|_\infty \leqslant 1/n!$, donc la série des f_n converge normalement sur $[0, 1]$.

(4) Je n'avais plus beaucoup de temps là, alors j'ai traité assez rapidement le cas où f est positive : on réalise une I.P.P.

$$\int_x^1 tf'(t)\,\mathrm{d}t = [tf(t)]_x^1 - \int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t = f(1) - xf(x) - \int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$
$$\leqslant f(1) - \int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Donc $0 \leqslant \displaystyle\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(1) - \int_x^1 tf'(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(1) + \int_0^1 t|f'(t)|\,\mathrm{d}t$.
D'où on conclut que f est intégrable sur $]0, 1]$.

Solution 4.1.17 (Odile Maliet) Note : 12
Commentaires :
Solution par Sylvère Gangloff.

(1) Convergence dominée : u_n tend vers 0.

La série diverge. On prend $\eta \in]0, \frac{\pi}{4}[$. On considère alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \int_\eta^{\frac{\pi}{2}-\eta} (\cos(\frac{\pi}{2}\sin(t))^k\,\mathrm{d}t$.

On montre alors que ceci est plus grand que $M > 0$ quelconque pour η et n arbitrairement petit/grand. (Comme l'intégrande est positive, $\sum_{k=0}^{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(\frac{\pi}{2}\sin(t))^k\,\mathrm{d}t \geqslant$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \int_\eta^{\frac{\pi}{2}-\eta} (\cos(\frac{\pi}{2}\sin(t))^k\,\mathrm{d}t$.

A η fixé, ceci tend vers $\displaystyle\int_\eta^{\frac{\pi}{2}-\eta} \frac{1}{1 - \cos(\frac{\pi}{2}\sin(t))}\,\mathrm{d}t > 0$.

Donc pour n suffisamment grand, $\sum_{k=0}^{n} \int_{\eta}^{\frac{\pi}{2}-\eta} (\cos(\frac{\pi}{2}\sin(t))^k \,\mathrm{d}t \geqslant \frac{\int_{\eta}^{\frac{\pi}{2}-\eta} \frac{1}{1-\cos(\frac{\pi}{2}\sin(t))}\,\mathrm{d}t}{2}$.
Or l'intégrale de $\frac{1}{1-\cos(\frac{\pi}{2}\sin(t))}$ diverge sur l'intervalle considéré (raisonner par équivalents) donc pour η suffisamment petit, $\frac{\int_{\eta}^{\frac{\pi}{2}-\eta} \frac{1}{1-\cos(\frac{\pi}{2}\sin(t))}\,\mathrm{d}t}{2} \geqslant M$, ce qui achève la démonstration.

(2) Les valeurs propres de $P(A)$ sont exactement les $P(\lambda)$ où λ valeur propre de A. Pour que $P(A)$ soit nilpotente, il faut et suffit que P s'annule en toute les valeurs propres de A, E est donc l'idéal engendré par $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} (X-\lambda)$.

Solution 4.1.18 (François Dussaud) Note : 9
Commentaires :
Solution par Sylvère Gangloff.

(1) Pas intéressant.
Comme F est définie sur $\mathbb{R}^2$, si F passe par un extremum alors celui-ci correspond à un point critique. On a $\dfrac{\partial F}{\partial X} = 4X^3 - 4(X-Y)$ et $\dfrac{\partial F}{\partial Y} = 4Y^3 + 4(X-Y)$ d'où les seuls extrema de F sont obtenus lorsque $X = -Y$ (on fait la somme des 2 égalités) et $4X^3 - 8X = 0$ (on remplace Y en fonction d'X).
Les seuls points correspondant sont donc $(0,0)$ et $\pm(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.
- $(0,0)$ n'est ni un maximum ni un minimum car $F(0,0) = 0$ et, pour $X \neq 0$, $F(X,X) = 2X^4 > 0$, $F(X,-X) = 2X^4 - 8X^2 = -2X^2(4-X^2)$ qui est < 0 pour $0 < X^2 < 4$.
- $M = \pm(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ est un minimum car $F(M) = -8$ et
$$F(X,Y) = (X^2-2)^2 + (Y^2-2)^2 + 2(X+Y)^2 - 8 \geqslant 8.$$

(2) $\Rightarrow$ est immédiat : $A = PDP^{-1} \Rightarrow A^p = PD^pP^{-1}$.
$\Leftarrow$: si A^p diagonalisable, on peut trouver un polynôme scindé à racines simples $P = \displaystyle\prod_{i=1}^{k}(X-\lambda_i)$ qui annule A^p, donc $P(X^p) = \displaystyle\prod_{i=1}^{k}(X^p-\lambda_i)$ annule A, et il est scindé à racines simples, car on a pris A régulière.

Solution 4.1.19 (Cécile Carcy) Note : 6
Commentaires : *bon c'était pas très dur (!!) mais j'ai fait toutes les erreurs de calcul possible (du style dériver f et oublier de marquer le ' sur le tableau...) donc bon je pense que ca a un peu énervé l'examinatrice à force. Et oui c'est ça de commencer à 8h du mat', alors qu'on est en vac depuis longtemps !!!*
Solution par Sylvère Gangloff.

(1) Voir Maths I, X 2006 et un très vieux problème de Centrale (années 1960...).
On remarque, par une récurrence immédiate, que les fonctions vérifiant cette équation fonctionnelle sont de classe $\mathcal{C}^\infty$.

a) – $c = 1$: on a l'équation différentielle $f' = f$ qui se résout en $f(x) = \lambda\,\mathrm{e}^x$.
– $c = -1$: on dérive la relation et on obtient l'équation différentielle $f'' = -f$. Les solutions sont donc de la forme $\lambda \cos x + \mu \sin x$. Si on impose alors la condition $f'(x) = f(-x)$ on trouve $\lambda = \mu$.
Réciproquement, les fonctions $f(x) = \lambda(\cos x + \sin x)$ vérifient la condition.

b) Analyse : si f est D.S.E., $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ alors on obtient la relation de récurrence $na_n = c^{n-1}a_{n-1}$ soit $a_n = \dfrac{c^{n(n-1)/2}}{n!}a_n$. Comme $|c| \leqslant 1$ le rayon de convergence de cette série est infini.

Synthèse : $f(x) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c^{n(n-1)/2}}{n!} x^n$ convient...

c) $f_c(x) = \lambda(1+x) + \lambda \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{c^{n(n-1)/2}}{n!} x^n$.

Sur $[-A, A]$, $\left|\frac{c^{n(n-1)/2}}{n!} x^n\right| \leqslant \frac{|c|^{n(n-1)/2}}{n!} A^n$ qui est le terme d'une série entière de rayon de convergence 1 donc $f_c \xrightarrow[{[-A,A]}]{C.U.} f$ où $f(x) = \lambda(1+x)$.

(2) On pose u_n le déterminant de cette matrice (notée M_n) de taille n. On utilise la linéarité du déterminant par rapport à la première colonne, et on obtient la relation de récurrence : $u_n = a^n + bu_{n-1}$, ce qui donne $u_n = a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + ... + b^n$.
  - Si a et b sont distincts, $u_n = \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$.
    - Si n est impair alors $u_n \neq 0$ et le rang de M_n est égal à n. De même si n est pair et $a + b \neq 0$.
    - Si n est pair et $a = -b$, $u_n = 0$. Le rang de M_n est $\leqslant n - 1$. Si on prend la matrice M_{n-1} extraite en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne, on sait, résultat précédent, que $\mathrm{Rg}(M_{n-1}) = n - 1$ donc $\mathrm{Rg}(M_n) \geqslant n - 1$ ce qui donne en conclusion : $\mathrm{Rg}(M_n) = n - 1$.
  - Si $a = b$, alors $u_n = (n + 1)a^n$.
    - Si $a = b$ non nul, le rang de M_n est n.
    - Si $a = b = 0$, le rang de M_n est 0.

Solution 4.1.20 (Benjamin Bonrepaux) Note : 4

Commentaires :

(1) Désolé, mais même sous la torture, je ne donnerai pas la correction. Dieu sait que je n'ai pas peur de me salir les mains mais là... C'est vraiment lourd, il y a des valeurs absolues, des $\mathrm{Arccos}(\cos x)$ qui ne se simplifie pas bien, il faut faire des changements de variables pour ne pas se lancer dans des développement asymptotique (ce que j'ai fait...), sans compter les erreurs de calculs, autant pour les dériver, les DL bizarres avec des valeurs abs et le reste... Comme l'a souligné l'examinateur, il faut être intelligent et adroit...
Bref, si vous avez envie de faire des calculs pendant une heure, c'est un bon entraînement. Pour ma part, j'ai fait pas mal de trucs et j'ai essayé de faire le max mais je n'ai pas trouvé de résultat.

(2) On prend un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\, f$, $E = G \oplus \mathrm{Ker}\, f$, une base adaptée, on écrit $mat(f, e_i)$, et on a $M^2 = M$ (en utilisant que $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = n - 1$, on a une matrice sympa). Comme f est dans $\mathcal{L}(E)$, f est un projecteur.
On peut aussi diagonaliser f, car $E_0(f) = \mathrm{Ker}\, f$ est de dimension $n - 1$, et comme $\mathrm{Tr}(f) = 1$, en écrivant le polynôme caractéristique de f, on a $P = (X - 1)X^{n-1}$ car par exemple, 0 est d'ordre au moins $n-1$ ($\dim E_\lambda \leqslant \omega(lambda)$) donc $P = X^(n-1)(X-c)$ et avec $\mathrm{Tr}(f) = 1$, $c = 1$. Donc f diagonalisable et dans la bonne base, on voit que c'est un projecteur.
Intervention de Sylvère Gangloff :
On note M la matrice de f associée canoniquement, M est de rang 1 : $\exists\ C$ colonne et L ligne telles que $M = CL$. $\mathrm{Tr}(M) = 1 : LC = 1$.
Dans ce cas $M^2 = CLCL = CL = M$, c'est un projecteur.

Solution 4.1.21 (Sylvère Gangloff) Note : 18
Commentaires :

Solution 4.1.22 (Thomas Saint-Paul) Note :
Commentaires : *examinatrice : de moyenne taille, la 50aine, les cheveux blonds bouclés (avec des mèches décolorées) Plutôt sèche au début, elle est devenu presque désagréable et en colère à mesure que le désastre se déroulait.*

(1)

Solution 5.1.1 (Louis Massonnet) Note : 13
Commentaires : *Examinatrice petite cheveux courts et gris. Très sympathique, souriante, bonne journée à la fin. A aimé mes pti dessins pour les ensembles de définition. Elle a demandé des explications supplémentaires sur le* $(-1)^{n-1}$ *Qu4) que je lui ai fournies sans trop comprendre ce qui lui posait problème. Qu 6) je lui ai expliqué qu'on aurait bien aimé bien utiliser le TSA (elle m'a alors laissé étaler ma culture sur la conclusion qui donnait la CU) mais qu'on avait ici des complexes. Elle m'a alors indiqué qu'il fallait utiliser l'IAF. A priori (ie avant la note) ca s'est bien passé.*

(1) Critère de de Riemann
(2) Demi plan $\Re(s) > 1$ (on fait ça proprement avec parties réelles et imaginaires).
(3) Interversion lim/somme : CN sur les segments pour $s > 1$ donne $\lim = +\infty$ (si $s < 1$ ça diverge vers l'infini).
(4) Décomposer ζ selon les termes pairs et impairs.
(5) Avec la formule précédente c'est bon.
(6) On écrit $\zeta(s) = \sum_{p=0}^{+\infty}(1/(2p+1)^s - 1/(2p+2)^s)$ et inégalité des accroissements finis avec $f(x) = 1/x^s$.
D'où $|1/(2p+1)^s - 1/(2p+2)^s| < \sup|f'(t)|$.
Reste à calculer $|f'(t)|$ en écrivant $s_1 + is_2$ on trouve sans trop de difficultés $|f'(t)| = |s|/ns + 1$ on majore puis on repasse à la somme. Ça permet d'avoir une CN pour intervertir lim/somme ce qui donne le résultat.

Solution 5.1.2 (Moïse Gaye) Note : 8
Commentaires : *?*

(1) $u_n(x) = \frac{n*x}{(n^2+x)^2} = O(\frac{1}{n})$. Ainsi f est définie si tous les u_n sont définies d'où $D = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} | x = -n^2, n \in \mathbb{N}\}$.
(2) Alors là il faut se restreindre à un segment où tous les u_n sont continues (de classe $\mathcal{C}^1$).
Soit $a \in \mathbb{R}^*$, $\forall x \in [0, a], \forall n \in \mathbb{N}, |u_n(x)| < \frac{n*a}{n^4} = \frac{a}{n^3}$ qui est intégrable.
Ainsi la série des u_n converge uniformément sur le segment $[0, a]$ donc f est continue sur $\mathbb{R}$.
On fait de même sur les intervalles $] - n^2, -(n+1)^2[$ lorsque $n \in \mathbb{N}$.
Ensuite on prouve le caractère $\mathcal{C}^1$.
On a $u_n'(x) = \frac{n^3-nx}{(x+n^2)^3}$ et on prend de même $a \in \mathbb{R}$ et on montre que la série des u_n' converge uniformément sur [0,a] donc que f y est dérivable et sa dérivée est égale à la somme des dérivées. On a de plus $u_n^{(p)}(x) = \frac{(nx-pn^3)(-1)^p p!}{(x+n^2)^2}$ ainsi la question 4 se prouve par recurrence en appliquant le dernier théorème à $f^{(p)}$.

(3) on intuite que l'équivalent est $x\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$.

Pour le prouver on calcule la $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ or $\frac{f(x)}{x}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{n}{(x+n^2)^2}$ or sur [0,1] $g_n(x)=\frac{n}{(x+n^2)^2}$ converge uniformément vers leur somme et $\lim_{x\to 0}g_n(x)=\frac{1}{n^3}$ d'où le résultat.

(4) Il faut pour cela réaliser un comparaison série intégrale.

Solution 5.1.3 (Laurent Anadon) Note : 9

Commentaires : *L'examinateur était sympathique, il donne des indications quand c'est nécessaire et surtout il aide le candidat à corriger ses imprécisions sans l'enfoncer. Il m'a permis d'admettre le résultat de l'avant dernière question pour pouvoir discuter de la conclusion de l'exercice et m'a cru sur parole pour les démos qu'il suffisait d'écrire, du genre démontrer qu'un ensemble est s.e.v.*

Quelques éléments de correction :

(1) C'est la définition.

(2) On montre d'abord que l'ensemble des fonctions qui vérifient (P) est un e.v. puis on considère une fonction croissante. Or une fonction croissante et majorée admet une limite à gauche et à droite en chaque point.

(3) Ça se fait bien, il faut sortir les epsilons mais c'est pas méchant.

(4) On sait qu'il existe η il suffit de prendre une troncature décimale, par exemple, de $a-\eta/2$: $\eta>0$ donc $\exists p\in\mathbb{R}$ tel que $10^{-p}<\eta/2$, on pose alors $m(a)=10^{-p}E(10^p(a-\eta/2))$.

(5) On utilise le fait que $\mathbb{Q}$ est dénombrable car isomorphe à $\mathbb{Z}*\mathbb{N}$ et après je ne sais pas vraiment...

(6) On en déduit évidemment que l'ensemble des points de discontinuité de f qui est exactement Σ est dénombrable. Le résultat classique est que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction strictement monotone est dénombrable.

Solution 5.1.4 (Thomas Gaudelet) Note : 8

Commentaires : *Pas un oral particulièrement passionnant, l'examinateur est sympathique...*

Solution 5.1.5 (Stéphane Boivert) Note : 9

Commentaires : *examinateur très très gentil (ce qui ne veut rien dire pour la note c'est sûr), grisonnant, queue de cheval, il m'a guidé quand je ne trouvais pas : je n'avais pas fait grand chose en préparation et c'est difficile de ne pas être stressé dans ce cas là...*

(1) Cours

(2) On écrit le module du produit de nombres complexes, en écrivant $z_1=a+ib$ et $z_2=c+id$, on obtient un égalité portant sur a, b, c et d, et puis cette égalité est en fait vraie pour a ,b, c, d complexes et on a trouvé la décomposition que l'on cherchait...

(3) On généralise, a ,b, c, d peuvent appartenir à n'importe quel anneau commutatif et la relation reste vraie.

(4) On cherche à décomposer 15 comme somme de trois carrés et on montre que c'est impossible.

(5) On cherche les congruences modulo 8 possible selon les cas, et on montre que seul le cas où il sont tous pairs convient.

(6) On cherche à décomposer 15 en somme de trois carrés de rationnels, on multiplie par les dénominateurs, puis je n'ai pas fini mais il m'a dit qu'il y avait des simplifications, qu'on se ramenait à ce qui précède et que finalement cela va mener à chercher la même décomposition qu'au 4 qui est impossible.

Commentaire de Sylvère Gangloff :
Un problème qui ressemble un peu, mais plus costaud, on peut montrer que $k = 4$ est le plus petit entier tels que tout entier naturel peut se décomposer en somme de k carrés de nombres entiers. Mais la démonstration se fait pas en deux lignes il me semble.. Voir le sujet d'ENS 2007 6h pour une démonstration (Enfin je crois que c'est celui là).

Solution 5.1.6 (Odile Maliet) Note : 10
Commentaires : Solution par Sylvère Gangloff

(1) On appelle f, fonction 2π périodique telle que $f(x) = \cos(ax)$ sur $[-\pi, \pi]$.
On calcule les coefficients de Fourier : $a_n(f) = \dfrac{(-1)^n \sin(a\pi)a}{\pi((a)^2 - n^2)}$. Or f est continue et C^1 par morceaux sur $]-\pi, \pi[$, grâce au théorème de Dirichlet, f est égale à la somme de sa série de Fourier sur cet intervalle. On écrit cette égalité en 0.. On obtient, en notant S la somme moche : $S = \dfrac{a\pi}{\sin(a\pi)}$. Le théorème a permis au passage de prouver la convergence.

(2) Il suffit de montrer que $\displaystyle\int_0^1 \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k t^{a+k-1}\,\mathrm{d}t$ tend vers 0. Pour cela on utilise le critère de convergence de Leibnitz (sur les séries alternées) qui permet de majorer le reste : ici on peut majorer le module de l'intégrande par t^{a+n-1}, et le théorème de convergence dominée permet de conclure.

(3) On décompose l'intégrale en la somme de l'intégrale sur $[0, 1]$ et sur $[1, +\infty]$. Dans la deuxième intégrale on fait le changement de variable $u = \frac{1}{t}$, ce qui permet de la développer de la même manière que la première, en utilisant la question 2). On obtient alors deux sommes, dont on apparie les termes qui vont bien pour se ramener à une somme de la forme de la question 1, ce qui permet de conclure.

Solution 5.1.7 (Sacha Drevet) Note : 17
Commentaires : *examinateur : jeune, il mettait du temps pour comprendre ce que je faisais. Il m'a demandé plusieurs fois de répéter ce que je disais au début. Après, j'ai compris qu'il fallait exposer ses démonstrations lentement.*

(1) a) Soient $x_1 < x_2 < \ldots < x_q$ les racines distinctes de P. $P(x_k) = P(x_{k+1}) = 0$ donc, grâce au théorème de Rolle, $\exists y_k \in]x_k, x_{k+1}[$ tq $P'(y_k) = 0$. On en déduit que P' a au moins $q - 1$ racines données par $y_1 < y_2 < \ldots < y_{q-1}$.

b) Le calcul du déterminant de Vandermonde donne $\delta_n = \displaystyle\prod_{i<j}(\lambda_j - \lambda_i) > 0$.

c) On procède par récurrence sur k.
– $k = 1$: $P = a_0X^{d_0} + a_1X^{d_1} = X^{d_0}(a_0 + a_1X^{d_1-d_0})$ qui a au plus une racine > 0 si $a_0a_1 < 0$.
– Hérédité : on suppose la propriété vraie à l'ordre k. On raisonne par l'absurde à partir du a.
Soit $P = a_0X^{d_0} + \cdots + a_{k+1}X^{d_{k+1}} = X^{d_0}Q$ qui admet au moins $k + 2$ racines > 0. Il en est de même pour Q donc Q' a au moins $k + 1$ racines et vérifie l'hypothèse

de récurrence à l'ordre k (le terme constant disparaît dans la dérivation) ce qui est contradictoire.

d) Par récurrence.

– $n=1$: $\delta_1 = \begin{vmatrix} \lambda_1^{d_0} & \lambda_2^{d_0} \\ \lambda_1^{d_1} & \lambda_2^{d_1} \end{vmatrix} = (\lambda_1\lambda_2)^{d_0}(\lambda_2^{d_1-d_0} - \lambda_1^{d_1-d_0}) > 0$.

– On suppose la propriété vraie au rang n.

Soit $Q(X) = \begin{vmatrix} \lambda_1^{d_0} & \dots & \lambda_n^{d_0} & X^{d_0} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{d_n} & & \lambda_n^{d_n} & X^{d_n} \end{vmatrix} = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i X^{d_i}$ en développant le déterminant.

On sait, d'après la question précédente, que Q admet au plus n racines > 0 or $Q(\lambda_i) = 0$ pour $i \in [\![1, n]\!]$ fournit toutes ces racines donc Q garde un signe constant sur $]\lambda_n, +\infty[$ et son coefficient dominant (d'après l'hypothèse de récurrence) est > 0.

Comme $\lambda_{n+1} > \lambda_n$ alors $Q(\lambda_{n+1}) > 0$ c.q.f.d.

Solution 5.1.8 (Jiawei Hu) Note : 16

Commentaires :

Solution 5.1.9 (Robin Larrieu) Note : 15

Commentaires : *examinateur : Assez jeune, des lunettes, une voix un peu bizarre (on dirait qu'il parle avec son nez). Sinon assez sympa, t'arrête dans tes calculs quand il voit que tu sais les faire (surtout que ça sert pas des masses pour la suite) et donne quelques indications. Deuxième épreuve de maths de la journée. Ce matin, analyse moche avec maple, où il faut montrer des égalités entre expressions horribles en intervertissant sans arrêt intégrales et sommations. Je me dis que cette deuxième épreuve va être plus intéressante, et ben non, j'ai eu droit à une courbe en polaire !*

(1) a) Elle est définie pour $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}.\pi$. $r(\theta+\pi) = -r(\theta)$ donc on peut se restreindre à $]0;\pi[$. $r(\pi-\theta) = r(\theta)$ donc on a une symétrie par rapport à Oy

$y = \cos(2\theta)$ donc $y = 1$ est asymptote en 0 et en π.

On peut aussi s'intéresser aux valeurs qui annulent r, mais il n'en attendait pas davantage.

b) Il faut juste recracher la formule, c'est du cours, encore faut-il s'en souvenir...

Pour le tracé, il faut juste respecter la symétrie, les asymptotes et le fait qu'il n'y a pas de point d'inflexion (la courbure est positive).

c) On a $x = \frac{\cos(2\theta).\cos\theta}{\sin\theta}$ et $y = \cos\theta$.

On en déduit

$$x^2 + y^2 = \frac{\cos^2(2\theta)}{\sin^2\theta} = \frac{(1-2\sin^2(\theta))^2}{\sin^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta} - 4 + 4\sin^2\theta.$$

De plus, $\frac{x^2}{y^2} = \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta} - 1$.

En réinjectant $\frac{1}{\sin^2\theta} = \frac{x^2}{y^2} + 1$ dans la première expression, on peut en déduire une équation cartésienne (Il m'a arrêté là pour ce calcul).

On obtient finalement $x^4.y^2 - x^4 + 2y^4.x^2 + 2y^2.x^2 + y^6 - y^4 = 0$. On perd un peu l'équivalence dans la bataille (pour cette équation, la courbe est symétrique par rapport à l'origine, ce qui n'est pas vrai pour la courbe donnée...) mais il m'a laissé continuer quand même.

Commentaire de Jimmy : la méthode de Robin est très maladroite, il y a beaucoup

plus simple et plus juste :
on écarte les cas $\theta \equiv 0[\pi]$ et $r = 0$

$$r \sin\theta = \cos(2\theta) \Leftrightarrow y = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \Leftrightarrow y(x^2 + y^2) = x^2 - y^2$$

et on remarque finalement que l'on retrouve, dans l'équation finale, le point $x = y = 0$.

d) Il suffit de remplacer x^2 par $x^2 + z^2$.

e) $\left\{\begin{array}{lcl} x(\theta) & = & \frac{\cos(2\theta).\cos\theta}{\sin\theta}.\cos\phi \\ y(\theta) & = & \cos(2\theta) \\ z(\theta) & = & \frac{\cos(2\theta).\cos\theta}{\sin\theta}.\sin\phi \end{array}\right. ,\theta \in]0;\pi[, \phi \in [0;2\pi].$

(2) X^n divise $1 + X - P_n^2 \Leftrightarrow 1 + x - P_n^2(x) = O(x^n)$.
Et là, gros parachute (qu'il a été obligé de me donner), on regarde le DL à l'ordre n en 0 de $\sqrt{1+x}$.
$\sqrt{1+x} = P_n(x) + O(x^n)$ donc $1 + x = P_n^2(x) + O(x^n)$.
$A - I_n$ est triangulaire supérieure de diagonale nulle donc est nilpotente $(A - I_n)^n = 0$.
En posant $X = Y - 1$ dans ce qui précède, on a $(Y - 1)^n$ divise $Y - Q_n^2(Y)$ (où $Q_n(Y) = P_n(Y - 1)$).
On en déduit $A - Q_n^2(A) = 0$ donc $A = (Q_n(A))^2$.

Solution 5.1.10 (Thomas Saint-Paul) Note : 10
Commentaires :

(1) ok

(2) ok aussi, on vérifie que XY^T est non nul et l'on calcule $f(XY^T)$. Si λ et μ sont les vaps associées respectivement à X et Y, on trouve que la vap associé à XY^T est $\lambda + \mu$.

(3) On montre d'abord le résultat pour $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ par récurrence.
Si $k = 1$, $AB = B(\lambda I_n - A^T)$ ok.
$P(k) \Rightarrow P(k+1)$: $A^{k+1}B = AB(\lambda I - n - A^T)^k$ d'après l'hypothèse de récurrence, et on remplace AB.

(4) Par la contraposée, $Q(\lambda I_n - A^T)$ n'est pas inversible $\Leftrightarrow \det(Q(\lambda I_n - A^T)) = 0 \Leftrightarrow$ il existe i_0 tel que $\det((\lambda - z_{i_0})I_n - A^T) = 0$. Donc λ ne s'écrit pas comme une vap de A + une racine de Q] $\Leftrightarrow Q(\lambda I_n - A^T)$ inversible.

(5) On applique 3) avec le polynôme caractéristique de A. On a donc $0 = B\chi_A(\lambda I_n - A^T)$ (Cayley-Hamilton).
Si $\chi_A(\lambda I_n - A^T)$ est inversible, $B = 0$, pas possible car B est vep de f. Donc $\chi_A(\lambda I_n - A^T)$. n'est pas inversible. Donc λ s'écrit comme la somme de deux vaps de A d'après 4).

(6) Avec 5) et 2) on obtient que les vaps de f sont exactement les $\lambda + \mu$ avec λ et μ vap de A.

(7) Immédiat : f est un automorphisme ssi $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(-A) = \emptyset$.

(8) Si A diag, on note $(e_1, .., e_n)$ une base qui la diagonalise. Dans cette base, on remarque la famille $(e_i e_j^T)$ est la famille des $E_{i,j}$, donc c'est une base de E de veps de f. Donc f diag.

(9) On montre par récurrence que $f(M)^p = \sum_{k=0}^{k=p} C_p^k A^k M (A^T)^{(n-k)}$. Il suffit donc de choisir p assez grand. (2×l'ordre de nilpotence de A +1 devrait convenir).
On peut aussi dire que A est nilpotente ssi $\mathrm{Sp}(A) = \{0\} \Rightarrow \mathrm{Sp}(f) = \{0\} \Rightarrow f$ nilpotente (en fait on a même équivalence).

Solution 5.1.11 (Alexandre Pizzut) Note : 17

Commentaires : *examinatrice : Petite, demande parfois des précisions, très gentille. Cet exercice ressemble beaucoup à certains exos corrigés durant la préparation aux oraux, donc j'ai eu de la chance.*

Donc un exercice pour lequel j'étais plutôt bien préparé... Seul problème : erreur d'énoncé ! La matrice N que j'avais à étudier n'était pas la bonne, non seulement elle était définie négative, mais en plus elle ne servait à rien dans la suite de l'exercice. J'ai fini par m'en rendre compte, mais persuadé que je n'y arrivais pas et que l'énoncé était bon, j'ai cherché pour rien pendant longtemps. Du coup, à l'oral, j'ai expliqué pourquoi je pensais que la matrice N proposée n'était pas la bonne, et j'ai posé celle qu'il fallait en me servant de la question d'après, donc elle n'en a pas tenu compte.

Cet exo ressemble beaucoup à l'exo 1.4.7 de l'oral 2008.

(1) Cf. cours...

(2) Immédiat avec Cauchy-Schwarz : on se place dans une base diagonalisante pour A (et pour A^{-1} par la même occasion !).

$$\begin{aligned}(AX|X).(A^{-1}X|X) &= \left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i^2\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}x_i^2\right)\\ &\geqslant \left(\sum_{i=1}^{n}(\sqrt{\lambda_i}x_i).(x_i/\sqrt{\lambda_i})\right)^2 = (X|X)^2.\end{aligned}$$

(3) N est symétrique de manière évidente. Soient μ_i ses valeurs propres dans la base diagonalisante de A alors

$$\begin{aligned}\mu_i &= -\lambda_i + (\lambda_1+\lambda_n) - \frac{\lambda_1\lambda_n}{\lambda_i}\\ &= \frac{-\lambda_i^2 + (\lambda_1+\lambda_n)\lambda_i - \lambda_1\lambda_n}{\lambda_i} = -\frac{(\lambda_i-\lambda_1)(\lambda_i-\lambda_n)}{\lambda_i} > 0.\end{aligned}$$

Donc N est bien positive car ses valeurs propres sont toutes $\geqslant 0$.

(4) On a $P(0) = \lambda_1\lambda_n(A^{-1}X|X) > 0$ et

$$P(1) = (AX|X) - (\lambda_1+\lambda_n)(X|X) + \lambda_1\lambda_n(A^{-1}X|X) = -(NX|X) \leqslant 0$$

donc, grâce au T.V.I., P s'annule en $t_0 \in]0,1]$. P est un polynôme du second degré qui admet une racine donc son discriminant est $\geqslant 0$. Ceci donne immédiatement l'inégalité $(AX|X)(A^{-1}X|X) \leqslant \frac{(\lambda_1+\lambda_n)^2(X|X)^2}{4\lambda_1\lambda_n}$.

(5) Compte tenu de la condition, le cas d'égalité ne peut être obtenu que lorsque $X \in \mathrm{Vect}(X_1, X_n)$ où X_1 et X_n sont des vecteurs propres (que l'on prend unitaires) associés aux valeurs propres λ_1 et λ_n. Ici, on suppose que l'on ne cherche les cas d'égalité que pour des valeurs quelconques des λ_i. Soit $X = x_1X_1 + x_2X_2$ un vecteur de norme 1 alors l'égalité donne

$$\begin{aligned}(\lambda_1x_1^2+\lambda_nx_n^2)(x_1^2/\lambda_1+x_n^2/\lambda_n) &= \underbrace{x_1^4+x_n^4}_{=1-2x_1^2x_n^2} + \frac{\lambda_1}{\lambda_n}x_1^2x_n^2 + \frac{\lambda_n}{\lambda_1}x_1^2x_n^2\\ &= 1 + x_1^2x_n^2\frac{(\lambda_1-\lambda_n)^2}{\lambda_1\lambda_n}\\ &= \frac{(\lambda_1+\lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n}\end{aligned}$$

ce qui donne, en faisant passer 1 de l'autre côté de l'égalité, $x_1^2x_n^2 = \dfrac{1}{4}$ avec $x_1^2 + x_n^2 = 1$ ce qui ne laisse que la solution $x_1^2 = x_n^2 = \dfrac{1}{2}$ et les 4 vecteurs réalisant l'égalité $X = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\varepsilon_1 X_1 + \varepsilon_2 X_2)$ où $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$.

Solution 5.2.1 (Louis Massonnet) Note : 15

Commentaires : *Examinateur assez jeune et pas très sympathique, donne des quarts d'indication dont on sait pas vraiment si c'est la bonne méthode ou juste un sarcasme. Il tient vraiment à ce qu'on traite les exemples sous Maple et a refusé de me donner la fonction utile pour résoudre une équation vectorielle, donc j'ai du prendre une équation par ligne (heureusement les matrices étaient QUE 4x4 sinon j'y serais encore).*

(1)

(2) Solution d'Alexis Prévost.

a) Soit X un vecteur de module 1 : $1 = \|A^{-1}AX\| \leqslant |||A^{-1}|||.|||A|||$ d'où le résultat.

b) $A^{\mathrm{T}}A$ est symétrique définie positive, donc ses valeurs propres sont > 0.
On procède ensuite par double inégalité en notant $B = A^{\mathrm{T}}A$:

– On prend X de module 1 :

$$\|AX\|^2.\|A^{-1}X\|^2 = (\sum \lambda_i x_i^2)(\sum \frac{x_i^2}{\lambda_i}) \leqslant \sup(\lambda_i)\sup(\frac{1}{\lambda_i}) \leqslant \frac{\sup(\lambda_i)}{\inf(\lambda_i)}$$

– On prend X un vecteur propre de module 1 associé à la plus grande valeur propre de B et Y un vecteur propre associé à la plus petite valeur propre de B :

$$\|AX\|^2.\|A^{-1}Y\|^2 = \frac{\sup(\lambda_i)}{\inf(\lambda_i)}.$$

Et on a donc le résultat !

Solution 5.2.2 (Benjamin Bonrepaux) Note : 11

Commentaires :

(1) On mq $p(s = 1)$ et v premier. Pour l'unicité, on prend deux couples et on utilise Gauss et la condition sur a.

(2)

Solution 5.2.3 (Louis Massonnet ? ?) Note : 15 (?)

Commentaires : *Examinateur jeune, lunettes, cheveux courts et noirs, à l'air sympathique... MAIS il voue un culte à Maple ! Ses exos contiennent tous une grosse partie programmation (oui ça parait pas gros quand on a la correction mais quand il faut trouver toutes les fonctions ...parce que si on connaît pas le nom de la formule truc, on ne peut pas taper ?truc ! ! !) J'ai passé 25 minutes à la préparation à chercher les formules pour les programmes (bien qu'ayant bossé les fonctions de bases de ce cher logiciel). Au tableau, l'examinateur donne des indications et aide quand il faut. J'ai appris à la sortie que la question 3) avait été faite dans l'autre groupe de TD ... too bad.*

(1)
```
>with(linalg)
>had := proc (A,B,n)
 f:= (i,j) -> A[i,j]*B[i,j]
 C:=Matrix(n,f);
```

```
end;
```

(2) a) Symétrique (donc diagonalisable) positive.

b)
```
>with(LinearAlgebra);
> for i from 1 to 10 do
  M:=RandomMatrix(3):N:=RandomMatrix(3):
  print(evalf(Eigenvalues(had(Multiply(transpose(M),M),
  Multiply(transpose(N),N)))));
  od:
```

On voit que les parties imaginaires des valeurs propres sont petites donc que les valeurs propres sont réelles (approximations...), elles sont également positives.

(3) a) $M = PDP^{\mathrm{T}}$ avec D qui a $(n-r)$ 0. Soient x_i les vap et Y_i les colonnes de P, on a $M = \sum\limits_{i=1}^{r} x_i Y_i (Yi^{\mathrm{T}})$ (écriture à justifier en repassant par les produits matriciels). Comme M est positive on prend $X_i = \sqrt{(}x_i)Y_i$.

b) M est symétrique positive. On regarde $\dim(\operatorname{Ker} M)$. En écrivant $< X|MX >= 0$ pour X dans le Ker, on utilise ensuite l'écriture de M (question pas terminée). Soit, après renumérotation, $(X_1, \dots, X_p)$ une base de $\mathrm{Vect}(X_i)$ que l'on complète en une base de $\mathbb{R}^n$: $\mathcal{B} = (X_1, \dots, X_p, U_{p+1}, \dots, U_n)$. Soit U la matrice de cette base dans la base canonique. $M = UJ_pU^{\mathrm{T}}$ donc $\mathrm{Rg}(M) = \mathrm{Rg}(X_i)$.

(4) Je recopie ici la solution de l'exo 2.2.5 du chapitre sur les espaces euclidiens.
Comme A est symétrique, on sait que $\exists P \in O(n) : A = P^{\mathrm{T}}DP$ où $D = \mathrm{Diag}(\lambda_i)$, $\lambda_i > 0$ et en faisant le produit des trois matrices on obtient $a_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k p_{ki} p_{kj}$.
Avec $\overrightarrow{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{e}_i$, on a $q_C(\overrightarrow{x}) = \sum\limits_{i,j} a_{ij} b_{ij} x_i x_j = \sum\limits_{i,j,k} \lambda_k p_{ki} p_{kj} b_{ij} x_i x_j$.
On pose alors $\overrightarrow{x_k} = \sum\limits_{i=1}^{n} p_{ki} x_i \overrightarrow{e_i}$ donc $q_C(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k q_B(x_k) \geqslant 0$.
Montrons que q_C est définie :

$$\begin{aligned}
q_C(x) = 0 &\Leftrightarrow \forall k \in [1,n],\ q_B(x_k) = 0 && \text{car } \lambda_k > 0\\
&\Leftrightarrow \forall k \in [1,n],\ \overrightarrow{x_k} = 0 && \text{car } q_B \text{ est définie}\\
&\Leftrightarrow \forall (k,i) \in [1,n]^2,\ p_{ki}x_i = 0 && \text{car } (e_i) \text{ est une base}\\
&\Rightarrow PX = 0 && \text{où } P \text{ est la matrice de passage}\\
&\Rightarrow x = 0
\end{aligned}$$

Solution 5.2.4 (Thomas Gaudelet) Note : 11
Commentaires : *Examinateur assez sympathique qui demande des précisions de temps à autres, j'ai eu la chance de passer à 8h, autant dire que j'étais particulièrement bien réveillé... J'ai passé la majeure partie de la colle sur le calcul de la question 3.*

(1) Contribution de Sylvère Gangloff.
on peut exprimer σ_n comme une somme finie, c'est plus simple à calculer :
On pose $f(x) = x^n e^x$ pour x quelconque. On développe en série entière :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{n+k}}{k!}.$$

On dérive n fois cette expression (On peut tout se permettre on a une fonction entière !) :

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k)!x^k}{(k!)^2}.$$

On a alors $\sigma_n = f^{(n)}(1)$. Or avec la formule de Newton-Leibnitz, on peut exprimer ceci comme une somme finie :

$$f^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} e^x$$

donc $\sigma_n = \mathrm{e} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!}$.

Solution 5.2.5 (Stéphane Boivert) Note : 13

Commentaires : *Examinateur assez froid, pas méchant non plus. Il m'a demandé de faire beaucoup de choses sur Maple : des simplifications, des limites, un équivalent (je ne connaissais pas c'est la commande asympt), une décomposition en fractions rationnelle, résoudre une équadiff.* Il faut surtout faire tout les calculs avec Maple et ne pas perdre de temps dessus.

J'ai perdu tout mon temps pour l'équadiff de la question 2, parce que je n'ai pas utilisé la bonne méthode. J'ai écrit S' et essayé de trouver une relation (c'est la qu'il fallait décomposer en élément simple une fraction rationnelle de n), alors qu'il fallait partir de la relation et sommer. C'est du calcul... il faut arriver à simplifier pour se ramener en S ou S'. Puis on donne à Maple. Je n'ai pas eu le temps de regarder la dernière question donc je ne m'en rappelle plus.

(1)

Solution 5.2.6 (Odile Maliet) Note : 12

Commentaires : Solution par Sylvère Gangloff

(1) Non.

(2) a) $C\tilde{C} = \Pi_A I_n$.

 b) Immédiat avec a).

 c) C'est la définition de $g(X)$. Les coefficients de $\tilde{C}$ sont de degré inférieur ou égal à $n-1$ donc les coefficients de B sont de degré inférieur ou égal à $n-1$. On vérifie bien que $n-1 \leqslant n$, donc c'est bon.

(3) On écrit : $h = a_0 + ... + a_n X^n$ et on développe bourrinnement cette relation (immédiate en divisant par $g(X)$) et on identifie les coefficients des deux polynômes :

$$A\Gamma_0 = a_0 I_n, \ldots, A\Gamma_{n-1} = \Gamma_{n-2} + a_{n-1} I_n \text{ et } -\Gamma_n = a_n.$$

On compose par A^k la k-ième relation et on somme.

On obtient alors $h(A) = 0$.

Solution 5.2.7 (Sacha Drevet) Note : 14

Commentaires :

Solution 5.2.8 (Jiawei Hu) Note : 15

Commentaires :

Solution 5.2.9 (Thomas Saint-Paul) Note : 19
Commentaires : *examinateur : plutôt sympathique, s'énerve gentiment quand on fait des bêtises.*